

19 Určitý integrál



Metodický zámer

Neúspešnosť študentov pri výpočte niektorých určitých integrálov často súvisí s príliš rýchlou algoritmizáciou problému ich výpočtu, malým počtom riešených príkladov s dôrazom na výpočet určitého integrálu ako obsahu plochy pod grafom danej podintegrálnej funkcie $f(x)$, (ako obsahu elementárnej oblasti).

Pri preberaní určitých integrálov sme sa preto zamerali na dôslednejšiu vizualizáciu problému, vytvorenie numerického modelu prostredníctvom tabuľkového procesora MS Excelu a následný výpočet približnou metódou, ktorá veľmi vhodne podporuje a posilňuje schopnosť vnímať určitý integrál ako obsah plochy nachádzajúcej sa pod grafom funkcie $f(x)$.

U študentov chceme predovšetkým dosiahnuť: uvedomenie si rozdielu medzi neurčitým a určitým integrálom; (neurčitý integrál je funkcia, určitý je číslo). Získanie predmetnej predstavy určitého integrálu ako obsahu plochy pod grafom podintegrálnej funkcie, vnímanie geometrického významu určitého integrálu; výpočet obsahu elementárnej oblasti $S(E)$, ktorá je daná ako množina: $E = \{[x, y]; a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$.



Čo by mal študent vedieť - stručný sylabus

Newtonova- Leibnizova veta:

Ak je $f(x)$ spojitá funkcia na $\langle a; b \rangle$ a nech F je jej primitívna funkcia, tak platí:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Táto veta umožňuje veľmi jednoduchý výpočet určitého integrálu spojitých funkcií, ku ktorým poznáme primitívne funkcie.



Riešené príklady

Na praktickom cvičení v počítačovej učebni, ktoré nasleduje po vyučovacej hodine zameranej na prezentáciu pojmu určitého integrálu, jeho definovanie a výpočet analytickou metódou, sme zadáme študentom takúto úlohu:

Príklad 19.1

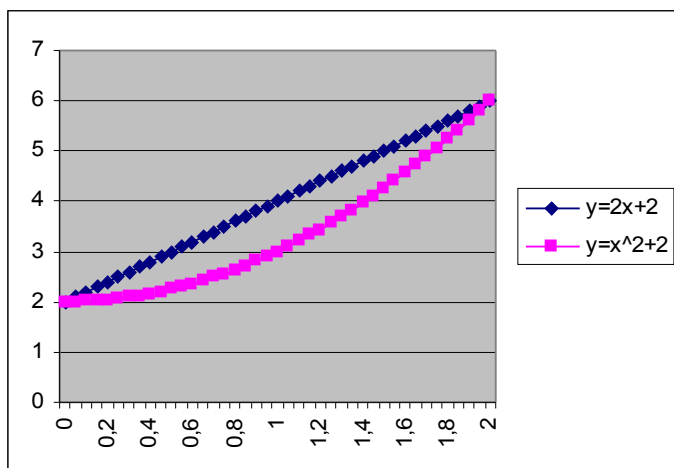
Vypočítajte obsah plochy ohraničenej priamkami $y = 2x+2$, $x=0$, $x=2$, a parabolou $y = x^2+2$.

RIEŠENIE



Po zadaní úlohy nasleduje diskusia so študentmi o postupe riešenie: zaujíma nás aký je obsah plochy, ktorú získame ako rozdiel obsahu plochy pod grafom funkcie priamky $y = 2x + 2$ a obsahu plochy pod grafom funkcie $y = x^2 + 2$ (Obr. 19.1). Pri výpočte obsahu plochy pod grafom priamky (to isté sa vzťahuje aj na obsah plochy pod kvadratickou funkciou) postupujeme tak, že ho rozdelíme na malé obdĺžniky, vypočítame ich obsahy, využijeme funkciu SUMA() a získame hľadaný obsah. Riešime problém predimenzovania obsahu parciálneho obdĺžnika (v prípade, že by sme na podintervale použili maximálnu funkčnú hodnotu y_i) alebo jeho poddimenzovania. Za vhodné sa preto zdá prijať pre výpočet obsahu i -teho obdĺžnička priemer hodnôt y_i a y_{i+1} , platí teda:

$$P_i = ((y_i + y_{i+1})/2)(x_{i+1} - x_i)$$



Obr. 19.1: Vizualizácia úlohy v MS Exceli

Algoritmus výpočtu:

