

4 Kvadratická funkcia

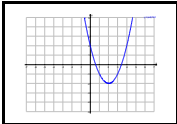
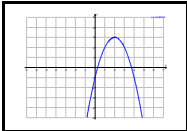


Vyučovanie témy kvadratické funkcie (v rámci tematického celku *Funkcie, rovnice a nerovnice I*), je v časovo-tematickom pláne zaradené do 1. ročníka gymnázií (kvinty), hneď za lineárnou funkciou. V rámci časovej dotácie je možné realizovať 3 vyučovacie hodiny v počítačovej učebni. Navrhovaná inovácia vyučovacieho procesu prostredníctvom počítačových technológií spočíva v mnohonásobnej konkretizácii a vizualizácii preberaných pojmov so zameraním na zdôraznenie ich vzájomných korelácií. Kým pri klasickom vyučovaní časové obmedzenie neumožní dostatočne preskúmať každú z možných modifikácií grafov, vhodný didaktický softvér tento priestor ponúka.

Študentmi najlepšie zvládnutým učivom v tejto oblasti je riešenie kvadratických rovníc pomocou diskriminantu. Ovládanie algoritmu je často zarážajúco formálne a izolované od ďalších s ním súvisiacich pojmov. Bežným javom je, že študent síce správne vypočíta korene kvadratickej rovnice, ale následne nie je schopní použiť túto informáciu pri určovaní rozkladu kvadratického trojčlenka na súčin koreňových činiteľov, či pri riešení nerovníc. Uvedené aktivity majú za cieľ odstránenie práve takýchto neporozumení a prezentovanie súvislostí medzi pojmami v tejto oblasti.



Čo by mal študent vedieť - stručný syllabus

<p><u>Kvadratická funkcia</u> je každá funkcia určená predpisom $y = ax^2 + bx + c$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$</p> <p><u>Grafom</u> každej kvadratickej funkcie je <u>parabola</u> (prípadne jej časť), ktorej os je rovnobežná s osou y</p>	<p>$a > 0$; $D(f) = \mathbb{R}$; $H(f) = \left\langle c - \frac{b^2}{4a}; \infty \right\rangle$</p> <ul style="list-style-type: none">-rastie na $\left\langle -\frac{b^2}{4a}; \infty \right\rangle$-klesá na $\left\langle -\infty; -\frac{b^2}{4a} \right\rangle$zdola ohraničená;ostré minimum v bode $x = -b/2a$	<p>$a > 0$</p>  <p>$a < 0$</p> 	<p>$a < 0$; $D(f) = \mathbb{R}$; $H(f) = \left\langle -\infty; c - \frac{b^2}{4a} \right\rangle$</p> <ul style="list-style-type: none">rastie na $\left\langle -\infty; -\frac{b^2}{4a} \right\rangle$klesá na $\left\langle -\frac{b^2}{4a}; \infty \right\rangle$zhora ohraničená;ostré maximum v bode $x = -b/2a$
<p><u>Vrchol paraboly</u> je daný dvojicou bodov:</p> $\left[-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a} \right]$	<ul style="list-style-type: none">priesečník grafu funkcie s osou y je bod, pre ktorý $x = 0$, teda $[0, c]$priesečník grafu funkcie s osou x je bod, pre ktorý platí $y = 0$; teda riešenie rovnice $ax^2 + bx + c = 0$	<ul style="list-style-type: none">ak $D > 0$; $\exists 2$ spoločné bodyak $D = 0$; \exists jediný spoločný bodak $D < 0$; <u>parabola nepretína os x</u>. Ak $a > 0$ leží celá nad osou x, ak $a < 0$ leží celá pod osou x	



Riešené príklady

PRÍKLAD 4.1

Pomocou didaktického softveru zostrojte vždy niekoľko grafov kvadratických funkcií špecifických vlastností do jedného súradnicového systému. Pozorujte a analyzujte získané grafy. Výsledky pozorovaní zovšeobecnite. Všímajte si predovšetkým, aká transformácia grafu funkcie $y = x^2$ nastala, vzhľadom na pozíciu vrchola paraboly, vlastností funkcií. Výsledky pozorovaní zapíšte do tabuľky. Uvažujte nasledujúce prípady.

a)

- $y = x^2 - 4$
- $y = x^2 + 0,3$
- $y = x^2 - 1$
- $y = x^2 + 3$
- $y = x^2$

b)

