

7 Mocninové funkcie



Metodický zámer

Mocninové funkcie sú zaradené do vyučovania matematiky v 2. ročníku (sešte) gymnázia, v úzkej súvislosti s učivom o mocninách (*Výrazy s mocninami a odmocninami*), v rámci tematického celku *Funkcie, rovnice a nerovnice II*. Učivu nie je venovaný dostatočný časový priestor; predovšetkým registrujeme absenciu začlenenia tohto pojmu do globálnej poznatkovej štruktúry študenta o funkciách.

Skúsenosti u vysokoškolákov potvrdzujú, že temer žiaden z nich si pojem *Mocninové funkcie* nespája s nižšie uvedenými špeciálnymi typmi funkcií. Tento nedostatok v hierarchizácii rôznych typov funkcií navrhujeme eliminovať praktickým cvičením zameraným na zisťovanie vlastností rôznych typov mocninových funkcií, čerpajúc pritom z vizuálnych modelov, získaných programom EG. Zvláštnu pozornosť venujeme mocninovým funkciám typu $y = \sqrt{x}$ a $y = \sqrt[4]{x}$ a ich definičným oborom. Pripravíme si tak pôdu pre neformálnejšie a lepšie pochopenie problematiky iracionálnych rovníc a nerovníc, ktoré patria k najproblémovejšiemu učivu. Študent, ktorý získa dostatočnú predstavu o odmocninovej funkcii je kompetentnejší pri zvládaní zmienených tém.

Uvádzame dve aktivity, prvá je zameraná na získanie a upevnenie si prehľadu o rôznych typoch mocninových funkcií a ich vlastnostiach. Druhá bude venovaná špeciálne polynomickej funkcii.

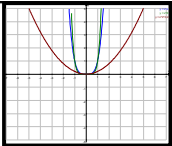
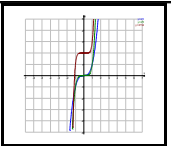
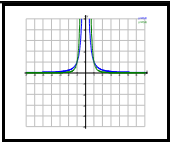
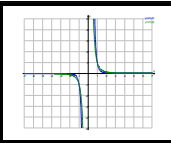
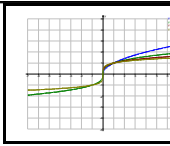


Čo by mal študent vedieť - stručný sylabus

Mocninová funkcia je každá funkcia určená predpisom $y = x^n$, kde $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Špeciálne prípady mocninovej funkcie:

- $n = -1$ nepriama úmernosť (*lineárna lomená funkcia*)
- $n = 0$ konštantná funkcia
- $n = 1$ lineárna funkcia
- $n = 2$ kvadratická funkcia
- $n = 3$ kubická funkcia
- polynomicke funkcie typu: $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$, kde $n \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{R}$

$n \in \mathbb{N}; n=2k$	$n \in \mathbb{N}; n=2k+1$	$n \in \mathbb{Z}^-; n=2k$	$n \in \mathbb{Z}^-; n=k+1$	$n \in \mathbb{Q}; n=1/k, k \in \mathbb{N}$
 <p> $D(f) = \mathbb{R}$ $H(f) = (-\infty, \infty)$ rastie na $(-\infty, 0)$ klesá na $(0, \infty)$ zdola ohraničená; ostré minimum v bode $x = 0$ párna </p>	 <p> $D(f) = \mathbb{R};$ $H(f) = \mathbb{R};$ rastúca na $D(f);$ nie je ohraničená; nemá extrém; nepárna </p>	 <p> $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ $H(f) = (-\infty, \infty)$ rastie na $(-\infty, 0)$ klesá na $(0, \infty)$ zdola ohraničená nemá extrém; párna </p>	 <p> $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ $H(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ klesá na $(-\infty, 0)$ rastie na $(0, \infty)$ nie je ohraničená; nemá extrém; nepárna </p>	 <p> $k=2m; D(f)=(0, \infty)$ $H(f)=(0, \infty),$ rastúca na $(0, \infty);$ zdola ohraničená; $k=2m+1;$ $D(f)=\mathbb{R}, H(f)=\mathbb{R},$ rastúca na $\mathbb{R},$ neohraničená, nemá extrém, nepárna </p>
<p>Polynomiccká funkcia (PF): $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$, kde $n \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{R}$ n je stupeň PF a a_k sú koeficienty PF.</p> <ul style="list-style-type: none"> PF je definovaná a spojitá na \mathbb{R}. Ak je n párne a $a_n > 0$; PF n-tého stupňa je <u>ohraničená iba zdola</u> (má globálne minimum); Ak je n párne a $a_n < 0$; PF n-tého stupňa je <u>ohraničená iba zhora</u> (má globálne maximum) Ak je n nepárne; PF n-tého stupňa <u>nie je ohraničená ani zdola ani zhora</u> <p>Pre každú PF platí: Existujú $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ také, že</p> <ol style="list-style-type: none"> na intervale (x_1, x_2) je PF ohraničená na intervaloch $(-\infty, x_1)$ a (x_2, ∞) je neohraničená a monotónna <p>Každá PF má taký úsek definičného oboru (x_1, x_2), na ktorom prebehnú všetky zmeny monotónnosti a na ktorom nadobúda všetky lokálne extrém.</p>				