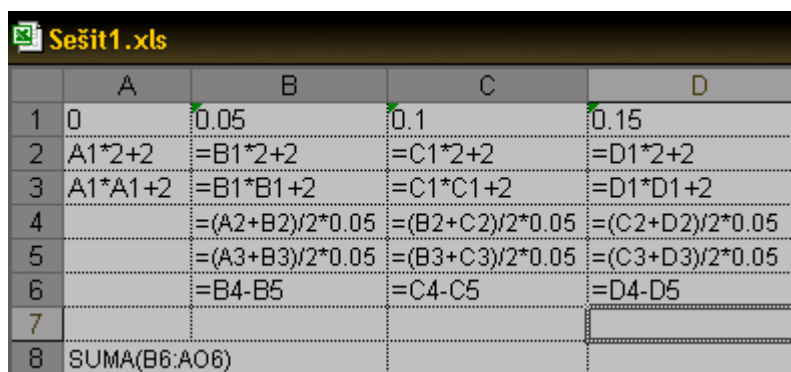
- Interval $<0,2>$ rozdelíme na podintervaly (každý o dĺžke $0,05$). Do bunky A1 nového zošitu zapíš číslo 0. Využívajúc funkciu vkladania radov, vytvoríme v prvom riadku zošita aritmetickú postupnosť s diferenciou $0,05$ a poslednou hodnotou 2 (bunka AO1).
- V druhom riadku vypočítame hodnotu funkcie $y = 2x + 2$ vo všetkých vyznačených bodoch x intervalu $<0, 2>$. Do bunky A2 zapíšeme formulu $=A1*2+2$ a prekopírujeme ju do zvyšných buniek v druhom riadku. Kopírovanie ukončíme pod bunkou AO1.
- V treťom riadku vypočítame hodnoty kvadratickej funkcie $y = x^2 + 2$ vo vyznačených bodoch intervalu $<0,2>$. Do bunky A3 zapíšeme formulu $=A1*A1+2$. Prekopírujeme ju do ostatných buniek v tomto riadku končiac bunkou AO1.
- Vo štvrtom riadku vypočítame hodnoty obsahov obdĺžnikov zodpovedajúcich priamke $y = 2x + 2$. Do bunky B4 vložíme formulu $=(A2+B2)/2*0,05$ a následne prekopírujeme do susedných buniek.
- V piatom riadku vypočítame obsahy obdĺžnikov zodpovedajúcich parabole $y = x^2 + 2$. Do bunky B5 vložíme formulu $=(A3+B3)/2*0,05$ následne prekopírujeme do susedných buniek tohto riadku.

- V šiestom riadku vypočítame rozdiely čiastkových obsahov obdĺžnikov pod priamkou a parabolou. Do bunky B6 vložíme formulu = B4 –B5.
- Urobíme sumáciu obsahov plôch. Do bunky A8 vložíme formulu =SUMA(B6:AO6).

Záver:

Výsledná približná hodnota obsahu plochy je 1,3325.

Výhodou takto vytvoreného zošita v Exceli je možnosť jeho modifikácie pre výpočet určitých integrálov ďalších funkcií, predovšetkým však takých, u ktorých je výpočet primitívnej funkcie spojený s ťažkosťami, a alebo integrál nemôžeme vyjadriť v tvare elementárnej funkcie. Pri realizácii a konštrukcii algoritmu na výpočet približnej hodnoty určitého integrálu veľmi dobre vnímajú jeho geometrický význam, čo prispieva k neformálnejšiemu nazeraniu na danú problematiku.



	A	B	C	D
1	0	0.05	0.1	0.15
2	A1*2+2	=B1*2+2	=C1*2+2	=D1*2+2
3	A1*A1+2	=B1*B1+2	=C1*C1+2	=D1*D1+2
4		=(A2+B2)/2*0.05	=(B2+C2)/2*0.05	=(C2+D2)/2*0.05
5		=(A3+B3)/2*0.05	=(B3+C3)/2*0.05	=(C3+D3)/2*0.05
6		=B4-B5	=C4-C5	=D4-D5
7				
8	SUMA(B6:AO6)			

Obr. 19.2: Zápis časti procedúry v Exceli

0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3
2	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6
2	2.0025	2.01	2.0225	2.04	2.0625	2.09
	0.1025	0.1075	0.1125	0.1175	0.1225	0.1275
	0.10006	0.10031	0.10081	0.10156	0.10256	0.10381
	3	3	3	3	3	3
	0.00243	0.00718	0.01168	0.01593	0.01993	0.02368
	8	8	8	8	8	8
Suma		1.3325				

Obr. 19.3: Časť výpočtov v MS Excel

Uvedené cvičenie poslúži aj ako spätná väzba, či kontrola správnosti výpočtov v prípadoch, keď sme si pre obtiažnosť výpočtu nie celkom istý správnosťou výsledku, alebo tiež k urýchleniu výpočtu v ďalších podobných úlohách. Študenti riešia príklady a kontrolujú svoje výsledky pomocou excelovského zošita, pričom v príslušnej tabuľke stačí vždy jednoducho modifikovať predpis funkcie, či interval, na ktorom je integrál počítaný.

