



10 Matematická indukcia



Metodický zámer

Matematickou indukciou sa zaoberajú študenti gymnázia na konci 1. ročníka (kvinty) v rámci tematického celku *Teória čísel*. Využívajú ho predovšetkým pri dôkaze tvrdení týkajúcich sa premennej veličiny, ktorá môže nadobúdať hodnoty len z množiny prirodzených čísel. Pri dôkazoch rôznych vzorcov študenti často kladú otázky týkajúce sa pôvodu týchto formúl. Aktivitu ktorú navrhujeme, umožní študentom odhaliť aspoň niektoré z nich. Vďaka tabuľkovému procesoru Excel vytvoríme tabuľky hodnôt pre príslušné vzorce a motivujeme študentov k vysloveniu hypotézy, ktorú následne dokážu metódou matematickej indukcie. Takýto postup je neformálny a pre študentov motivujúci.

Matematická indukcia je dôkazová metóda, ktorá je medzi žiakmi pomerne obľúbená, pretože je možné ju úspešne používať bez toho, aby rozumeli samotnému princípu. Stačí teoreticky a formálne zvládnuť jej dva kroky. Namiesto rutinného a často mechanického využívaniu tohto princípu prezentujeme v tejto kapitole inovatívny a kreatívny spôsob vyučovania s podporou počítačových technológií.



Čo by mal študent vedieť - stručný syllabus

Dôkaz metódou matematickej indukcie sa používa na dôkaz tvrdení tvaru:
Pre každé prirodzené číslo n platí $T(n)$

Dôkaz pozostáva z dvoch krokov:

- 1.krok: Dokážeme platnosť tvrdenia $T(1)$;
 $T(1)$ je tvrdenie, ktoré vznikne dosadením hodnoty $n=1$ do výrokovej formy $T(n)$
- 2.krok: nazýva sa tiež *indukčný krok*
Dokážeme tvrdenie: $\forall n \in \mathbb{N}; T(n) \Rightarrow T(n+1)$; dokážeme, že pre každé prirodzené číslo n z platnosti tvrdenia $T(n)$ vyplýva platnosť tvrdenia $T(n+1)$
Tým je dokázaná platnosť tvrdenia $T(n)$ pre každé $n \in \mathbb{N}$



Inovácia vyučovacieho procesu

Uvádzané aktivity v počítačovej učebni zaradíme do vyučovania po hodine matematiky, na ktorej boli študenti zoznámení s princípom matematickej indukcie. Umožníme študentom aktívne participovať na odhaľovaní všeobecných tvarov vzorcov a identít, ktoré dokazujeme. V naznačených aktivitách pri postupnej a systematickej analýze tabuliek prezentujúcich uvedené vzťahy je možné vo viacerých prípadoch dospieť k správnym hypotézam, ktoré budú následne potvrdené dôkazom matematickou indukciou. Uvedieme štyri úlohy na dokazovanie identít a nerovností.



Riešené príklady

PRÍKLAD 10.1

Určte súčet n za sebou nasledujúcich nepárnych čísel:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = ?$$

RIEŠENIE

Vytvoríme v Exceli tabuľku hodnôt pre niekoľko prvých čiastočných súčtov S_n ; nech $n = 1$ až $n=20$. Pri jej hlbšej analýze je zjavné, že platí vzťah:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2 \text{ ktorý následne dokážeme.}$$

