

$$S_k = a_1 \cdot \frac{q^k - 1}{q - 1}$$

15 Aritmetická a geometrická postupnosť



Metodický zámer

Cieľom ďalších popisovaných aktivít je dosiahnuť, aby študenti vedeli identifikovať medzi inými postupnosťami aritmetickú a geometrickú postupnosť, dokázali na základe hodnôt a_1 a d (alebo a_1 a q) posúdiť monotónnosť týchto postupností, určovať súčty konečného počtu členov aritmetickej alebo geometrickej postupnosti, riešiť aplikačné a slovné úlohy z tejto oblasti. Excel znova umožní študentom objavovať nové pojmy v procese činnosti, manipulovať s nimi, byť aktívnymi tvorcami svojho poznania.

Naším cieľom je ponúknuť netradičné, zaujímavé a pritom efektívne zadania inak stereotypných úloh, ktoré nielen oživia proces vyučovania, ale vnesú doň prvky novosti spestria monotónne precvičovanie a pomôžu fixácii poznatkov inovatívnym spôsobom.



Čo by mal študent vedieť - stručný sylabus

Aritmetická postupnosť

- Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazývame aritmetickou vtedy a len vtedy, ak existuje také $d \in \mathbb{R}$, že $\forall n \in \mathbb{N}$ platí: $a_{n+1} = a_n + d$. Číslo d nazveme diferenciou postupnosti je konštantné.
- Každý výraz takejto postupnosti počínajúc od druhého získame pripočítaním čísla d k predchádzajúcemu výrazu
- Pre aritmetickú postupnosť platia vzťahy:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$
- Číslo S_n nazývame čiasočným súčtom (konečného počtu n členov) aritmetickej postupnosti a postupnosť čiasočných súčtov $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ nekonečným čiaselným radom.

Geometrická postupnosť.

- Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, v ktorej platí: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \text{konst}$ (podiel susedných členov je konštantný) sa nazýva geometrická postupnosť.
Číslo $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, ktoré závisí od n a charakterizuje danú postupnosť sa nazýva kvocient geometrickej postupnosti a označuje sa q .
- V geometrickej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ s kvocientom q platí: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

- Súčet prvých k členov geometrickej postupnosti s kvocientom q je

$$S_k = a_1 \cdot \frac{q^k - 1}{q - 1}$$



Riešené príklady

PRÍKLAD 15.1

Postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú dané analyticky predpismi:

$a_n = 3n/(n+2)$; $b_n = n^2 + 3$; $c_n = 3 - n/3$. Skúmajte, ktoré z postupností sú postupnosťami aritmetickými, určite prvý člen a diferenciu postupností.

RIEŠENIE

Využijeme opäť konštrukciu tabuľky prostredníctvom MS Excelu. Aby sme potvrdili, že daná postupnosť je aritmetická treba overiť, že rozdiel n -tého člena a predchádzajúceho ($n-1$)-ho člena postupnosti je konštantný pre $\forall n > 1$.

n	a_n	$a_{n+1}-a_n$	b_n	$b_{n+1}-b_n$	c_n	$c_{n+1}-c_n$
1	1	0,5	4	3	2,666667	-0,333333
2	1,5	0,3	7	5	2,333333	-0,333333
3	1,8	0,2	12	7	2	-0,333333
4	2	0,142857	19	9	1,666667	-0,333333
5	2,142857	0,107143	28	11	1,333333	-0,333333
6	2,25	0,083333	39	13	1	-0,333333
7	2,333333	0,066667	52	15	0,666667	-0,333333
8	2,4	0,054545	67	17	0,333333	-0,333333
9	2,454545	0,045455	84	19	0	-0,333333
10	2,5	0,038462	103	21	-0,333333	-0,333333
11	2,538462	0,032967	124	23	-0,666667	-0,333333
12	2,571429	0,028571	147	25	-1	-0,333333
13	2,6	0,025	172	27	-1,333333	-0,333333
14	2,625	0,022059	199	29	-1,666667	-0,333333
15	2,647059	0,019608	228	31	-2	-0,333333
16	2,666667	0,017544	259	33	-2,333333	-0,333333
17	2,684211	0,015789	292	35	-2,666667	-0,333333

