

## 17 Limita funkcie



### Metodický zámer

Pojem limity funkcie, s ktorým sa študenti stretávajú vo 4. ročníku gymnázia je pojmom náročným a jeho správne pochopenie je výborným odrazovým mostíkom pre ďalšie dôležité termíny ako spojitosť a diferencovateľnosť funkcie. Najväčším problémom býva pre študentov pochopenie samotnej definície, ktorá obsahuje parametre  $\varepsilon$  a  $\delta$ . Tabuľkový procesor Excel a vhodne zvolené aktivity, ktoré v tejto kapitole navrhujeme umožní študentom na numerickom modeli sledovať dynamický proces limitného prechodu; približovania sa funkčných hodnôt funkcie  $f(x)$  v okolí pevne zvoleného bodu k istej hodnote. Keďže pojmom limita funkcie  $f$  chceme vyjadriť správanie sa funkcie v „bezprostrednej blízkosti nejakého bodu  $a$ “.

Slovo limita je odvodené od latinského slova limes, čo v preklade do slovenčiny znamená hranica alebo medza. Limita je v matematike hodnota, ku ktorej sa „približuje“ nezávislá premenná funkcie. Limita funkcie sa používa na opis správania sa funkcie, keď sa jej argument „približuje“ k nejakému bodu, alebo k nekonečnu.



### Čo by mal študent vedieť - stručný sylabus

- |  |  |
|--|--|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>Nech <math>f</math> je funkcie a <math>c</math> je hromadným bodom jej definičného oboru (teda v každom prstencovom okolí bodu <math>c</math> sa nachádza aspoň jeden bod definičného oboru funkcie <math>f</math>).</li> <li>Nech <math>L</math> je reálne číslo. Potom zápis: <math>\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L</math> znamená, že pre každé <math>\varepsilon &gt; 0</math> existuje <math>\delta &gt; 0</math> také, že pre všetky <math>x</math>; <math> x - c  &lt; \delta</math> platí, že <math> f(x) - L  &lt; \varepsilon</math></li> <li>Funkcia <math>y=f(x)</math> má v bode <math>c</math> <u>najviac jednu limitu</u></li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Pre každé <math>c \in \mathbb{R}</math> platí: <math>\lim_{x \rightarrow c} x = c</math>; <math>\lim_{x \rightarrow c} a = a</math>;<br/>Nech <math>\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L_1</math> a <math>\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L_2</math>; <math>L_1, L_2 \in \mathbb{R}</math></li> <li>Funkcia <math>f+g</math> má limitu v bode <math>c</math>, pričom platí: <math>\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = L_1 + L_2</math></li> <li>Funkcia <math>f \cdot g</math> má limitu v bode <math>c</math>, pričom platí: <math>\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x)) = L_1 \cdot L_2</math></li> <li>Funkcia <math>af</math> má limitu v bode <math>c</math>, pričom platí: <math>\lim_{x \rightarrow c} (af(x)) = aL_1</math></li> <li>Funkcia <math>f/g</math> má limitu v bode <math>c</math>, pričom platí: <math>\lim_{x \rightarrow c} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{L_1}{L_2}</math></li> </ul> |
|--|--|

### AKTIVITA 17.1

Vyšetrite pomocou MS Excelu ako sa menia funkčné hodnoty funkcie a)

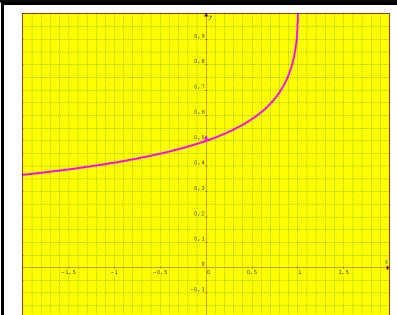
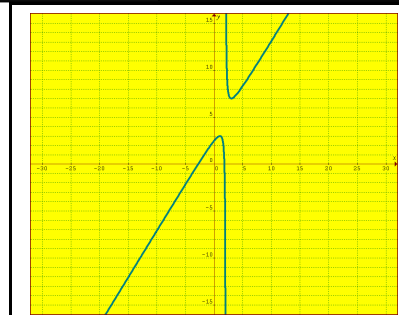
$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} \text{ v okolí bodu } x_0 = 0;$$

