

12 Logaritmické funkcie

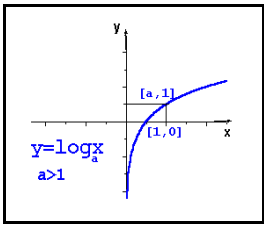
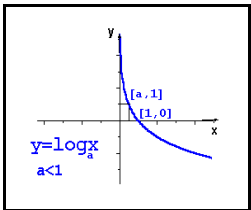


Metodický zámer

V dobe výpočtovej techniky by sa mohlo zdať, že logaritmy ako nástroj na zjednodušovanie rôznych náročných výpočtov stratili svoj význam. To ale neznamená, že význam stratila logaritmická a exponenciálna funkcia. Práve naopak. Obidve tieto funkcie sú prítomné v mnohých matematických modeloch súčasného sveta. V tejto kapitole uvádzame aj zaujímavé slovné úlohy v snahe priblížiť tieto pojmy študentom.



Čo by mal študent vedieť - stručný sylabus

<ul style="list-style-type: none"> Funkciu f^{-1}, inverznú k funkcii $f: y = a^x$ nazývame <u>logaritmickou funkciou</u> so základom a; <u>Logaritmická funkcia</u> f^{-1} je určená predpisom, ktorým sa každému kladnému reálnemu číslu x priraduje jeho logaritmus $y = \log_a x$, kde $a > 0, a \neq 1$; <u>Grafom</u> logaritmickej funkcie je <u>logaritmická krivka</u>; $D(f) = (0, \infty)$; obor funkčných hodnôt $H(f) = \mathbb{R}$; Každá logaritmická krivka prechádza bodmi $[1, 0]$ a $[a, 1]$, pričom súradnicová os y je jej <u>asymptotou</u> 	<ul style="list-style-type: none"> Z monotónnosti logaritmickej funkcie vyplýva, že pre každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí: <ul style="list-style-type: none"> $x \equiv y \Leftrightarrow \log_a x \equiv \log_a y \quad (a > 0, a \neq 1)$ $x < y \Leftrightarrow \log_a x < \log_a y \quad (a > 1)$ $x < y \Leftrightarrow \log_a x > \log_a y \quad (0 < a < 1)$ Logaritmus čísla y (väčšieho ako 0) pri základe $a \quad (a > 0, a \neq 1)$ je exponent x, ktorým musíme umocniť základ, aby sme dostali číslo y, čo môžeme zapísať: $x = \log_a y \Leftrightarrow y = a^x$ Ak súčasne platí, že $r > 0, s > 0, a > 0, a \neq 1$, tak: potom: <u>Logaritmus súčinu</u> dvoch kladných čísel sa rovná súčtu logaritmov týchto dvoch činiteľov: $\log_a r \cdot s = \log_a r + \log_a s$
<ul style="list-style-type: none"> Ak $a > 1$, je funkcia $y = \log_a x$ rastúca; 	<ul style="list-style-type: none"> Ak $0 < a < 1$ je funkcia $y = \log_a x$ klesajúca  <ul style="list-style-type: none"> -<u>Logaritmus podielu</u> dvoch kladných čísel sa rovná rozdielu logaritmov týchto dvoch činiteľov: $\log_a r : s = \log_a r - \log_a s$ -<u>Logaritmus súčinu</u> dvoch kladných čísel sa rovná súčtu logaritmov týchto dvoch činiteľov: $\log_a r \cdot s = \log_a r + \log_a s$ -<u>Logaritmus mocniny</u> s kladným základom sa rovná súčinu exponenta a logaritmu základu mocniny: $\log_a r^k = k \cdot \log_a r$



Riešené príklady

PRÍKLAD 12.1

Matematický model pamäte študenta.

Študenti boli testovaní z matematiky a následne niekoľko mesiacov za sebou im bol predložený ekvivalentný posttest. Priemerné skóre získaných bodov popisuje funkcia:

$$f(t) = 80 - 14 \ln(t+1); 0 \leq t \leq 12$$

kde t je čas v mesiacoch.