Konštrukci

a tabuľky:

- Do A2-A20 vložíme hodnotu n (využijeme položku Řady a kopírovanie)
- Do B2: = 3*A2/(A2+2); prekopírujeme do B3 – B20.
- Do C2: = B3 - B2; prekopírujeme do C3 – C20.
- Do D2: = A2*A2+3; prekopírujeme do D3 – D20.
- Do E2: = D3-D2; prekopírujeme do E3 – E20.

- Do F2: = 3 – A2/3; prekopírujeme do F3 – F20.
- Do G2: = F3 – F2; prekopírujeme do G3 – G20.

Záver:

Z analýzy tabuľky vyplýva, že iba **postupnosť c_n je aritmetickou postupnosťou** (spĺňa podmienku: rozdiel každých jej dvoch susedných členov je konštantný); **postupnosti a_n a b_n toto nespĺňajú.**

Obr.15.1: Numerický model riešenia príkladu 15.1

PRÍKLAD 15.2

V období medzi 1. marcom a 31. marcom vychádza slnko každý nasledujúci deň asi o 1,6 minúty skôr ako v predchádzajúci deň.

O koľkej hodine vyjde slnko 18. marca, ak 1.marca vyšlo o 6 hodine aj 33 minúte? Ktorý deň vyjde slnko o 5⁵⁶?

RIEŠENIE

Aplikačný príklad na výpočet 18. člena aritmetickej postupnosti, ktorej diferenciacia je $d = -1,6$. Následne treba určiť, pre aké n je hodnota člena postupnosti $a_n = 556$? Pri tvorbe tabuľky študenti veľmi dobre vnímajú pojmy súvisiace s danou tematikou. Pri vytváraní numerických modelov sú nútení zadaniu skutočne porozumieť. Algoritmické postupy od nich vyžadujú neformálne zvládnutie učiva. Bunky tabuľky musia byť nastavené na formát dátum a čas.

<ul style="list-style-type: none"> • Do bunky A2 – A30 zadáme formát typu „dátum“ a do buniek B2-B30 formát typu „čas“. • Výpočty sa realizovali pomocou formúl: • Do bunky A2 vložíme údaj: 1. mar; • Do bunky C2 vložíme: 00:01:36; • V bunke A3 = A2 +1, • V bunke B3 = B2-\$C\$2; • Následne skopírujeme do nižšie položených buniek v stĺpcoch A, B. Získame tabuľku, ktorá posluží na odčítanie výsledkov. <p>Záver: Z tabuľky sa dozvedáme, že 18. marca vyjde slnko o 6⁰⁵ hodine, kým o 5⁵³ slnko vyjde 26.3.2006.</p>	datum	čas	diferencia
	1.3.06	6:33:00	0:01:36
	2.3.06	6:31:24	
	3.3.06	6:29:48	
	4.3.06	6:28:12	
	5.3.06	6:26:36	
	6.3.06	6:25:00	
	7.3.06	6:23:24	
	8.3.06	6:21:48	
	15.3.06	6:10:36	
	16.3.06	6:09:00	
	17.3.06	6:07:24	
	18.3.06	6:05:48	
	19.3.06	6:04:12	
	20.3.06	6:02:36	
	21.3.06	6:01:00	
	22.3.06	5:59:24	
	23.3.06	5:57:48	
	24.3.06	5:56:12	
	25.3.06	5:54:36	
	26.3.06	5:53:00	
	27.3.06	5:51:24	

Obr.15.2: Numerický model riešenia príkladu 15.2

PRÍKLAD 15.3

V roku 1970 bol prírastok obyvateľov v istom meste 5200 osôb. Počnúc nasledujúcim rokom sa prírastok obyvateľov zmenšoval každoročne o 15 osôb. Aký je celkový prírastok obyvateľov mesta za obdobie rokov 1970 -1989?