$$b) f(x) = \frac{(x^2 + x - 5)}{(x - 2)} \text{ v okolí bodu } x_0 = 1$$



Za nezávislé premenné  $x$  budeme postupne dosadzovať čísla, ktoré sa len veľmi málo líšia od zvolených hodnôt  $x_0$ . Využijeme na to funkciu Rady z menu Excelu. Generujeme dostatočne blízke okolia bodov  $x_0 = 0$  a  $x_0 = 1$ . Vytvoríme tabuľky príslušných funkčných hodnôt.

Následne vedieme heuristickú besedu o získaných výsledkoch. Študenti registrujú, že kým v prípade b) hodnota funkcie v bode  $x_0=1$  existuje  $f(1)=3$  (funkcia je v tomto bode definovaná), prípad a) predstavuje funkciu, ktorá v bode  $x_0=0$  nie je definovaná, napriek tomu existuje limita funkcie  $f(x_0)$ . Programom Graphmatica môžeme získať graf funkcie a diskutovať o jej ďalších vlastnostiach.

a)	<table><tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr><tr><td>0,45</td><td>0,574178</td></tr><tr><td>0,4</td><td>0,563508</td></tr><tr><td>0,35</td><td>0,553641</td></tr><tr><td>0,3</td><td>0,544467</td></tr><tr><td>0,25</td><td>0,535898</td></tr><tr><td>0,2</td><td>0,527864</td></tr><tr><td>0,15</td><td>0,520304</td></tr><tr><td>0,1</td><td>0,513167</td></tr><tr><td>0,05</td><td>0,506411</td></tr><tr><td>0</td><td>#DIV/0!</td></tr><tr><td>-0,05</td><td>0,493902</td></tr><tr><td>-0,1</td><td>0,488088</td></tr><tr><td>-0,15</td><td>0,482537</td></tr><tr><td>-0,2</td><td>0,477226</td></tr><tr><td>-0,25</td><td>0,472136</td></tr><tr><td>-0,3</td><td>0,467251</td></tr><tr><td>-0,35</td><td>0,462557</td></tr><tr><td>-0,4</td><td>0,45804</td></tr><tr><td>-0,45</td><td>0,453688</td></tr></table>	x	f(x)	0,45	0,574178	0,4	0,563508	0,35	0,553641	0,3	0,544467	0,25	0,535898	0,2	0,527864	0,15	0,520304	0,1	0,513167	0,05	0,506411	0	#DIV/0!	-0,05	0,493902	-0,1	0,488088	-0,15	0,482537	-0,2	0,477226	-0,25	0,472136	-0,3	0,467251	-0,35	0,462557	-0,4	0,45804	-0,45	0,453688	b)	<table><tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr><tr><td>0,6</td><td>2,885714</td></tr><tr><td>0,65</td><td>2,909259</td></tr><tr><td>0,7</td><td>2,930769</td></tr><tr><td>0,75</td><td>2,95</td></tr><tr><td>0,8</td><td>2,966667</td></tr><tr><td>0,85</td><td>2,980435</td></tr><tr><td>0,9</td><td>2,990909</td></tr><tr><td>0,95</td><td>2,997619</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>1,05</td><td>2,997368</td></tr><tr><td>1,1</td><td>2,988889</td></tr><tr><td>1,15</td><td>2,973529</td></tr><tr><td>1,2</td><td>2,95</td></tr><tr><td>1,25</td><td>2,916667</td></tr><tr><td>1,3</td><td>2,871429</td></tr><tr><td>1,35</td><td>2,811538</td></tr><tr><td>1,4</td><td>2,733333</td></tr><tr><td>1,45</td><td>2,631818</td></tr><tr><td>1,5</td><td>2,5</td></tr></table>	x	f(x)	0,6	2,885714	0,65	2,909259	0,7	2,930769	0,75	2,95	0,8	2,966667	0,85	2,980435	0,9	2,990909	0,95	2,997619	1	3	1,05	2,997368	1,1	2,988889	1,15	2,973529	1,2	2,95	1,25	2,916667	1,3	2,871429	1,35	2,811538	1,4	2,733333	1,45	2,631818	1,5	2,5
x	f(x)																																																																																		
0,45	0,574178																																																																																		
0,4	0,563508																																																																																		
0,35	0,553641																																																																																		
0,3	0,544467																																																																																		
0,25	0,535898																																																																																		
0,2	0,527864																																																																																		
0,15	0,520304																																																																																		
0,1	0,513167																																																																																		
0,05	0,506411																																																																																		
0	#DIV/0!																																																																																		
-0,05	0,493902																																																																																		
-0,1	0,488088																																																																																		
-0,15	0,482537																																																																																		
-0,2	0,477226																																																																																		
-0,25	0,472136																																																																																		
-0,3	0,467251																																																																																		
-0,35	0,462557																																																																																		
-0,4	0,45804																																																																																		
-0,45	0,453688																																																																																		
x	f(x)																																																																																		
0,6	2,885714																																																																																		
0,65	2,909259																																																																																		
0,7	2,930769																																																																																		
0,75	2,95																																																																																		
0,8	2,966667																																																																																		
0,85	2,980435																																																																																		
0,9	2,990909																																																																																		
0,95	2,997619																																																																																		
1	3																																																																																		
1,05	2,997368																																																																																		
1,1	2,988889																																																																																		
1,15	2,973529																																																																																		
1,2	2,95																																																																																		
1,25	2,916667																																																																																		
1,3	2,871429																																																																																		
1,35	2,811538																																																																																		
1,4	2,733333																																																																																		
1,45	2,631818																																																																																		
1,5	2,5																																																																																		
																																																																																			