zápis v excelovskom hárku	reprezentácia na obrazovke počítača																																																																																				
<p>vytvorenie tabuľky</p> <ul style="list-style-type: none"> Do stĺpca A - bunky A2:A20 vkladáme hodnoty premennej n využijeme pritom funkciu Rady Do bunky B2 vložíme hodnoty premennej $a(n) = (2n-1)$ v tvare $=2*A1-1$, následne prekopírujeme do A2:A20, Do bunky C1 vložíme hodnotu 1, Do bunky C2 vložíme $=C1+B2$ prekopírujeme do C3:C20 	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>5</td><td>9</td></tr> <tr><td>4</td><td>4</td><td>7</td><td>16</td></tr> <tr><td>5</td><td>5</td><td>9</td><td>25</td></tr> <tr><td>6</td><td>6</td><td>11</td><td>36</td></tr> <tr><td>7</td><td>7</td><td>13</td><td>49</td></tr> <tr><td>8</td><td>8</td><td>15</td><td>64</td></tr> <tr><td>9</td><td>9</td><td>17</td><td>81</td></tr> <tr><td>10</td><td>10</td><td>19</td><td>100</td></tr> <tr><td>11</td><td>11</td><td>21</td><td>121</td></tr> <tr><td>12</td><td>12</td><td>23</td><td>144</td></tr> <tr><td>13</td><td>13</td><td>25</td><td>169</td></tr> <tr><td>14</td><td>14</td><td>27</td><td>196</td></tr> <tr><td>15</td><td>15</td><td>29</td><td>225</td></tr> <tr><td>16</td><td>16</td><td>31</td><td>256</td></tr> <tr><td>17</td><td>17</td><td>33</td><td>289</td></tr> <tr><td>18</td><td>18</td><td>35</td><td>324</td></tr> <tr><td>19</td><td>19</td><td>37</td><td>361</td></tr> <tr><td>20</td><td>20</td><td>39</td><td>400</td></tr> </tbody> </table>		A	B	C	1	1	1	1	2	2	3	4	3	3	5	9	4	4	7	16	5	5	9	25	6	6	11	36	7	7	13	49	8	8	15	64	9	9	17	81	10	10	19	100	11	11	21	121	12	12	23	144	13	13	25	169	14	14	27	196	15	15	29	225	16	16	31	256	17	17	33	289	18	18	35	324	19	19	37	361	20	20	39	400
	A	B	C																																																																																		
1	1	1	1																																																																																		
2	2	3	4																																																																																		
3	3	5	9																																																																																		
4	4	7	16																																																																																		
5	5	9	25																																																																																		
6	6	11	36																																																																																		
7	7	13	49																																																																																		
8	8	15	64																																																																																		
9	9	17	81																																																																																		
10	10	19	100																																																																																		
11	11	21	121																																																																																		
12	12	23	144																																																																																		
13	13	25	169																																																																																		
14	14	27	196																																																																																		
15	15	29	225																																																																																		
16	16	31	256																																																																																		
17	17	33	289																																																																																		
18	18	35	324																																																																																		
19	19	37	361																																																																																		
20	20	39	400																																																																																		
<p>Dôkaz MI:</p> <p>1. overíme pre $n=1 \Rightarrow 1+3=2^2$ platí</p> <p>2. IP: vzťah platí pre $n=k \Rightarrow 1+2+3+\dots+(2k-1)=k^2$</p> <p>3. Dokážeme, že platí aj pre $n=k+1$; teda $1+2+3+\dots+2k+(2(k+1)-1)=(k+1)^2$</p> <p>Keďže, $1+2+3+\dots+(2(k+1)-1)=1+2+3+\dots+2k+2k+1=k^2+2k+1 \Rightarrow$</p> <p>Po úprave dostávame: $1+2+3+\dots+(2(k+1)-1)=(k+1)^2$</p>																																																																																					

Obr.10.1: Riešenie príkladu 10.1

PRÍKLAD 10.2

V postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú prvé dva členy $a_1=3$, $a_2=9$ a pre každé $n \in N$ platí:
 $a_k = 4a_{k-1} - 3a_{k-2}$. Dokážte, že pre každé $n \in N$ platí: $a_n = 3^n$.