- $y = 4x^2$
- $y = 0,5 x^2$
- $y = 7 x^2$
- $y = 0,05 x^2$

c)

- $y = -4x^2$
- $y = -x^2$
- $y = -x^2 + 3$
- $y = -0,2x^2 - 1$

d)

- $y = x^2$
- $y = (x-1)^2$
- $y = (x-3)^2$
- $y = (x+2)^2$
- $y = (x+4)^2$

e)

- $y = x^2$
- $y = 2x^2$
- $y = -2 x^2$
- $y = -2(x+4)^2$
- $y = -2(x+4)^2 + 3$

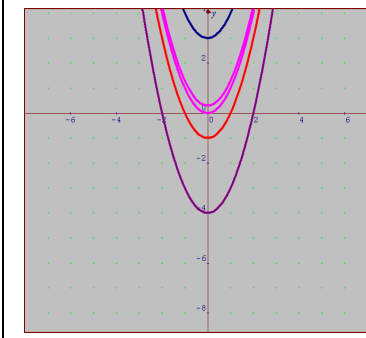
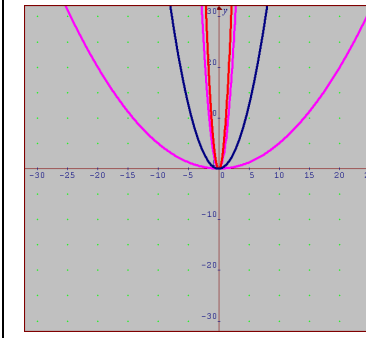
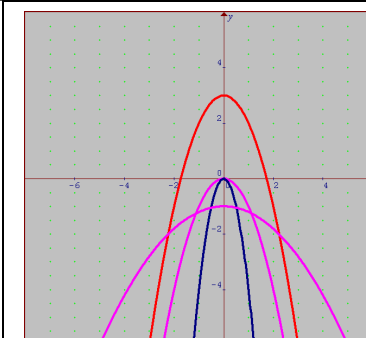


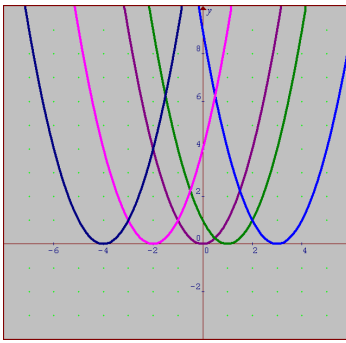

Táto aktivita má zlepšiť schopnosti študentov pri zostrojovaní grafov kvadratických funkcií postupnou syntézou elementárnych operácií grafu funkcie $y = x^2$. Schopnosť rýchlo a správne načrtnúť graf funkcie je vítaná predovšetkým pri úlohách, kde zobrazenie kvadratickej funkcie je iba parciálnym problémom (krokom) pri riešení zložitejšej úlohy (výpočet obsahu elementárnej oblasti ohraničenej krivkami). Cvičenie

je tiež nevyhnutné pre úspešné zvládnutie problematiky riešenia kvadratických nerovní, kde je využitie grafickej interpretácie veľmi vhodným prostriedkom (metódou). Študenti pracujú najskôr so separovanými modelmi. Cieľom aktivít je, aby následne dospeli k abstraktným modelom a pochopili význam úpravy kvadratickej funkciu na tvar: $y = a(x-m)^2 + n$?

Na zostrojenie grafov funkcií využijeme program *Graphmatica*. Motivujeme študentov, aby sa snažili do výslednej tabuľky zapísať čo najviac informácií o pozorovaných grafoch funkcií. Vo finálnej fáze hodiny prezentujú študenti svoje výsledky pred spolužiakmi, zdôvodňujú ich. Pri prezentácii dbáme na exaktné matematické vyjadrovanie a primeranú argumentáciu.

