

1 Funkcie - základné pojmy



Metodický zámer

Pojem funkcia je jeden z najdôležitejších matematických pojmov. Je nepostrádateľným v mnohých oblastiach vedy a života. Funkciami popisujeme biologické, ekonomické, fyzikálne či sociologické javy. Vďaka grafom funkcií môžeme ilustrovať a prezentovať mnohé problémy spoločenského a hospodárskeho života. Funkcie sú v rámci učiva na strednej škole zaradené a špirálovitou formou preberané postupne vo všetkých ročníkoch. V 1. ročníku sa študenti zoznámia s definíciou a základnými pojmami ako: funkčná závislosť, funkcia ako predpis, ako relácia, príklady rôznych funkcií, definičný obor a obor hodnôt funkcie, spôsoby zapisovania funkcií, pravouhlý súradnicový systém v rovine, graf funkcie. Navrhované aktivity majú za cieľ na veľmi konkrétnych úlohách z praxe a pomocou didaktického softvéru precvičiť a fixovať spomenuté pojmy. Inovácia procesu spočíva v implementovaní aktivít, ktoré umožnia pojmy lepšie vizualizovať.



Čo by mal študent vedieť - stručný sylabus

<p><u>Funkcia f reálnej premennej x je:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • každé zobrazenie f v množine všetkých reálnych čísel, • množina f všetkých usporiadaných dvojíc $[x,y] \in R \times R$, pre ktoré platí: ku každému $x \in R$ existuje najviac jedno $y \in R$ tak, že $[x,y] \in f$ • predpis f, ktorý každému $x \in R$ priradzuje najviac jedno $y \in R$ tak, že $y = f(x)$ 	<p><u>Definičný obor funkcie f ($D(f)$)</u> je množina všetkých $x \in R$, ku ktorým existuje práve jedno $y \in R$ tak, že $[x,y] \in f$; ($y = f(x)$).</p> <p><u>Obor hodnôt funkcie f ($H(f)$)</u> je množina všetkých $y \in R$, ku ktorým existuje aspoň jedno $x \in R$ tak, že $[x,y] \in f$; ($y = f(x)$).</p> <p><u>Graf funkcie f</u> je množina všetkých bodov $X [x,y]$, ktorých súradnice vyhovujú rovnici $y = f(x)$.</p>
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------



Inovácia vyučovacieho procesu

Všetky uvádzané príklady majú za cieľ upevniť vnímanie funkcie f ako špecifického priradenia, ktoré každému x z množiny nezávislých premenných $D(f)$ priradí práve jeden prvok y z množiny závislých premenných. Výhodou využitia počítača a zvlášť tabuľkového procesora Excel je, že študent si pri vytváraní grafu funkcie aktívne uvedomuje a rozlišuje medzi nezávislou $x \in (D(f))$ a závislou premennou $y \in H(f)$ v uvažovanom priradení. Vďaka konštrukcii tabuľky vnímajú zreteľnejšie funkciu ako priradenie, či množinu usporiadaných dvojíc istých vlastností, čo je vyhovujúce pre jej hlbšie porozumenie.

Príkladmi z praktického života sú zase motivovaní uvedomovať si funkciu ako pojem prítomný na každom kroku.

Vyučovaciu hodinu s nižšie prezentovaným obsahom je vhodné zaradiť pri výučbe tematického celku *Funkcie, rovnice a nerovnice I* v 1.ročníku gymnázia (alebo v kvinte osemročného gymnázia), tiež v 2. ročníka pri téme *Funkcie, rovnice, nerovnice II* (alebo v sexte), eventuálne tiež na *Cvičeniach z matematiky* vo 4. ročníku alebo v oktáve pri téme *Funkcie, vlastnosti funkcií*.