RIEŠENIE

Pri riešení postupujeme analogicky ako v predchádzajúcom príklade. Zostavíme tabuľku, analýza ktorej nás privedie k vysloveniu hypotézy. Nemusíme študentom hneď odhaliť pravú stranu identity, ale povzbudzujeme ich, aby sami vyslovili správnu hypotézu.

vytvorenie tabuľky hodnôt postupnosti	reprezentácia na obrazovke počítača		
<ul style="list-style-type: none"> Do stĺpca A; bunky A2 :A20 vložíme index člena postupnosti, V stĺpci B; bunky B2: B20 zaznamenáme hodnoty členov postupnosti a_n, do bunky B4 vložíme výraz v tvare $= 4 \cdot A2 - 3 \cdot A1$, skopírujeme do buniek B4:B20, V stĺpci C registrujeme a vyznačíme mocniny čísla 3 	n	$a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2}$	$a_n = 3^n$
	1		3^1
	2		3^2
	3	27	3^3
	4	81	3^4
	5	243	3^5
	6	729	3^6
	7	2187	3^7
	8	6561	3^8
	9	19683	3^9
	10	59049	
	11	177147	
	12	531441	
	13	1594323	
	14	4782969	3^n
<p>Dôkaz MI Metódu matematickej indukcie použijeme v modifikovanej podobe. Najskôr overíme, či vzťah platí pre $n = 1$ a $n=2$. Následne predpokladáme, že rovnosť platí pre dva za sebou nasledujúce členy postupnosti a_m, a_{m+1} a z tohto predpokladu ukážeme, že vzťah platí aj pre výraz a_{m+2}.</p> <p>1. Nech $n=1$ a $n=2$, potom $a_1=3^1$, $a_2=3^2$ teda uvedený vzťah platí. 2. IP: nech vzťah platí pre $n = m$ a $n = m+1$; teda $a_m = 3^m$ a $a_{m+1} = 3^{m+1}$ z tohto ukážeme, že platí aj pre $n = m+2$ teda $a_{m+2} = 3^{m+2}$ Z rovnosti $a_k = 4a_{k-1} - 3a_{k-2}$ po dosadení za $k = m+2$ dostávame $a_{m+2} = 4a_{m+1} - 3a_m \Rightarrow a_{m+2} = 4 \cdot 3^{m+1} - 3 \cdot 3^m = 4 \cdot 3^{m+1} - 3^{m+1} = 3 \cdot 3^{m+1} = 3^{m+2} \Rightarrow$ $a_{m+2} = 3^{m+2}$ čo bolo treba dokázať</p>			

Obr.10.2:Riešenie príkladu 10.2

PRÍKLAD 10.3

Určite súčet n za sebou idúcich prirodzených a tiež súčet *tretích mocnín* n za sebou idúcich čísel : a) $1 + 2 + 3 + \dots + n = ?$

b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = ?$

RIEŠENIE

Pri riešení postupujeme ako v príklade 1. Zostavíme tabuľku čiastočných súčtov. Pri určovaní súčtu n za sebou idúcich prirodzených čísel môžu študenti využiť aj vzorec pre súčet n členov aritmetickej postupnosti. Vzťah pre súčet tretích mocnín n za sebou idúcich čísel potom ľahko odhalia pomocou vytvorenej tabuľky.