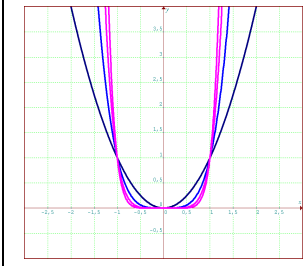
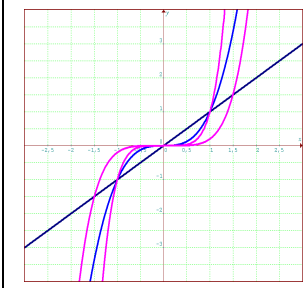
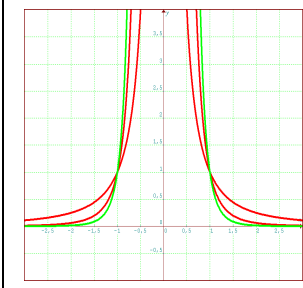
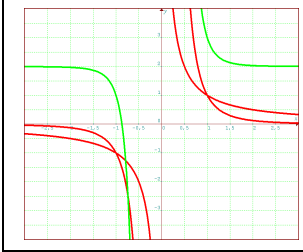
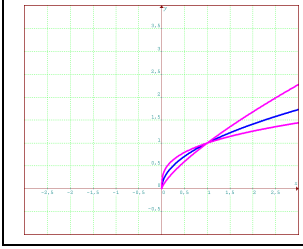
Riešené príklady

Príklad 7.1

Načrtnite grafy mocninových funkcií pre špecifickú hodnotu exponentov (prirodzený, párny prirodzený, nepárny prirodzený, celý) vždy do jedného obrázku a rozhodnite o vlastnostiach týchto mocninových funkcií:

- exponent prirodzený – párny
- exponent prirodzený nepárny
- exponent celý záporný, celý párny
- exponent celý záporný párny
- racionálny kladný exponent typu $1/(2k)$