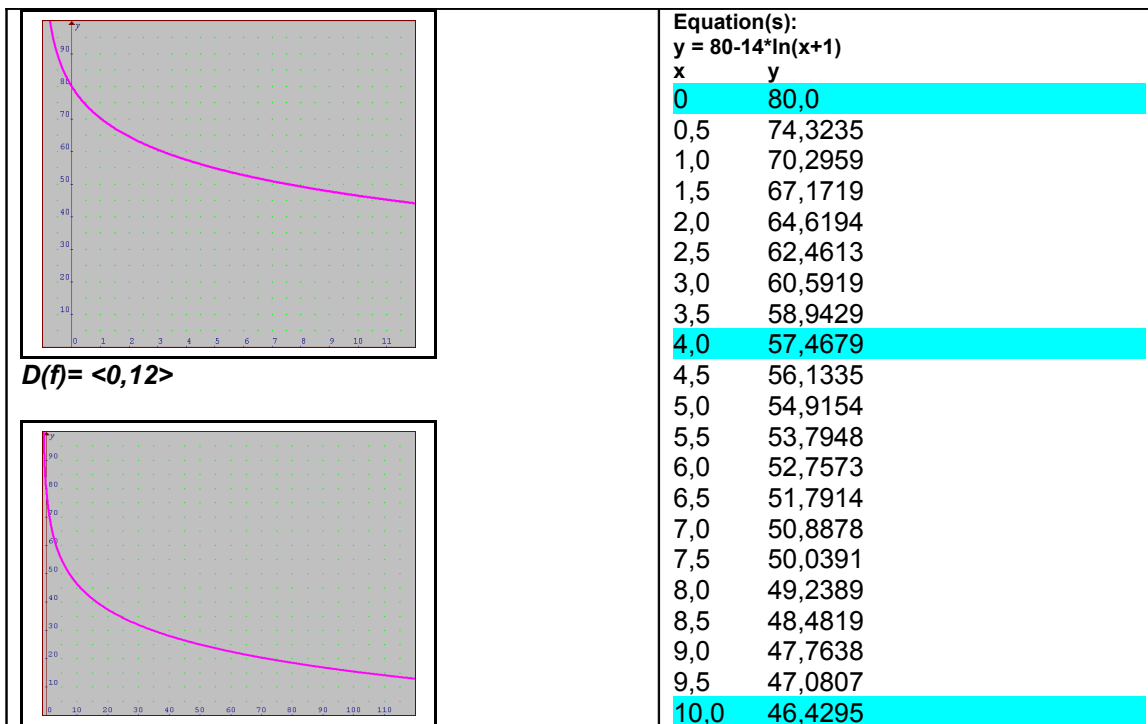
- Aké boli výsledky originálneho testu ($t=0$)?
- Aké výsledky dosahovali študenti po 4 mesiacoch a aké po 10 mesiacoch?
- Zostrojte graf uvedenej závislosti!

RIEŠENIE



Využijeme didaktický softvér Graphmatica a tabuľku hodnôt. Modifikujeme mierku na súradnicových osiach prostredníctvom položky *Grid Range* zo Submenu *View*. Vložíme hodnoty $t \in <0,12>$ a $f(t) \in <0,90>$.

Výhodou riešenia úlohy pomocou počítača je flexibilita a otvorenosť pre možnosti modifikovania a skúmania jej ďalších aspektov. Študenti počas riešenia problému položili otázku, aký priebeh má táto funkcia ak rozšírime časový interval povedzme na tri roky. Má táto funkcia nulové miesto? (zaujímalo ich, či a kedy je možné úplné zabudnutie získaných informácií). Ak modifikujeme definičný obor funkcie a zoberieme $x \in <0,120>$, čo zahŕňa obdobie desiatich rokov zistujeme, že sa dostávame na úroveň 10% vedomostí.