vytvorenie tabuľky čiastočných súčtov pre $n=1$ až $n=20$	reprezentácia na obrazovke počítača																																																				
<ul style="list-style-type: none">Zostavenie tabuľky je analogické ako v príklade 1. Prvú z identít dokazujeme za účelom ľahšieho odhalenia vzťahu pre súčet tretích mocnín "n" za sebou idúcich prirodzených čísel. Preto tiež zostavujeme spoločnú tabuľku pre obe identity. Vo štvrtom stĺpci študenti registrujú v príslušných riadkoch druhé mocniny čísel objavujúcich sa v treťom stĺpci vždy v príslušnom riadkuZ farebne vyznačeného riadku dedukujú študenti na vzťahy: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$	<table><tr><th>n</th><th>n³</th><th>s_n = 1+2+...+n</th><th>s_n = 1³+2³ +...+n³</th></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>8</td><td>3</td><td>9</td></tr><tr><td>3</td><td>27</td><td>6</td><td>36</td></tr><tr><td>4</td><td>64</td><td>10</td><td>100</td></tr><tr><td>5</td><td>125</td><td>s₅ = 15</td><td>225</td></tr><tr><td>6</td><td>216</td><td>21</td><td>441</td></tr><tr><td>7</td><td>343</td><td>28</td><td>784</td></tr><tr><td>8</td><td>512</td><td>36</td><td>1296</td></tr><tr><td>9</td><td>729</td><td>45</td><td>2025</td></tr><tr><td>10</td><td>1000</td><td>55</td><td>3025</td></tr><tr><td>11</td><td>1331</td><td>66</td><td>4356</td></tr><tr><td>12</td><td>1728</td><td>78</td><td>6084</td></tr></table>	n	n ³	s _n = 1+2+...+n	s _n = 1 ³ +2 ³ +...+n ³	1	1	1	1	2	8	3	9	3	27	6	36	4	64	10	100	5	125	s ₅ = 15	225	6	216	21	441	7	343	28	784	8	512	36	1296	9	729	45	2025	10	1000	55	3025	11	1331	66	4356	12	1728	78	6084
n	n ³	s _n = 1+2+...+n	s _n = 1 ³ +2 ³ +...+n ³																																																		
1	1	1	1																																																		
2	8	3	9																																																		
3	27	6	36																																																		
4	64	10	100																																																		
5	125	s ₅ = 15	225																																																		
6	216	21	441																																																		
7	343	28	784																																																		
8	512	36	1296																																																		
9	729	45	2025																																																		
10	1000	55	3025																																																		
11	1331	66	4356																																																		
12	1728	78	6084																																																		
Dôkaz MI Prvú identitu $1 + 2 + 3 + \dots + n =$ je možné získať aj použitím vzorca pre súčet n členov aritmetickej postupnosti s diferenciou $d=1$; ($S_n = n(a_1+a_n)/2$). Dokážeme teda iba druhý vzťah. 1. $n=1$ potom $1^3 = (1 \cdot 2/2)^2$platí 2. nech platí IP; ak $n=k \Rightarrow 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2} \right)^2$ 3. Ukážeme, že na základe IP platí aj vzťah pre $n = k+1$; teda platí: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots k^3 + (k+1)^3 = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2} \right)^2$ Podľa IP: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots k^3 + (k+1)^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2} \right)^2 + (k+1)^3 =$ $= (k+1)^2 \cdot [k^2/4 + k + 1] = (k+1)^2 \cdot (k^2 + 4k + 4)/4 = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2} \right)^2$ čo bolo treba dokázať																																																					

Obr.10.3: Riešenie príkladu 10.3

PRÍKLAD 10.4

- a) Dokážte, že nerovnosť $2^n > n^2$
platí pre každé $n \in \mathbb{N}$ $n \geq 5$.
- b) Dokážte, že nerovnosť $2^n > 2n + 1$
platí pre každé $n \in \mathbb{N}$ $n \geq 3$.