RIEŠENIE

sada funkcií	reprezentácia na obrazovke počítača	závery pozorovaní
<ul style="list-style-type: none"> $y=x^{**2}-4$ $y=x^{**2}+0,3$ $y=x^{**2}-1$ $y=x^{**2}+3$ $y=x^{**2}$ 		<ul style="list-style-type: none"> grafy funkcií poukazujú na transláciu grafu $f(x)=x^2$ $f(x) \rightarrow f(x) + n$, pričom platí ... ak $n>0$ parabola $y=x^2$ sa posunie o "n" jednotiek smerom nahor pozdĺž osi y, ak $n<0$ potom sa parabola posunie o "n" jednotiek smerom nadol pozdĺž osi y parabola je obrátená "nahor" vrchol paraboly je bod $V=[0,n]$ všetky funkcie sú ohraničené zdola
<ul style="list-style-type: none"> $y=7*x^{**2}$ $y=4*x^{**2}$ $y=0,05*x^{**2}$ $y=0,5*x^{**2}$ 		<ul style="list-style-type: none"> $f(x) \rightarrow a.f(x)$ ak $a>1$ graf funkcie naťahujeme a krát pozdĺž osi y parabola je obrátená nahor, ak $0 < a < 1$, graf funkcie stláčame pozdĺž osi y vrchol paraboly je bod $V=[0,0]$ funkcie sú ohraničené zdola
<ul style="list-style-type: none"> $y=-0,2x^{**2}-1$ $y=-x^{**2}+3$ $y=-4x^{**2}$ $y=-x^{**2}$ 		<ul style="list-style-type: none"> $f(x) \rightarrow -f(x)$; $a<0$ spôsobuje, že parabola je obrátená "nadol" graf funkcie $f(x)$ je osovo súmerný s grafom funkcie $-f(x)$ podľa osi y následne použijeme pravidlo posunutia a stláčania z predchádzajúcich príkladov, grafom je parabola s maximom (ohraničená zhora)

<ul style="list-style-type: none"> • $y=(x+4)^{**2}$ • $y=(x+2)^{**2}$ • $y=(x-3)^{**2}$ • $y=(x-1)^{**2}$ • $y=x^{**2}$ 		<ul style="list-style-type: none"> • $f(x) \rightarrow f(x-m)$ posunutie o vektor (translácia) $m > 0$ - posunutie o "m" jednotiek vpravo $m < 0$ - posunutie o "m" jednotiek vľavo • vrchol paraboly $V=[m,0]$ • grafmi funkcií sú paraboly otvorené a otočené smerom nahor • funkcie sú ohraničené zdola
<ul style="list-style-type: none"> • $y=-2*(x+4)^{**2}+3$ • $y=x^{**2}$ • $y=-2x^{**2}$ • $y=-2(x+4)^{**2}$ 		<ul style="list-style-type: none"> • postupne použijeme všetky operácie, s ktorými sme sa stretli v predchádzajúcich úlohách; čiže syntézu posunutia pozdĺž osi x o "m" jednotiek, natiahnutia pozdĺž osi y, preklopenie vzhľadom na os x a následné posunutie pozdĺž osi x o "n" jednotiek doľava • parabola, ktorá je grafom funkcie $y=-2(x+4)^2+3$ má vrchol $V=[-4,3]$ • vzhľadom na hodnotu $a<0$ je otvorená a otočená smerom nadol

Obr. 4.1: Riešenie príkladu 4.1

Posledný z uvedených prípadov je pre nás z didaktického hľadiska najzaujímavejší a najprínosnejší. Dôležité je, aby študenti samostatne identifikovali zovšeobecnený tvar kvadratickej funkcie $y = a(x-m)^2 + n$ a presvedčili sa, že graf každej kvadratickej funkcie $y =$ ktorá je zapísaná v tomto tvare môžeme získať syntézou vyššie naznačených operácií. Z tohto tvaru vieme indikovať všetky dôležité charakteristiky ako je: vrchol paraboly, jej orientácia, monotónnosť, extrém, ohraničenosť. Zmienaná úprava kvadratického trojčlena na štvorec je nepostrádateľnou kompetenciou každého študenta. (využívaná aj pri ďalších témach; neurčitý integrál, kuželosečky)

PRÍKLAD 4.2


Narysujte grafy zadanych kvadratických funkcií. Pre každú sadu funkcií vypočítajte hodnotu diskriminantu $D = b^2 + 4ac$ a venujte zvláštnu pozornosť hodnote argumentu a . Aká je súvislosť medzi hodnotou diskriminantu a počtom riešení prislúchajúcej kvadratickej rovnice, tvarom grafu funkcie $y = f(x)$? Zistené závery zovšeobecnite.