<p>• <b>Záver:</b> Ak sa x približuje k 0 potom f(x) sa približuje k <b>0,5</b>. Môžeme napísať: <math>\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0,5</math></p>		<p>• <b>Záver:</b> Ak sa x približuje k 1 potom f(x) sa približuje k <b>3</b>. <b>Tiež platí:</b> <b>f(1) = 3</b>. Môžeme napísať: <math>\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3</math></p>																																																																																	

Obr.17.1: Numerický a grafický model limity funkcií

## AKTIVITA 17.2

Majme funkciu  $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ . Zistite ako sa správajú funkčné hodnoty, ak premenná  $x$  neobmedzene rastie. Určte  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ !



Limitu funkcie môžeme rozšíriť z prípadov približovania sa k reálnemu číslu (limita vo vlastnom bode) na približovanie sa k nekonečnu. Toto približovanie sa k nekonečnu znamená, že  $x$  je stále „väčšie a väčšie“ (približuje sa ku kladnému nekonečnu), alebo je stále „menšie a menšie“ (približovanie sa k zápornému nekonečnu). Registrujeme veľké nedostatky v porozumení zápisu  $x \square \square$ , ktoré môžeme čiastočne eliminovať ak študentov zapojíme do aktivity s cieľom skúmania takýchto prípadov prostredníctvom Excelu.