$D(f)=\langle 0,120 \rangle$	10,5	45,8071
	11,0	45,2113
	11,5	44,6398

Záver:

- Graf naznačuje, že funkcia je spojitá, klesajúca na intervale $\langle 0,12 \rangle$. Pokles úrovne vedomostí je vyjadrený uvedenou tabuľkou. Hodnoty $f(t)$ korešpondujú s výsledkami získanými výpočtom:
- $f(0) = 80$; funkcia tu nadobúda svoje *maximum*
 $f(4) = 57,46$
 $f(10) = 46,42$

Funkčné hodnoty potvrdili, že najväčší úbytok vedomostí je prvé dva mesiace po ich získaní, neskôr sa úbytok spomaľuje.

Obr. 12.1: Riešenie príkladu 12.1

PRÍKLAD 12.2

Použite tabuľkový procesor Excel a demonštrujte na tabuľke hodnot platnosť vzťahov:

a) $\frac{\ln(x)}{\ln(y)} \neq \ln \frac{x}{y} = \ln(x) - \ln(y)$

b) $\ln(x) \cdot \ln(y) \neq \ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$

RIEŠENIE



Úloha pomerne jednoduchá, veľmi vhodná na prehĺbenie a fixáciu známych, často však študentmi zamieňaných vlastností logaritmických funkcií. Zvolíme niekoľko ľubovoľných hodnôt premenných x a y . Tieto vložíme do stĺpcov A a B;

- do stĺpca C, do bunky C2 vkladáme $=\ln(A2)/\ln(B2)$ a kopírujeme do C3:C7,
- do stĺpca D, do bunky D2 vkladáme $=\ln(A2/B2)$, skopírujeme do D3:D7,
- do stĺpca E, do bunky E2 vkladáme $=\ln(A2)-\ln(B2)$, skopírujeme do E3:E7.

Podobne postupujeme aj v prípade b) stačí zmeniť vkladané funkcie v bunkách C2, D2, E2 a tabuľka sa automaticky modifikuje.

x	y	$\ln(x)/\ln(y)$	$\ln(x/y)$	$\ln(x)-\ln(y)$	výsledky potvrdzujú platnosť vzťahu a)
1	2	0	-0,69315	-0,69315	
3	4	0,792481	-0,28768	-0,28768	
5	6	0,898244	-0,18232	-0,18232	
10	5	1,430677	0,693147	0,693147	
4	0,5	-2	2,079442	2,079442	
6	0,2	-1,11328	3,401197	3,401197	
x	y	$\ln(x) \cdot \ln(y)$	$\ln(x \cdot y)$	$\ln(x) + \ln(y)$	výsledky potvrdzujú platnosť vzťahu b)
1	2	0	0,693147	0,693147	
3	4	1,523	2,484907	2,484907	
5	6	2,883726	3,401197	3,401197	
10	5	3,705868	3,912023	3,912023	
4	0,5	-0,96091	0,693147	0,693147	
6	0,2	-2,88373	0,182322	0,182322	

Tab.12.1:Hodnoty funkcií získané tabuľkovým procesorom MS Excel

Príklad 12.3

Použite počítačový program na demonštráciu rovnosti $f(x) = g(x)$, ak $x > 0$ pre dvojicu funkcií:

a) $f(x) = \ln(x^2/4)$

$g(x) = 2\ln(x) - \ln 4$

b) $f(x) = \ln \sqrt{x \cdot (x^2 + 1)}$

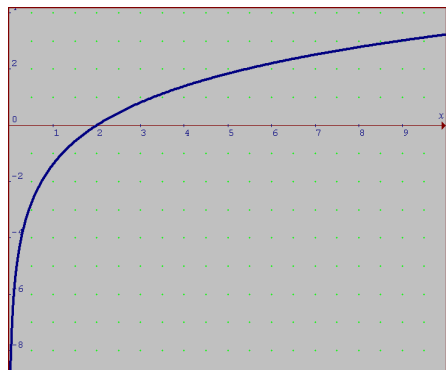
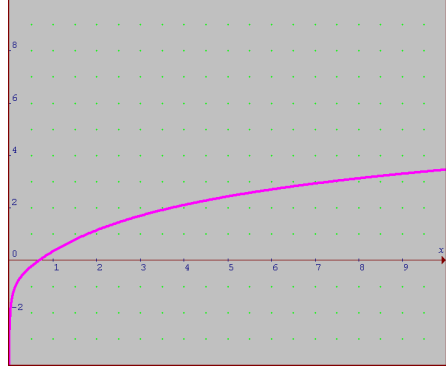
$g(x) = 1/2[\ln(x) + \ln(x^2+1)]$