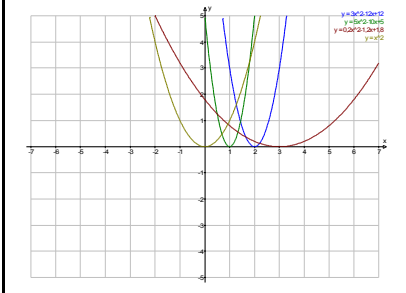
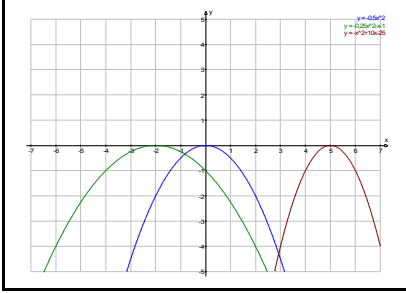
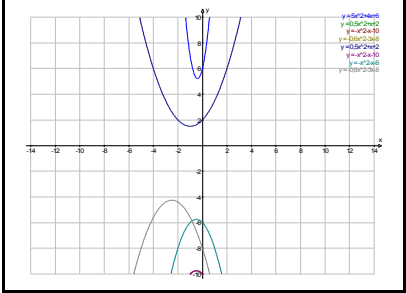
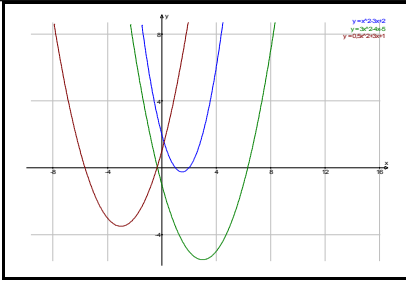
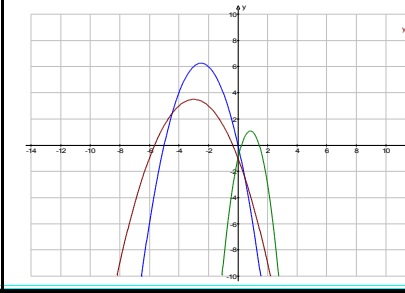
RIEŠENIE



Cieľom tejto aktivity je zdôrazniť kontext medzi počtom riešení prislúchajúcej kvadratickej rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, tvarom grafu funkcie $y = ax^2 + bx + c$, hodnotou diskriminantu D a koeficientu a . Postup riešenia bude podobný ako v predchádzajúcom príklade. Pomocou didaktického softvéru EG veľmi ľahko získame priesečníky grafov



skúmaných funkcií s osou x (použijeme tlačidlo ). Cvičenie je užitočné pre následné úspešné riešenie kvadratických nerovníc. Vďaka vizualizácii jednotlivých prípadov prispeje k neformálnemu pochopeniu zmieny súvislosti. Študenti získavajú správnu predmetnú predstavu jednotlivých prípadov diferencovaných podľa hodnoty D a koeficientu a .

sada funkcií	vizualizácia programom EG	závery a zovšeobecnenia
$y = x^2$ $y = 3x^2 - 12x + 12$ $y = 5x^2 - 10x + 5$ $y = 0,2x^2 - 1,2x + 1,8$		<ul style="list-style-type: none"> výpočet potvrdil, že vo všetkých uvedených prípadoch $D = 0$, koeficient $a > 0$, parabola je otvorená "nahor", existuje jeden dvojnásobný koreň prislúchajúcej rovnice; $x_{1,2} = (-b)/(2a)$, vrchol paraboly $V = [(-b)/(2a), 0]$.
$y = -0,5x^2$ $y = -0,25x^2 - x - 1$ $y = -x^2 + 10x - 25$		<ul style="list-style-type: none"> výpočet opäť potvrdil, že vo všetkých uvedených prípadoch $D = 0$, koeficient $a < 0$, parabola je otvorená smerom "nadol", parabola sa dotýka vrcholom osi x v bode $(-b)/(2a)$, existuje jeden dvojnásobný koreň prislúchajúcej rovnice; $x_{1,2} = (-b)/(2a)$, vrchol paraboly $V = [(-b)/(2a), 0]$.
$y = 5x^2 + 4x + 6$ $y = 0,5x^2 + 3x + 1$ $y = -x^2 - x - 6$ $y = -0,6x^2 - 3x - 8$		<ul style="list-style-type: none"> výpočet potvrdil, že vo všetkých uvedených prípadoch $D < 0$, koeficient $a \in \mathbb{Q}$, parabola nepretína os x, prislúchajúca kvadratická rovnica nemá reálne korene, funkčné hodnoty sú buď len kladné alebo len záporné čísla $\forall x \in D(f)$
$y = x^2 - 3x + 2$ $y = 3x^2 - 4x - 5$ $y = 0,5x^2 + 3x + 1$		<ul style="list-style-type: none"> výpočet potvrdil, že vo všetkých uvedených prípadoch $D > 0$, koeficient $a > 0$, parabola je otvorená smerom "nahor"; tzv. parabola s minimom parabola pretína os x v dvoch bodoch (koreňoch) prislúchajúcej kvadratickej rovnice
$y = -x^2 - 5x$ $y = -3x^2 + 5x - 1$ $y = -0,5x^2 - 3x - 1$		<ul style="list-style-type: none"> výpočet potvrdil, že vo všetkých uvedených prípadoch $D > 0$, koeficient $a < 0$, parabola je otvorená smerom "nadol"; tzv. parabola s maximom, parabola pretína os x v dvoch