PRÍKLAD 19.2

Vypočítajte obsah plochy ohraničenej grafmi funkcií $f(x) = x^3$, $g(x) = (\cos x)^2$ a osou y .

RIEŠENIE



Pri riešení úloh tohto typu je tiež vhodné zapojiť do procesu didaktický softvér EG, pričom využívame jeho schopnosti elegantne vyhľadať, označiť a vypočítať priesečníky kriviek, ktoré ohraničujú príslušnú elementárnu oblasť a následne jeho *Integrálny mod.* Pri určovaní priesečníkov grafov funkcií riešime nelineárnu rovnicu $x^3 = (\cos x)^2$, následne x-ovú súradnicu priesečníka grafov funkcií použijeme ako hornú

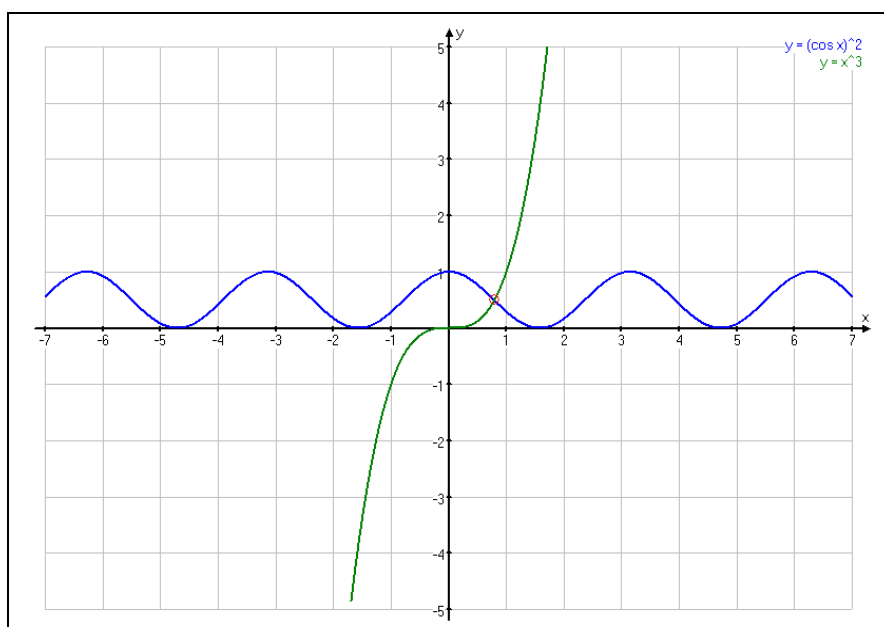
hranicu určitého integrálu: $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$

Pri použití programu EG získame nasledujúce výsledky.

$y_1 = (\cos x)^2$ and $y_2 = x^3$

Intersection: $y = 0,4945774389$ for $x = 0,7908208308$

Grafická interpretácia v EG:



Obr.19.4: Grafická interpretácia v programe EG

Obsah plochy vypočítame zo vzťahu: $S = \int_0^{0,7908} ((\cos(x))^2 - x^3) dx$



Na výpočet integrálu sme využili integrálny mód programu EG. Do combo boxu vložíme predpis funkcie, oddelíme bodkočiarkou, nasleduje špecifikácia intervalu v tvare $x_{min}; x_{max}$.

Získali tieto čiastkové výsledky:

$y = (\cos x)^2; 0; 0,7908$

Integral=0,64539
y = x^3;0;0,7908
Integral=0,09777

Obsah plochy vypočítame ako rozdiel hodnôt ***0,64539*** a ***0,09777*** ; ***S = 0,54762j²***

Vytvorenie numerického modelu pre výpočet určitého integrálu prostredníctvom tabuľkového procesora MS Excelu a následný výpočet približnou metódou veľmi vhodne podporil a posilnil schopnosť študentov vnímať určitý integrál ako obsah plochy nachádzajúcej sa pod grafom funkcie $f(x)$.

Ak na hodine zameranej na výpočet obsahov plôch pomocou určitého integrálu spolupracujeme s počítačom umožníme študentom precíznejšiu vizualizáciu plôch, ktorých obsahy počítajú ako pri vytváraní bežných náčrtkov, ktoré môžu byť pre nepresnosti často zavádzajúce. Navyše sme schopný preskúmať a riešiť viac príkladov ako pri klasickom vyučovaní