Riešenie

<ul style="list-style-type: none"> • $y=x^2$ • $y=x^4$ • $y=x^6$ 		<ul style="list-style-type: none"> • $D(f) = \mathbb{R}; H(f) = [0, \infty)$ • Funkcia má jeden nulový bod $[0,0]$ • Funkcia klesá na $(-\infty, 0]$, rastie na $[0, \infty)$ • Všetky funkcie prechádzajú bodmi $[0,0]; [-1,1]; [1,1]$ • Funkcia je párna • Funkcia je zdola ohraničená
<ul style="list-style-type: none"> • $y=x$ • $y=x^3$ • $y=x^5$ 		<ul style="list-style-type: none"> • $D(f) = \mathbb{R}; H(f) = \mathbb{R}$ • Funkcia má jeden nulový bod $[0,0]$ • Funkcia je rastúca na celom $D(f)$, • Všetky funkcie prechádzajú bodmi $[0,0]; [-1,-1]; [1,1]$ • Funkcia je nepárna • Funkcia nie je ohraničená
<ul style="list-style-type: none"> • $y=x^{-2}$ • $y=x^{-4}$ • $y=x^{-6}$ 		<ul style="list-style-type: none"> • $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}; H(f) = (0, \infty)$ • Funkcia nemá nulový bod, • Funkcia rastie na $(-\infty, 0)$, klesá na $(0, \infty)$ • Všetky funkcie prechádzajú bodmi $[-1,1]; [1,1]$ • Funkcia je párna • Funkcia je zdola ohraničená
<ul style="list-style-type: none"> • $y=x^{-1}$ • $y=x^{-3}$ • $y=x^{-5}$ 		<ul style="list-style-type: none"> • $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}; H(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ • Funkcia nemá nulový bod • Funkcia je klesajúca na celom $D(f)$, • Všetky funkcie prechádzajú bodmi $[-1,-1]; [1,1]$ • Funkcia je nepárna • Funkcia nie je ohraničená
<ul style="list-style-type: none"> • $y=x^{(1/2)}$ • $y=x^{(1/4)}$ • $y=x^{(1/6)}$ 		<ul style="list-style-type: none"> • $D(f) = [0, \infty); H(f) = [0, \infty)$ • Funkcia má jeden nulový bod $[0,0]$ • Funkcia ,rastie na $[0, \infty)$ • Všetky funkcie prechádzajú bodmi $[0,0]; [1,1]$ • Funkcia je zdola ohraničená

Obr.7.1: Grafy mocninových funkcií a ich vlastnosti



Cieľom druhej aktivity je priblížiť priebeh a vlastnosti polynomických funkcií (PF). Inovatívny postup s využitím IKT sme zvolil predovšetkým preto, aby sme eliminovali rutinné a formálne prístupy študentov, ktoré často pozorujeme pri riešení polynomických rovníc a nerovníc. Umožníme im takto lepšie vnímať súvis medzi

vlastnosťami PF $y = f(x)$ a riešením polynomických rovníc či nerovníc typu $f(x) = 0$ ($f(x) > 0$ a $pod.$), kde $f(x)$ je PF. Najskôr dáme študentom priestor na samostatné bádanie.

Spoločné diskusné fórum zameriame na problematiku počtu a umiestnenia nulových bodov PF, ktoré poskytujú rozhodujúcu informáciu o počte riešení príslušných polynomických rovníc. Ďalším podstatným ukazovateľom je počet a výskyt znamienkových zmien. Pri riešení polynomických (algebraických) a tiež racionálnych lomených nerovníc, využívajú študenti informáciu o nulových miestach funkcií a znamienkových zmenách na intervaloch, na ktoré sa číselná os „rozpadá“ po vyznačení nulových miest PF. Vďaka uvedenej aktivite dostanú študenti odpoveď na otázku, prečo používame práve takýto riešiteľský postup. Požadovaný interval $< x_1, x_2 > \subset D(f)$ určíme vďaka dobrej vizualizácii programom EG a tiež možnosti získať priesečníky s osou x



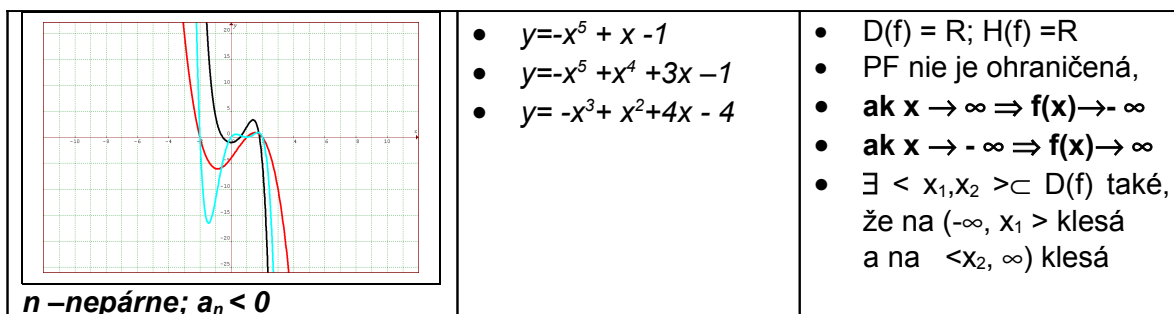
tlačidlom . Pri spoločnej diskusii je neodmysliteľnou pomôckou dataprojektor.