PRÍKLAD 4.3.

Pomocou didaktického softveru Graphmatica načrtnite niekoľko grafov kvadratického trojčlenu s parametrom $y = x^2 + ax$. Analyzujte grafy vzhľadom na hodnotu parametra a (predovšetkým nulové body a súradnice vrchola paraboly). Zvlášť uvažujte o prípade, ak sa $a=0$.

RIEŠENIE

Ďalšie dve úlohy majú za cieľ umožniť študentom neformálnejšie pochopenie problematiky kvadratických rovníc a nerovníc s parametrom. Divergentné a neštandardné úlohy, v ktorých sa vyskytuje parameter, patria k najmenej obľúbeným medzi študentmi. Vhodný didaktický softvér ponúka študentom konkretizáciu abstraktných objektov, umožní im hlbšie vniknúť do podstaty skúmaného problému.

Pri riešení využijeme schopnosť programu Graphmatica vykresliť "rodinku funkcií" - *Graphing families of functions* t.j. prezentovať automaticky hneď niekoľko funkcií do jedného okna *Graph*. Stačí, ak za predpis funkcie, v ktorom sa vyskytuje parameter " a " špecifikujeme v zloženej zátvorke rozsah intervalu, z ktorého bude hodnota parametra vybraná a tiež krok (parameter nemusí byť iba číslo prirodzené, povolená je akékoľvek racionálna hodnota a). Špecifikácia má potom tvar: $\{a: \text{start}, \text{end}, \text{step}\}$

Ako prvú alternatívu sme vybrali kvadratickú funkciu typu $y = ax^2 + bx$; kde $c = 0$. S riešením kvadratických rovníc $ax^2 + bx = 0$ študenti nemávajú väčšie problémy.

<p>Zadali sme niekoľko hodnôt parametra $a > 0$. Program vykreslil sedem parabol. $y = x^2 + a \cdot x$ {a: 0, 6, 1}</p> <p>$a = 1, 0$ (1) $a = 2, 0$ (2) $a = 3, 0$ (3) $a = 4, 0$ (1) $a = 5, 0$ (2) $a = 6, 0$ (3)</p>	<p>Zadali sme tiež niekoľko hodnôt parametra $a < 0$. $y = x^2 + a \cdot x$ {a: -6, 0, 1}. Opäť sme získali 7 grafov, vďaka ktorým ľahko zovšeobecníme a následne algebraicky potvrdíme Záver: 1. nulové body sú $x = 0$ a $x = -a$ 2. vrchol paraboly $V = [-a/2; -(a^2/4)]$ 3. v prípade $a=0$ $V = [0,0]$, nulový bod $x=0$</p>

Obr.4.3: Riešenie príkladu.4 3

PRÍKLAD 4.4

Pomocou didaktického softveru Graphmatica načrtnite niekoľko grafov kvadratického trojčlenu s parametrom a :

a) $y = ax^2 + 4x$

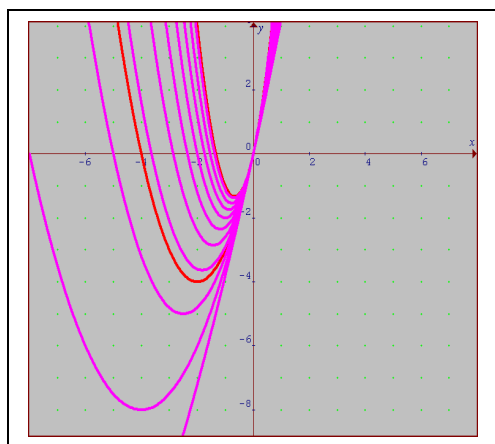
b) $y = x^2 - 4x + a$

Analyzujte grafy vzhľadom na hodnotu parametra a . Určite nulové body a vrcholy príslušných parabol. Zovšeobecnite získané výsledky.