c) $f(x) = \ln \frac{8}{\sqrt{x^2 + 1}}$

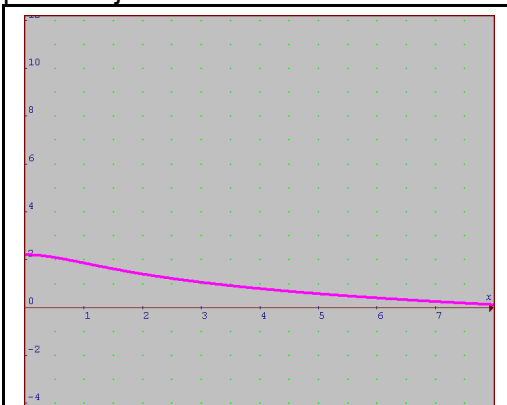
$g(x) = 2\ln 3 - 1/2\ln(x^2+1)$

Riešenie

Príklad slúži na precvičenie dôležitých vlastností logaritmov. Dokonca aj úprava vzorcov sa môže stať príťažlivejšou, ak využívame vhodný didaktický softvér na potvrdenie správnosti výsledkov. Študenti v prvej fáze aplikujú známe vzorce a transformujú funkciu $f(x)$ na tvar $g(x)$, (alebo opačne). Následne graficky overujú svoje výsledky. Kreslič grafov Graphmatica v prípade správneho riešenia zaznamená v okne Graph dva totožné grafy, o čom sa presvedčíme vďaka tabuľke hodnôt.

	<p>Equation(s): $y = \ln(x^2/4)$ (1) $y = 2 \cdot \ln(x) - \ln(4)$ (2)</p> <table><tr><th>x</th><th>y</th><th>y2</th></tr><tr><td>0,5</td><td>-2,7726</td><td>-2,7726</td></tr><tr><td>1,0</td><td>-1,3863</td><td>-1,3863</td></tr><tr><td>1,5</td><td>-0,5754</td><td>-0,5754</td></tr><tr><td>2,0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>2,5</td><td>0,4463</td><td>0,4463</td></tr><tr><td>3,0</td><td>0,8109</td><td>0,8109</td></tr><tr><td>3,5</td><td>1,1192</td><td>1,1192</td></tr><tr><td>4,0</td><td>1,3863</td><td>1,3863</td></tr><tr><td>4,5</td><td>1,6219</td><td>1,6219</td></tr><tr><td>5,0</td><td>1,8326</td><td>1,8326</td></tr><tr><td>5,5</td><td>2,0232</td><td>2,0232</td></tr></table>	x	y	y2	0,5	-2,7726	-2,7726	1,0	-1,3863	-1,3863	1,5	-0,5754	-0,5754	2,0	0	0	2,5	0,4463	0,4463	3,0	0,8109	0,8109	3,5	1,1192	1,1192	4,0	1,3863	1,3863	4,5	1,6219	1,6219	5,0	1,8326	1,8326	5,5	2,0232	2,0232
x	y	y2																																			
0,5	-2,7726	-2,7726																																			
1,0	-1,3863	-1,3863																																			
1,5	-0,5754	-0,5754																																			
2,0	0	0																																			
2,5	0,4463	0,4463																																			
3,0	0,8109	0,8109																																			
3,5	1,1192	1,1192																																			
4,0	1,3863	1,3863																																			
4,5	1,6219	1,6219																																			
5,0	1,8326	1,8326																																			
5,5	2,0232	2,0232																																			
	<p>Equation(s): $y = \ln(\sqrt{x \cdot (x^2 + 1)})$ (1) $y = 1/2 \cdot (\ln(x) + \ln(x^2 + 1))$ (2)</p> <table><tr><th>x</th><th>y</th><th>y2</th></tr><tr><td>0,5</td><td>-0,235</td><td>-0,235</td></tr><tr><td>1,0</td><td>0,3466</td><td>0,3466</td></tr><tr><td>1,5</td><td>0,7921</td><td>0,7921</td></tr><tr><td>2,0</td><td>1,1513</td><td>1,1513</td></tr><tr><td>2,5</td><td>1,4486</td><td>1,4486</td></tr><tr><td>3,0</td><td>1,7006</td><td>1,7006</td></tr><tr><td>3,5</td><td>1,9184</td><td>1,9184</td></tr><tr><td>4,0</td><td>2,1098</td><td>2,1098</td></tr><tr><td>4,5</td><td>2,2802</td><td>2,2802</td></tr><tr><td>5,0</td><td>2,4338</td><td>2,4338</td></tr></table>	x	y	y2	0,5	-0,235	-0,235	1,0	0,3466	0,3466	1,5	0,7921	0,7921	2,0	1,1513	1,1513	2,5	1,4486	1,4486	3,0	1,7006	1,7006	3,5	1,9184	1,9184	4,0	2,1098	2,1098	4,5	2,2802	2,2802	5,0	2,4338	2,4338			
x	y	y2																																			
0,5	-0,235	-0,235																																			
1,0	0,3466	0,3466																																			
1,5	0,7921	0,7921																																			
2,0	1,1513	1,1513																																			
2,5	1,4486	1,4486																																			
3,0	1,7006	1,7006																																			
3,5	1,9184	1,9184																																			
4,0	2,1098	2,1098																																			
4,5	2,2802	2,2802																																			
5,0	2,4338	2,4338																																			
Záver:	Equation(s):																																				