PRÍKLAD 7.2

Načrtnite niekoľko grafov PF pre rôzne hodnoty n – stupeň PF a a_0 - koeficient pri najvyššej mocnине. Analyzujte ich a rozhodnite, aké spoločné vlastnosti majú jednotlivé skupiny PF. Pri každej funkcii určte taký interval $< x_1, x_2 > \subset D(f)$, že na ňom prebiehajú všetky zmeny monotónnosti a vyskytujú sa na ňom všetky lokálne extrém.

RIEŠENIE

	<ul style="list-style-type: none"> $y = x^4 + x^2 + 2$ $y = x^4 - 2x^2 - 3$ $y = x^4 - 4x^2 + 3$ $y = x^4 + 4x^2 + 3$ 	<ul style="list-style-type: none"> $D(f) = \mathbb{R}; H(f) = (-\infty; \infty)$, PF ohraničené zdola; ak $x \rightarrow \infty \Rightarrow f(x) \rightarrow \infty$ ak $x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow \infty$ $\exists < x_1, x_2 > \subset D(f)$ také, že na $(-\infty, x_1)$ klesá a na (x_2, ∞) rastie
<p>n - párne; $a_n > 0$</p>	<ul style="list-style-type: none"> $y = -x^4 + x^2 + x + 2$ $y = -x^4 + 5x^2 - 4$ $y = -x^4 - 5x^2 - 4$ 	<ul style="list-style-type: none"> $D(f) = \mathbb{R}; H(f) = (-\infty; k)$, PF ohraničené zhora; ak $x \rightarrow \infty \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$ ak $x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$ $\exists < x_1, x_2 > \subset D(f)$ také, že na $(-\infty, x_1)$ rastie a na (x_2, ∞) klesá
<p>n – párne; $a_n < 0$</p>	<ul style="list-style-type: none"> $y = (x-1)^3$ $y = (x^3-1)(x^2-4)$ $y = (x^3-x)(x+2)(x+4)$ $y = (x^3+1)(x^2+4)$ 	<ul style="list-style-type: none"> $D(f) = \mathbb{R}; H(f) = \mathbb{R}$ PF nie je ohraničená ak $x \rightarrow \infty \Rightarrow f(x) \rightarrow \infty$ ak $x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$ $\exists < x_1, x_2 > \subset D(f)$ také, že PF na $(-\infty, x_1)$ rastie a na (x_2, ∞) rastie
<p>n - nepárne; $a_n > 0$</p>		



Obr.7.2: Grafy PF a ich vlastnosti



Z príkladu 7.2 vidieť, že počítač môže byť mimoriadne vhodným pomocníkom pri riešení algebraických rovníc a predovšetkým nerovníc. Tieto sa najčastejšie riešia tabuľkovou alebo grafickou metódou. Obe majú teoretický základ práve v znalostiach vlastností a priebehu polynomických funkcií (spojitosť, nulové miesta - znamienkové zmeny).

Grafická metóda riešenia polynomických nerovníc typu $P(x) > 0$ alebo $P(x) < 0$ spočíva v dvoch krokoch:

- Rozložíme polynóm $P(x)$ na súčin činiteľov tvaru $(x - a)^k$.
- Zostrojíme graf funkcie $y = P(x)$; z predchádzajúcej aktivity vieme, že tvar grafu funkcie závisí od počtu koreňov polynómu, od ich násobnosti, od stupňa polynómu n a znamienka koeficientu a_n .
- Z grafu následne odčítame pre aké argumenty polynóm $P(x)$ nadobúda kladné (časť grafu ležiaca nad osou x) alebo záporné (časť grafu pod osou x) hodnoty podľa znamienka nerovnosti.