RIEŠENIE

Opäť využívame *Graphing families of functions*. Problém vizualizujeme. Úloha demonštruje vplyv hodnoty koeficientov a , b , c v zápise kvadratickej funkcie na jej graf, jeho polohu v súradnicovom systéme a vlastnosti.

a) $y = ax^2 + 4x$; $\{a: 0.2, 3, 0.3\}$



a) Pri zadaní hodnôt parametra a z intervalu $<0,2 ; 3>$ s krokom $0,3$ zápisom $\{a: 0.2, 3, 0.3\}$ sme získali grafickú interpretáciu. Kreslič grafov použijeme aj na určenie nulových bodov a vrcholov parabol (využívame trasovanie funkcií). Získané výsledky si študenti zapisujú do tabuľky, následne riešia úlohy algebraicky. Kontrolujú svoje výsledky. V prípade nezhody majú možnosť samokontroly.

Výsledky pre niekoľko hodnôt parametra a :

a	V	x	x
$a=0$	$V=[-4, -8]$	0	$-$
5			8
$a=0$	$V=[-2, 5; -5$	0	$-$
8	$]$		5
$a=2$	$V=[-1, 2]$	0	$-$
		2	$Algebraicky$ sme získali

tieto výsledky:

$$ax^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(ax + 4) = 0 \Leftrightarrow$$

Záver:

Nulové body: $x = 0$ alebo $x = -4/a$

Vrchol paraboly: $ax^2 + 4x =$

$$= a \left(x^2 + \frac{4}{a}x \right) = a \left[\left(x + \frac{2}{a} \right)^2 - \frac{4}{a^2} \right] = a \left(x + \frac{2}{a} \right)^2 - \frac{4}{a}$$

$$V = [-2/a; -4/a]$$

a) $y = ax^2 + 4x$; $\{a: -6, 3, 1\}$,

Aby sme zohľadnili všetky modifikácie problému vložíme do kresliča grafov ešte zápis $y = a \cdot x^{**2} + 4x$ $\{a: -6, 3, 1\}$, zohľadňujúci aj záporné hodnoty parametra a , o ktorých sme v predchádzajúcom obrázku neuvažovali.

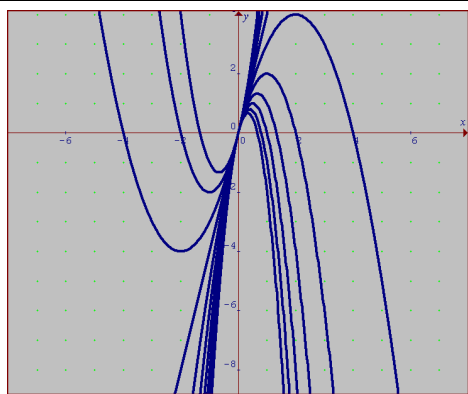
Záver:

ak $a < 0$ parabola je obrátená a otvorená nadol,

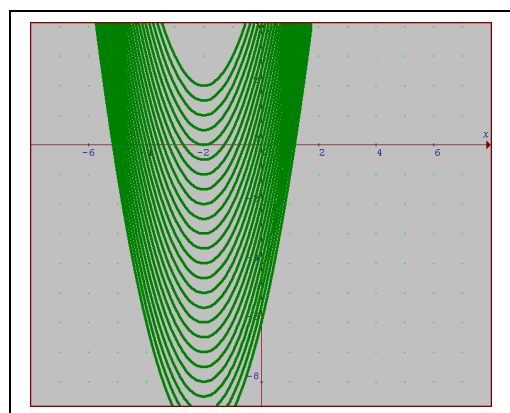
ak $a > 0$ parabola je otvorená nahor

ak $a = 0$ grafom je priamka; dostali sme totiž lineárnu funkciu $y = 4x$

Všetky vzorce uvedené vyššie pre vrchol paraboly a jej nulové body platia aj v tomto prípade.



b) $y = x^2 - 4x + a$; $\{a: -6, 6, 0.5\}$.



b) V tejto časti úlohy motivujeme a podnecujeme študentov otázkami typu: Aký je rozdiel medzi grafickou interpretáciou v prípade a) a b). Nájdite čo najviac odlišností! Čo ich spôsobilo?