RIEŠENIE

Slovná úloha na súčet konečného počtu členov aritmetickej postupnosti, ktorej diferenciacia je $d = -15$. Hľadáme súčet 20 členov tejto postupnosti. Opäť využijeme tabuľkový procesor s funkciou výpočtu sumy; (naudávame celú tabuľku len jej časť)

- Do buniek A2 – A21 vložíme príslušný rok,
- Do bunky B2 vložíme údaj 5200,
- Následne do B3: = B2 – 15, skopírujeme do B4-B21
- Do B22: = SUMA(B2:B21).

Záver: Výsledky vyčítame priamo z tabuľky. Celkový prírastok obyvateľstva za skúmané obdobie bol 101150. Overíme tiež analytickým výpočtom pomocou vzorca pre súčet n členov aritmetickej postupnosti.

rok	prírastok obyvateľov
1970	5200
1971	5185
1972	5170
1973	5155
1974	5140
1975	5125
1984	4990
1985	4975
1986	4960
1987	4945
1988	4930
1989	4915
1990	Suma 101150

Tab.15.1: Súčet k členov aritmetickej postupnosti

PRÍKLAD 15.4

Postupnosti, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú dané analyticky:

$$a_n = 2^n; \quad b_n = \frac{1}{(n+1)(n+3)}, \quad c_n = (-1/3)^n, \quad d_n = n^3$$

Zistite, ktoré z postupností sú postupnosťami geometrickými, určite prvý člen a kvocient postupnosti.

RIEŠENIE

Postupujeme analogicky ako v príklade 1 tejto kapitoly. Zostavíme tabuľku postupností, testujeme podiel dvoch susedných členov a všimame si, či je konštantný. Získavame nasledujúcu tabuľku:

n	a_n	a_{n+1}/a_n	b_n	b_{n+1}/b_n	c_n	c_{n+1}/c_n	d_n	d_{n+1}/d_n
1	2	2	0,166667	0,5	-0,333333	-0,333333	1	8
2	4	2	0,0833333	0,6	0,111111	-0,333333	8	3,375
3	8	2	0,05	0,666667	-0,03704	-0,333333	27	2,37037
4	16	2	0,0333333	0,714286	0,012346	-0,333333	64	1,953125
5	32	2	0,02381	0,75	-0,00412	-0,333333	125	1,728
6	64	2	0,017857	0,777778	0,001372	-0,333333	216	1,587963
7	128	2	0,013889	0,8	-0,00046	-0,333333	343	1,492711
8	256	2	0,0111111	0,818182	0,000152	-0,333333	512	1,423828
9	512	2	0,009091	0,833333	-5,1E-05	-0,333333	729	1,371742
10	1024	2	0,007576	0,846154	1,69E-05	-0,333333	1000	1,331
11	2048	2	0,00641	0,857143	-5,6E-06	-0,333333	1331	1,298272
12	4096	2	0,005495	0,866667	1,88E-06	-0,333333	1728	1,271412
13	8192	2	0,004762	0,875	-6,3E-07	-0,333333	2197	1,248976
14	16384	2	0,004167	0,882353	2,09E-07	-0,333333	2744	1,229956
15	32768	2	0,003676	0,888889	-7E-08	-0,333333	3375	1,21363
16	65536	2	0,003268	0,894737	2,32E-08	-0,333333	4096	1,199463
17	131072	2	0,002924	0,9	-7,7E-09	-0,333333	4913	1,187055
18	262144	2	0,002632	0,904762	2,58E-09	0	5832	1,176097

Tab. 15.2: Testovanie geometrickej postupnosti

Závery:

Podiel susedných členov postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konštantný, sú teda geometrickými postupnosťami.