- Do bunky A1 vložíme hodnotu 1;
- Do A2 vložíme  $=A1*10$ ;
- Prekopírujeme do A3 až A30
- Do B1 vložíme  $=2*A1/(A1+1)$
- Prekopírujeme do B2 až B30

### Záver:

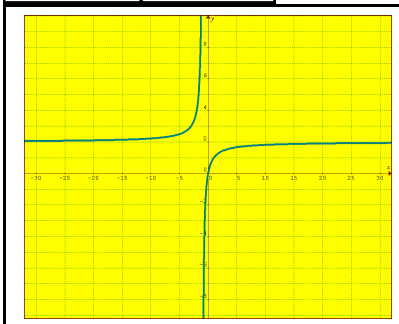
Ako numerický tak aj grafický model potvrdzujú, že postupne ako zväčšujeme  $x$  (alebo aj znižujeme) sa hodnota  $f(x)$  približuje k 2 a dá sa priblížiť ľubovoľne blízko k 2 pri dostatočne veľkom  $x$ .

Limita funkcie pre  $x$  blížiac sa k nekonečnu je teda 2.

Zapíšeme:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x+1} = 2$$

$x$	$f(x)$
1	1
10	1,818182
100	1,980198
1000	1,998002
10000	1,9998
100000	1,99998
1000000	1,999998
10000000	2
1E+08	2
1E+09	2
1E+10	2
1E+11	2
1E+12	2
1E+13	2



Obr.17.2: Limita funkcie v nevlastnom bode

## AKTIVITA 17.3

Program Graphmatica nám umožní priblížiť pojem limity funkcie prostredníctvom jej geometrickej interpretácie. Pre študentov je najťažšie pochopiť samotnú definíciu obsahujúcu parametre  $\varepsilon$  a  $\delta$ . Osvetliť význam týchto parametrov môžeme formulovaním nasledujúcej úlohy:

a) Je daná funkcia  $y = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 2}$ . Dokážte, že limita tejto funkcie pre  $x_0 = 0$  sa rovná  $L =$

$-1,5$ . Zvoľte ľubovoľne malé  $\varepsilon > 0$  a zostrojte rovnobežky  $y = L - \varepsilon$  a  $y = L + \varepsilon$ . Dokážte, že vždy môžeme nájsť také  $\delta > 0$ , že pre každé  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  funkčné hodnoty  $f(x)$  ležia vo vnútri pásu určeného rovnobežkami  $y = L - \varepsilon$  a  $y = L + \varepsilon$ .

b) Analogicky riešte úlohu pre funkciu:  $y = x^3 + x^2 - 2x + 1$ . Dokážte, že limita tejto funkcie v bode  $x_0 = 0$  je  $L = 1$



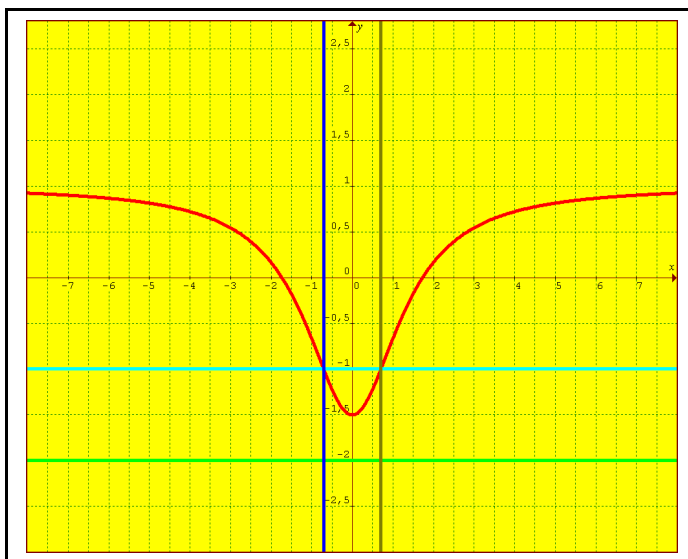
a) Študenti najskôr zostroja graf funkcie  $y = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 2}$ . Limitu v bode  $x_0 = 0$  môžu veľmi jednoducho vypočítať dosadením. Následne si zvolia konkrétne ľubovoľne malé  $\varepsilon$ . Povedzme nech  $\varepsilon = 0,5$ . Pre takto zvolené  $\varepsilon$  dostaneme rovnobežky  $y = -2,0$  a  $y = 1,0$ . Tento pás tvorí  $\varepsilon$  - okolie bodu  $A = [0; -1,5]$ . Treba už len ukázať, že existuje príslušné  $\delta$  - okolie bodu  $x_0 = 0$  tak, že pre každé  $x \in (0 - \delta, 0 + \delta)$  funkčné hodnoty  $f(x)$  ležia vo vnútri pásu určeného rovnobežkami  $y = -2$  a  $y = -1$ .