Pre hodnoty parametra a zadáme interval tak, aby zahŕňal kladné, záporné aj racionálne čísla:

$$y = x^2 - 4x + a \quad \{a: -6, 6, 0.5\}.$$

Záver:

a) paraboly majú zhodný tvar (otočenie, natiahnutie) čo spôsobila zhoda v koeficiente a ,

b) vrchol parabol má x -ovú súradnicu vo všetkých prípadoch rovnú -2

c) doplnením na štvorec a určíme súradnice vrchola $V = [-2; (a-4)]$

d) priesečníky grafov s osou x určíme pomocou diskriminantu:

$$x_1 = -2 + \sqrt{4 - a}$$

$$x_2 = -2 - \sqrt{4 - a}$$

Môžeme opäť diskutovať o ich počte vzhľadom na hodnotu parametra a .

Obr.4.4:Riešenie príkladu.4.4

PRÍKLAD 4.5

Po nevydarenom štarte spadla balistická raketa na zem. Podľa údajov v čiernej skrinke boli parametre letu rakety nasledovné: funkcia vyjadrujúca závislosť výšky h rakety (v m) od času t (v sekundách), ktorý uplynul od jej štartu je daná predpisom: $h(t) = 480t - 16t^2$.

Do akej maximálnej výšky raketa vyletela?

RIEŠENIE

Úloha z reálneho života - má motivačnú funkciu. Vyžadujeme od študentov najskôr algebraické riešenie - zdôrazníme existenciu extrému kvadratickej funkcie v jej vrchole. Použijeme didaktický softvér *EG*, a jeho schopnosti určiť extrémy funkcií na kontrolu získaných výsledkov. Pri jeho použití najskôr aktivujeme okno *Range* a modifikujeme rozsahy na súradnicových osiach.

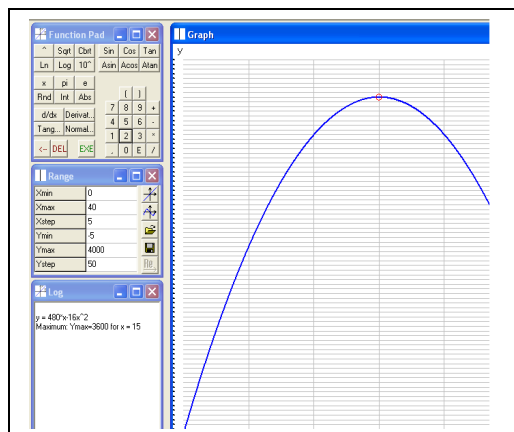
$$480t - 16t^2 = -16(t^2 - 30t) = -16[(t-15)^2 - 225] = -16(t-15)^2 + 3600 \Rightarrow$$

vrchol paraboly má súradnice: $V = [15, 3600]$

parabola je otočená a otvorená smerom nadol, vo vrchole má svoje MAXIMUM.

Záver: Raketa vyletela do maximálnej výšky 3600 metrov.

Program EG umožní nasledovnú vizualizáciu:



Obr.4.5: Dráha balistickej rakety

PRÍKLAD 4.6

Pre aké hodnoty parametra m majú grafy funkcií :

a) (1) $y = (x-1)^2 + 2$
 (2) $2x - y + m + 1 = 0$

b) (1) $y = (x-1)^2 + 1$
 (2) $y + 2mx - 1 = 0$

spoločný aspoň jeden bod? Aký je geometrický význam týchto úloh?

RIEŠENIE



Tento príklad vhodne syntetizuje vedomosti študentov z oblasti lineárnej ale tiež kvadratickej funkcie. Je zaujímavé, že hoci študenti (asi 10%) dokážu na výpočet úlohy celkom úspešne použiť klasický riešiteľský postup pre sústavy nelineárnych rovníc, nevedia postihnúť jej geometrický význam. To nasvedčuje na značný formalizmus pri jej riešení. Tento odstránime vďaka využitiu didaktického softvéru. Keďže väčšina študentov si s úlohou "nevie rady", vedíme s nimi najskôr diskusiu, počas ktorej v zadaní správne identifikujú predpis kvadratickej funkcie a množinu lineárnych funkcií. Pochopia tiež, že riešiť úlohu znamená určiť takú hodnotu parametra m , pre ktorý bude priamka $y = 2x + m + 1$ dotyčnicou k parabole $y = (x-1)^2 + 2$.