PRÍKLAD 15.5

Šofér pustil plynový pedál a následne po 15-tich sekundách začal brzdiť. Počas každej z tých 15 sekúnd prešiel vždy 0,9 z dráhy prejdenej v predchádzajúcej sekunde. Za prvú sekundu prešlo auto dráhu 30m. Koľko metrov prejde auto za uvedených 15 sekúnd?

RIEŠENIE

Úlohu riešime pomocou vzorca a tiež numericky s podporou MS Excelu.

<ul style="list-style-type: none"> • Je to úloha na výpočet súčtu k členov geometrickej postupnosti. Prvý člen postupnosti $a_1=30$, nasledujúci člen je $0,9$-násobkom predchádzajúceho. • Zapišeme do bunky B3 v tvare; B3 = $0,9*B2$ a skopírujeme do B4 – B16; • následne sčítame prvky B2-B16 v stĺpci B (použijeme funkciu SUMA). Výsledky získame z tabuľky. <p>Záver: Auto prejde za 15 sekúnd dráhu 238,23 metra.</p>	počet sekúnd	prejdená dráha (m)
	1	30
	2	27
	3	24,300000
	4	21,870000
	5	19,683000
	6	17,714700
	7	15,943230
	8	14,348910
	9	12,914020
	10	11,622610
	11	10,460350
	12	9,414318
	13	8,472886
	14	7,625597
	15	6,863038
	Súčet dráh	238,23m

Obr.15.3: Riešenie príkladu 15.5 pomocou MS Excelu

PRÍKLAD 15.6

Vklad v jednej banke je úročený *šiestimi percentami ročne*, v druhej *4,5% ročne*. Zistite, čo prinesie väčší zisk; vložiť *15 000Sk* do prvej banky, alebo *20000Sk* do druhej banky, ak predpokladáme, že úroky sa nezmenia a peniaze budeme potrebovať za *6 rokov*? Po akom čase budú mať oba kapitály približne rovnakú hodnotu? Aký dlhý čas treba pri prvom úročení a aký pri druhom úročení, aby sa kapitál zdvojnásobil? Platí to obecné?

RIEŠENIE

Geometrické postupnosti majú veľké využitie v poistnej a finančnej matematike. Úlohy tohto typu sú inšpirujúce a dokážu u žiakov prebudiť záujem o danú problematiku. Možnosť modifikovať problém, skúmať jeho ďalšie alternatívy vďaka Excelu je tiež veľkým prínosom. Bez využitia vhodného softvéru by riešenie takýchto úloh bolo zdĺhavé a stereotypné. Pri vytváraní potrebnej tabuľky študentmi máme zaručené, že problematike skutočne porozumeli.

V tabuľke postupne generujeme jednotlivé členy postupnosti. Používame vzťah pre vyjadrenie zisku K_n po n - rokoch sporenia, pri počiatočnom vklade P (Sk) a miere úročenia $p\%$: $K_n = P \cdot (1+p/100)^n$.

Záver:

Získali sme tabuľku hodnôt, v ktorej šedá farba označuje stav financií po šiestich rokoch. **Oba kapitály budú mať približne rovnakú hodnotu po dvadsiatich rokoch.**

Pri úročení 6% sa kapitál zdvojnásobí za 12 rokov (pri konštantných podmienkach) a pri úročení 4,5% to bude trvať 16 rokov. Toto platí pre akúkoľvek sumu.

1	15000	20000
2	15900	20900

3	16854	21840,5
4	17865,24	22823,32
5	18937,15	23850,37
6	20073,38	24923,64
7	21277,79	26045,20
8	22554,45	27217,24
9	23907,72	28442,01
10	25342,18	29721,90
11	26862,72	31059,39
12	28474,48	32457,06
13	30182,95	33917,63
14	31993,92	35443,92
15	33913,56	37038,90
16	35948,37	38705,65
17	38105,28	40447,40
18	40391,59	42267,54
19	42815,09	44169,58
20	45383,99	46157,21
21	48107,23	48234,56

Tab.15.4: Úročenie kapitálu