Program Graphmatica vyhľadá a vypíše hodnoty priesečníkov priamok  $y = -2$  a  $y = -1$

s grafom funkcie  $y = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 2}$ . Ide o body  $[-0,7071; -1]$  a  $[0,7071; -1]$ . Je teda možné

voliť  $\delta = 0,7$ . Demonstrujeme tak na konkrétnom modeli, že pre akékoľvek  $\varepsilon$  - okolie bodu  $A = [0; -1,5]$  existuje vhodné  $\delta$  - okolie bodu  $x_0 = 0$  spĺňajúce podmienky definície.

b) V tomto prípade je možné opäť voliť  $\varepsilon = 0,5$ . Program Graphmatica vyhľadá a vypíše hodnoty priesečníkov priamok  $y = 1,5$  a  $y = 0,5$  s grafom funkcie  $y = x^3 + x^2 - 2x + 1$ . Sú to body  $x = -0,2$ ;  $x = 0,3$ . Ako  $\delta$  - okolie volíme preto  $\delta = \min\{\delta_1; \delta_2\}$ , teda  $\delta = 0,2$



Obr.17.3: Limita funkcie  $y = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 2}$ .



Obr.17.4: Limita funkcie  $y=x^3+x^2-2x+1$

#### AKTIVITA 17.4

Grafy funkcií, ktoré získame vďaka programu Graphmatica môžu slúžiť pri stanovení rôznych hypotéz týkajúcich sa limit funkcií. V rámci stredoškolského učiva sa preberajú predovšetkým limity racionálnych lomených funkcií v hromadnom bode  $x_0$ . Je preto vhodné, aby študenti samostatne aktívnou činnosťou za pomoci počítača dospeli

k potrebným záverom o limitách funkcií typu  $y = \frac{P_1(x)}{P_2(x)}$  pre  $x_0$  alebo  $x_0 - 0$ . Umožní

im to práve nižšie uvádzaná aktivita.

Zostrojte postupne grafy funkcií::

$$a) y = \frac{5x^3 + 2x - 3}{2x^3 - 2}; \quad b) y = \frac{x - 3}{x^4 - x^2 + 1}; \quad c) y = \frac{x^5 + x - 5}{x - 2}$$

Zovšeobecnite výsledky pozorovaní a vyslovte hypotézy:

Limita racionálnej lomenej funkcie pre  $x_0$  alebo  $x_0 - 0$ , ktorej stupeň polynómu v čitateli je rovný stupňu polynómu v menovateli má **vlastnú limitu rôznu od nuly**.

Limita racionálnej lomenej funkcie pre  $x_0$  alebo  $x_0 - 0$ , ktorej stupeň polynómu v čitateli je menší ako stupeň polynómu v menovateli má **vlastnú limitu rovnú nule**.

Ak stupeň polynómu v čitateli je väčší ako stupeň polynómu v menovateli funkcia má **nevlastnú limitu rovnú  $\infty$  alebo  $-\infty$** .

Poznámka: Ak sa študentom nedarí vysloviť všeobecné tvrdenie vyzveme ich k viacnásobnej konkretizácii jednotlivých prípadov. Počítačovým program získajú promptne viaceré grafy, pozorovaním a porovnávaním podstatných znakov ľahko dospejú k výsledkom.



Obr. 17.5: Limity racionálních lomených funkcí