Využijeme program Graphmatica na vykreslenie množiny priamok $2x - y + m + 1 = 0$ a paraboly $y = (x-1)^2 + 2$. Získame tak grafický model úlohy. Tento pôsobí ako katalyzátor matematického myslenia. Väčšina študentov práve vďaka nemu pochopí, že treba nájsť dotykový bod paraboly s jednou z rovnobežných priamok. Nasleduje analytické riešenie kvadratickej rovnice vzhľadom na parameter m .

Klasický postup riešenia úlohy a):

Z lineárnej rovnice (2) vyjadríme $y = 2x + m + 1$ a dosadíme do (1); dostaneme

$$(x-1)^2 + 2 = 2x + m + 1 \text{ po úprave}$$

$$(3) \quad x^2 - 4x + 2 - m = 0$$

Daná sústava má práve jedno riešenie vtedy a len vtedy, keď má jedno riešenie rovnica (1).

To nastane len v prípade, že diskriminant $D = (-4)^2 - 4(2-m)$ je rovný nule.

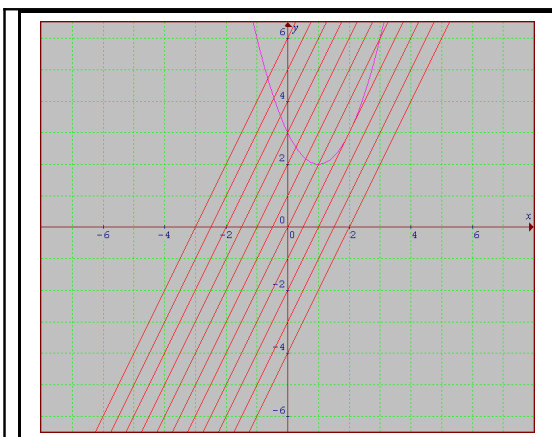
Teda: $16 - 8 + 4m = 0$

$$m = -2$$

Pre $m = -2$ dostávame rovnicu: $x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ a následne $y = 3$.

Zadanie b) je modifikáciou prípadu a). Skôr ako pristúpime k jeho riešeniu, realizujeme diskusiu o tom, čo majú obe úlohy spoločné a v čom sa odlišujú. Kľúčom k správnej odpovedi je opäť geometrická interpretácia. Kým v úlohe a) sa stretáme s množinou rovnobežných priamok (v predpise $y = ax + b$ lineárnej funkcie bol koeficient $a = 2$ konštantný a koeficient $b = m + 1$ sa menil), v úlohe b) máme zväzok priamok prechádzajúcich bodom $X[0, 1]$ (koeficient $a = -2m$ sa mení, $b = 1$ je konštantný).

Na obrázku 4.4.6 vidíme výstup (grafický model úlohy) získaný programom Graphmatica.

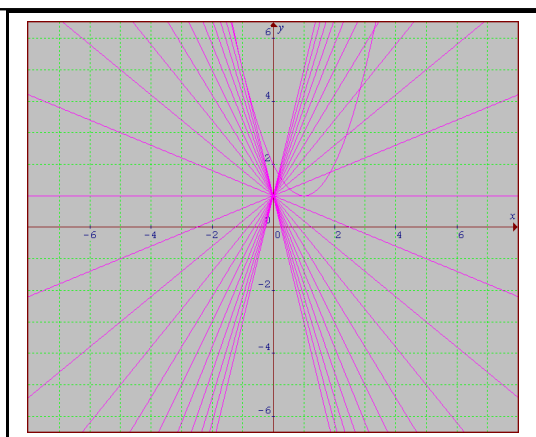


Záver:

Pre $m = -2$ dostávame rovnicu:

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ a následne } y = 3.$$

Výsledkom je jediný dotykový bod : $T_1[1, 2]$



Záver:

Existujú dve dotyčnice ku grafu paraboly $y = (x-1)^2 + 1$

teda musia existovať dve rôzne hodnoty parametra m , pre ktoré má úloha práve jedno riešenie.

Riešime kvadratickú rovnicu:

$$x^2 + x(2m-2) + 1 = 0$$

Vyhovujú parametre $m_1=0$ a $m_2=2$ a výsledkom sú dotykové body:

$T_1[1, 1]$ a $T_2[-1, 5]$.

Obr.4.6: Grafický model úlohy 4.6