V okne *Graph* registrujeme vo všetkých prípadoch iba jednu krivku, nakoľko grafy oboch funkcií sú totožné. Tabuľky tiež potvrdzujú rovnosť funkcií



$$y = \ln(9/\sqrt{x^2+1}) \quad (1)$$

$$y = 2 \cdot \ln(3) - 1/2 \ln(x^2+1) \quad (2)$$

x	y	y2
0,5	2,0857	2,0857
1,0	1,8507	1,8507
1,5	1,6079	1,6079
2,0	1,3925	1,3925
2,5	1,2067	1,2067
3,0	1,0459	1,0459
3,5	0,9052	0,9052
4,0	0,7806	0,7806
4,5	0,669	0,669
5,0	0,5682	0,5682
5,5	0,4762	0,4762
6,0	0,3918	0,3918

Obr.12.2: Grafické riešenie príkladu.12.3

PRÍKLAD 12.4

Graficky riešte nerovnice:

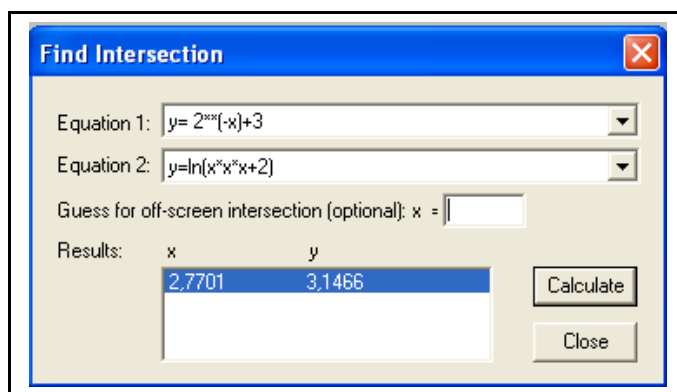
a) $\ln(x^3 + 2) > 2^{-x} + 3$

b) $\log(x^2 - 4) + 5 \cdot \log(x - 2) > 3$

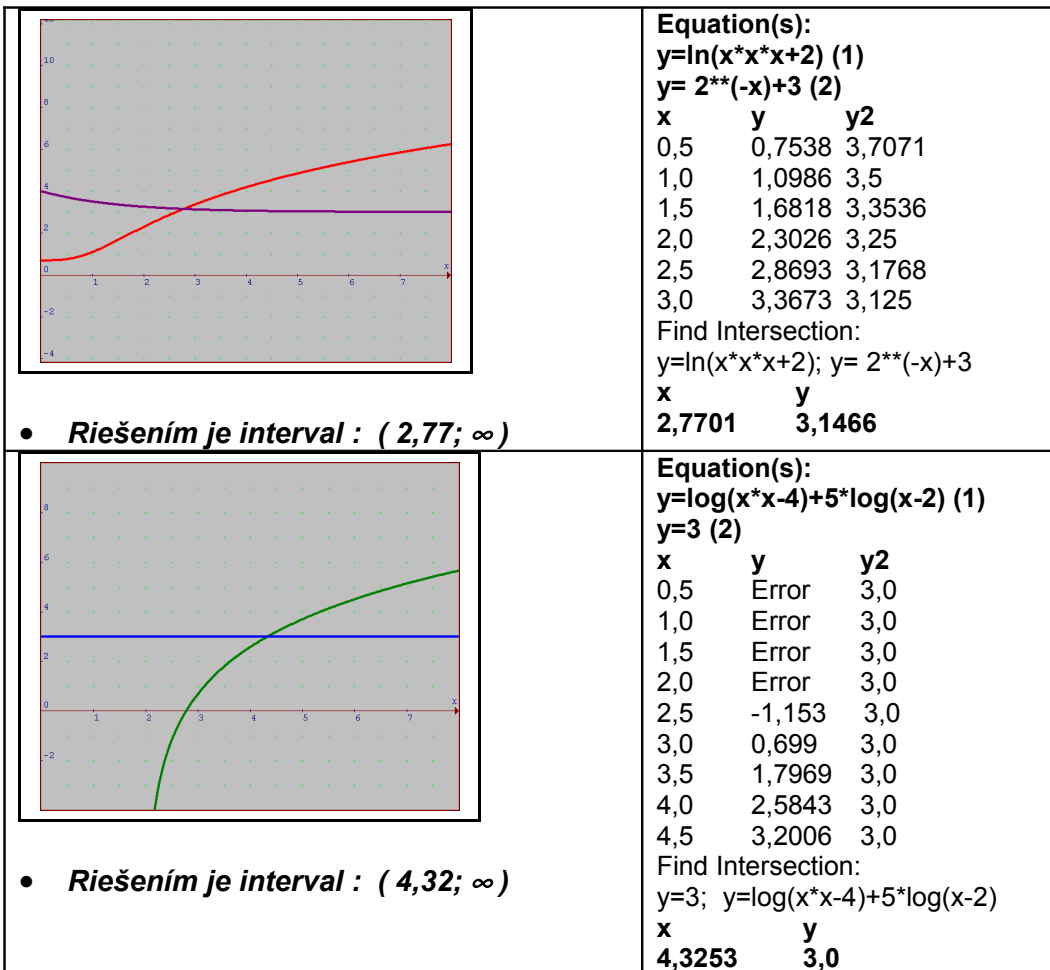
RIEŠENIE



Didaktický softvér Graphmatica je výbornou pomôckou pri riešení rôznych typov zložitejších rovníc a nerovnic. Grafické riešenie nerovnice (to isté platí aj pre rovnice) spočíva v zostrojení grafov funkcií $f(x): y = \ln(x^3 + 2)$ nachádzajúcej sa na ľavej strane nerovnosti a $g(x): y = 2^{-x} + 3$ nachádzajúcej sa na pravej strane nerovnosti. Na vyhľadanie priesečníka grafov použijeme tabuľku *Find Intersection* z menu *Tools*. Hodnoty x-ových súradníc získaných priesečníkov grafov určujú krajné body výsledného intervalu. Tabuľky a grafy podávajú tiež vyčerpávajúcu a výstižnú informáciu o definičných oboroch funkcií, s ktorými pracujeme - máme možnosť v spoločnej diskusii poukázať aj na tieto detaily, ktoré študenti tak často prehliadajú.



Obr.12.3: Okno Find intersection z menu Tools



Obr.:12.4: Grafické riešenie nerovníc