RIEŠENIE

vytvorenie tabuľky hodnôt postupnosti	reprezentácia na obrazovke počítača																																																																																																														
<ul style="list-style-type: none">Do stĺpca A; bunky A2 :A20 vložíme index člena postupnosti,V stĺpci B; bunky B2: B20 zaznamenáme hodnoty členov 2^n, do B2 vložíme výraz = POWER(2; A2), skopírujeme do buniek B2:B20,V stĺpci C; bunky C2:C20 vypočítame hodnoty n^2, do C2 vkladáme = A2*A2,v stĺpci D; bunky C2:C20 vypočítame hodnoty $2n+1$, vkladáme výraz = 2*A2+1	<table><tr><th></th><th>A</th><th>B</th><th>C</th><th>D</th></tr><tr><td>1</td><td>n</td><td>2^n</td><td>n^2</td><td>$2n+1$</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>4</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>4</td><td>3</td><td>8</td><td>9</td><td>7</td></tr><tr><td>5</td><td>4</td><td>16</td><td>16</td><td>9</td></tr><tr><td>6</td><td>5</td><td>32</td><td>25</td><td>11</td></tr><tr><td>7</td><td>6</td><td>64</td><td>36</td><td>13</td></tr><tr><td>8</td><td>7</td><td>128</td><td>49</td><td>15</td></tr><tr><td>9</td><td>8</td><td>256</td><td>64</td><td>17</td></tr><tr><td>10</td><td>9</td><td>512</td><td>81</td><td>19</td></tr><tr><td>11</td><td>10</td><td>1024</td><td>100</td><td>21</td></tr><tr><td>12</td><td>11</td><td>2048</td><td>121</td><td>23</td></tr><tr><td>13</td><td>12</td><td>4096</td><td>144</td><td>25</td></tr><tr><td>14</td><td>13</td><td>8192</td><td>169</td><td>27</td></tr><tr><td>15</td><td>14</td><td>16384</td><td>196</td><td>29</td></tr><tr><td>16</td><td>15</td><td>32768</td><td>225</td><td>31</td></tr><tr><td>17</td><td>16</td><td>65536</td><td>256</td><td>33</td></tr><tr><td>18</td><td>17</td><td>131072</td><td>289</td><td>35</td></tr><tr><td>19</td><td>18</td><td>262144</td><td>324</td><td>37</td></tr><tr><td>20</td><td>19</td><td>524288</td><td>361</td><td>39</td></tr><tr><td>21</td><td>20</td><td>1048576</td><td>400</td><td>41</td></tr></table>		A	B	C	D	1	n	2^n	n^2	$2n+1$	2	1	2	1	3	3	2	4	4	5	4	3	8	9	7	5	4	16	16	9	6	5	32	25	11	7	6	64	36	13	8	7	128	49	15	9	8	256	64	17	10	9	512	81	19	11	10	1024	100	21	12	11	2048	121	23	13	12	4096	144	25	14	13	8192	169	27	15	14	16384	196	29	16	15	32768	225	31	17	16	65536	256	33	18	17	131072	289	35	19	18	262144	324	37	20	19	524288	361	39	21	20	1048576	400	41
	A	B	C	D																																																																																																											
1	n	2^n	n^2	$2n+1$																																																																																																											
2	1	2	1	3																																																																																																											
3	2	4	4	5																																																																																																											
4	3	8	9	7																																																																																																											
5	4	16	16	9																																																																																																											
6	5	32	25	11																																																																																																											
7	6	64	36	13																																																																																																											
8	7	128	49	15																																																																																																											
9	8	256	64	17																																																																																																											
10	9	512	81	19																																																																																																											
11	10	1024	100	21																																																																																																											
12	11	2048	121	23																																																																																																											
13	12	4096	144	25																																																																																																											
14	13	8192	169	27																																																																																																											
15	14	16384	196	29																																																																																																											
16	15	32768	225	31																																																																																																											
17	16	65536	256	33																																																																																																											
18	17	131072	289	35																																																																																																											
19	18	262144	324	37																																																																																																											
20	19	524288	361	39																																																																																																											
21	20	1048576	400	41																																																																																																											
Dôkaz MI																																																																																																															
a) 1. nech $n=5$, potom $2^5 > 5^2$ platí lebo $32 > 25 \Rightarrow$ 2. nech platí IP; pre $n = k \Rightarrow 2^k > k^2$ 3. z platnosti IP dokážeme platnosť vzťahu pre $n = k+1$, teda $2^{k+1} > (k+1)^2$ Keďže platí: $2^k > k^2 / 2$ $2 \cdot 2^k > 2 \cdot k^2 \Rightarrow 2^{k+1} > k^2 + k^2$ $k > 5$ teda $k-1 > 4 \Rightarrow (k-1)^2 > 16 \Rightarrow k^2 > 2k + 15 > 2k + 1$ $2^{k+1} > k^2 + k^2 > k^2 + 2k + 1 > (k+1)^2$ čo sme chceli dokázať																																																																																																															
b) analogicky ako v a)																																																																																																															

Obr.10.4: Riešenie príkladu 10.4



Vyššie uvedené aktivity umožnili študentom počas vyučovacej hodiny aktívnejšie a tvorivejšie pracovať. Rutinný a často mechanický postup pri tejto dôkazovej metóde bol obohatený o prácu s tabuľkovým procesorom Excel.