Táto metóda nie je študentom až taká neznáma; je zovšeobecnením grafickej metódy riešenia kvadratických nerovníc, s ktorou sa už stretli v 1. ročníku. Môžeme preto využiť pri jej prezentovaní analógiu a následné zovšeobecnenie. Didaktický softvér v nasledujúcej aktivite umožňuje preskúmať veľké množstvo rôznych modifikácií polynomických nerovníc. Študenti najskôr riešia úlohu 7.3 samostatne, zo získaných výsledkov sa pokúsia vytvoriť všeobecný abstraktný model, ktorý prezentujú v rámci spoločného diskusného fóra.

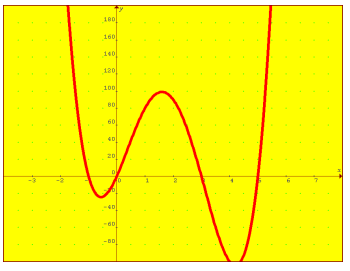
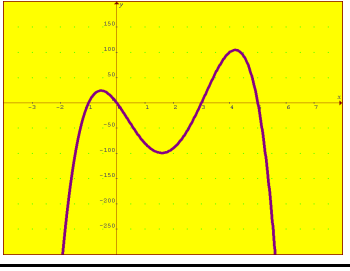
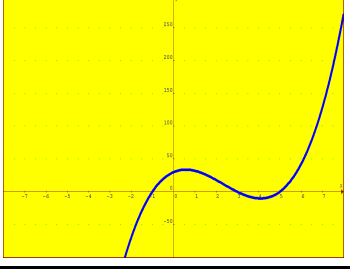
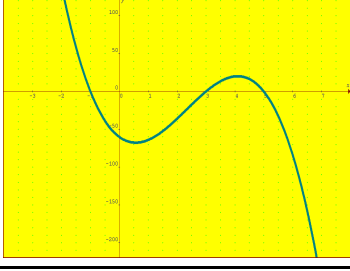
Domnievame sa, že aktivity 7.2 a 7.3 môžu veľkou mierou prispieť k neformálnemu pochopeniu tejto problematiky a tak aj k eliminácii chýb, ktorých sa študenti často dopúšťajú. Uvedený postup je medzi študentmi veľmi obľúbený a pomerne ľahko si ho osvoja. Jediným úskalím sú práve prípady nerovníc, u ktorých sa v rozklade na súčin činiteľov vyskytujú viacnásobné korene. Práve nižšie uvádzané cvičenie, ktoré môžeme obohatiť aj o ďalšie prípady a analógie s kvadratickou nerovnicou pomôže eliminovať zbytočné chyby. Spolu s predchádzajúcou aktivitou 7.2 umožní dobré porozumenie tejto problematiky; študenti menej imitujú učiteľa a viac chápu podstatu riešiteľských postupov.

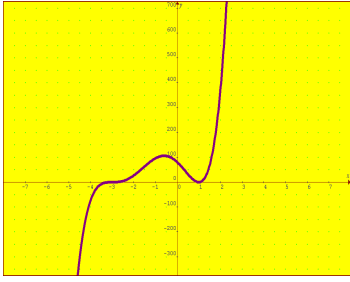

PRÍKLAD 7.3

Použite program Graphmatica a riešte graficky nasledujúce polynomické nerovnice, ktoré sú zapísané v tvare súčinu činiteľov. Zovšeobecnite získané skúsenosti z riešenia konkrétnych úloh.

- $5x(x+1)(x-5)(x-3) > 0$
- $-5x(x+1)(x-5)(x-3) > 0$
- $2(x+1)(x-5)(x-3) < 0$
- $-2(x+1)(x-5)(x-3) > 0$
- $3(x-1)^2(x+3)^3 < 0$
- $(x+1)(x-5)^3 < 0$

RIEŠENIE

 <ul style="list-style-type: none"> • $5x(x+1)(x-5)(x-3) > 0$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $a_n > 0, n=2k; 4 \text{ jednoduché korene};$ • \Rightarrow graf funkcie $P(x)$ pretína os x na štyroch miestach ; pre $x \rightarrow \infty \Rightarrow f(x) \rightarrow \infty$; • graf začneme kresliť nad osou x , v bode $x=5$ pozorujeme prvú znamienkovú zmenu, • pri každom ďalšom koreni rovnice $P(x) = 0$ dochádza k znamienkovej zmene <p>Riešenie: $P = (-\infty, -1) \cup (0, 3) \cup (5, \infty)$</p>
 <ul style="list-style-type: none"> • $-5x(x+1)(x-5)(x-3) > 0$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $a_n < 0, n=2k; 4 \text{ jednoduché korene};$ • \Rightarrow graf funkcie $P(x)$ pretína os x na štyroch miestach ; pre $x \rightarrow \infty \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$; • graf začneme kresliť pod osou x , v bode $x=5$ pozorujeme prvú znamienkovú zmenu, • pri každom ďalšom koreni rovnice $P(x) = 0$ dochádza k znamienkovej zmene <p>Riešenie: $P = (-1, 0) \cup (3, 5)$</p>
 <ul style="list-style-type: none"> • $2(x+1)(x-5)(x-3) < 0$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $a_n > 0, n=2k+1; 3 \text{ jednoduché korene};$ • \Rightarrow graf funkcie $P(x)$ pretína os x na troch miestach ; pre $x \rightarrow \infty \Rightarrow f(x) \rightarrow \infty$; • graf začneme kresliť nad osou x , v bode $x=5$ pozorujeme prvú znamienkovú zmenu, • pri každom ďalšom koreni rovnice $P(x) = 0$ dochádza k znamienkovej zmene <p>Riešenie: $P = (-\infty, -1) \cup (3, 5)$</p>
 <ul style="list-style-type: none"> • $-2(x+1)(x-5)(x-3) > 0$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $a_n < 0, n=2k+1; 3 \text{ jednoduché korene};$ • \Rightarrow graf funkcie $P(x)$ pretína os x na troch miestach ; pre $x \rightarrow \infty \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$; • graf začneme kresliť pod osou x , v bode $x=5$ pozorujeme prvú znamienkovú zmenu, • pri každom ďalšom koreni rovnice $P(x) = 0$ dochádza k znamienkovej zmene <p>Riešenie: $P = (-\infty, -1) \cup (3, 5)$</p>

 <ul style="list-style-type: none"> • $3(x-1)^2(x+3)^3 < 0$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $a_n > 0, n=2k+1$; 1 dvoj-násobný a 1 troj-násobný koreň; • \Rightarrow graf funkcie $P(x)$ pretína os x na dvoch miestach ; pre $x \rightarrow \infty \Rightarrow f(x) \rightarrow \infty$; • graf začneme kresliť nad osou x , • bod $x=1$ je <i>viacnásobným koreňom párnej násobnosti</i> \Rightarrow znamienková zmena nenastáva; graf „odskakuje od osi x“ do kladných hodnôt, • bod $x=-3$ je <i>trojnásobným koreňom nepárnej násobnosti</i> \Rightarrow nastáva znamienková zmena, Riešenie: $P = (-\infty, -3)$
 <ul style="list-style-type: none"> • $(x+1)(x-5)^3 < 0$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $a_n > 0, n=2k$; jeden trojnásobný a jeden jednoduchý koreň; • \Rightarrow graf funkcie $P(x)$ pretína os x na dvoch miestach ; pre $x \rightarrow \infty \Rightarrow f(x) \rightarrow \infty$; • graf začneme kresliť nad osou x , • bod $x=5$ je <i>viacnásobným koreňom nepárnej násobnosti</i> \Rightarrow znamienková zmena nastáva; • bod $x= -1$ je <i>jednoduchým koreňom</i> \Rightarrow znamienková zmena nastáva, Riešenie: $P = (-1, 5)$

Obr.7.3: Grafické riešenia polynomických nerovníc