Riešené príklady

PRÍKLAD 1.1

Mária si zaliala kávu. Vtom jej zazvonil telefón a tak ju zabudla vypiť. Teplota kávy T v závislosti na čase t sa menila podľa údajov v tabuľke:

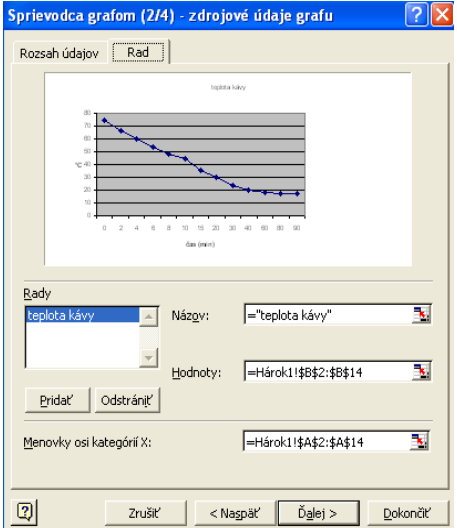
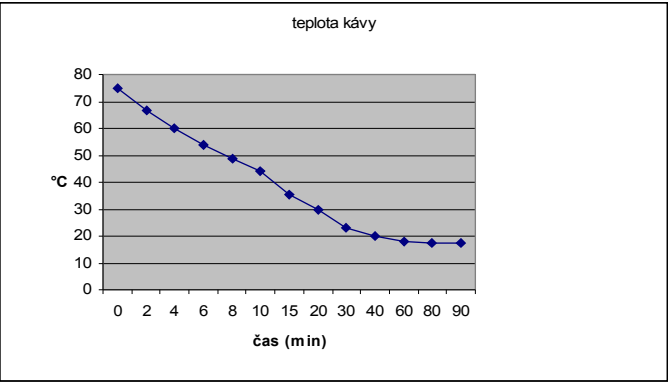
čas t (min)	0	2	4	6	8	10	15	20	30	40	80	90
teplota T (°C)	75,0	66,8	59,4	53,7	48,6	44,1	35,6	29,8	23,2	18,1	17,6	17,6

- Zostrojte graf funkcie!
- Akú teplotu mala káva asi 12 minút po zaliatí?
- Mária pije kávu najradšej pri teplote medzi 36°C a 43°C. V akom čase od zaliatia ju má vypiť?
- Môžeme z daného grafu vyčítať, aká je teplota v miestnosti?
- Určite obor hodnôt funkcie $T(t)$.

RIEŠENIE

Nakoľko funkčná závislosť v tomto prípade je popísaná tabuľkou usporiadaných dvojíc, využijeme pri tvorbe grafu Excel. Študenti konštruujú tabuľku argumentov funkcie a príslušných funkčných hodnôt. Tento proces im umožňuje lepšie postihnúť podstatu pojmu funkcie. Následne použijú *Sprievodcu grafom* tabuľkového procesoru Excel. Všetky kroky, ktoré vedú k riešeniu zadania sú detailne popísané a zachytené na obrázku 1.

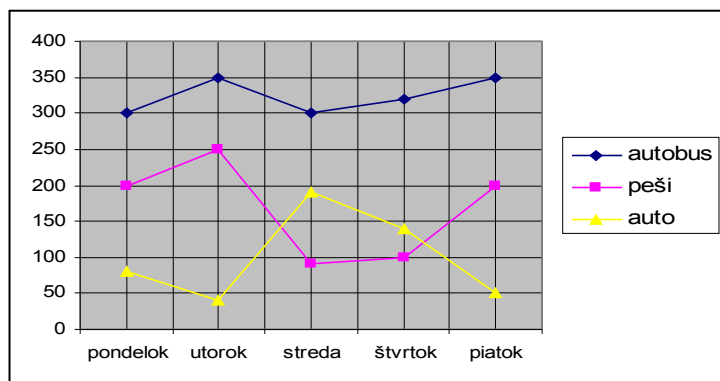
aktivita	zápis v excelovskom hárku	reprezentácia na obrazovke počítača
vytvorenie tabuľky	<ul style="list-style-type: none"> Do stĺpca A - bunky A2:A14 vkladáme hodnoty nezávislej premennej "t" (čas v min), Do stĺpca B - bunky B2:B14 vložíme hodnoty závislej premennej T (teplota v °C) 	

vytvorenie grafu funkcie	<ul style="list-style-type: none"> • vyberieme z Menu <i>Spríevodcu grafom</i>, zvolíme požadovaný typ grafu, • stlačíme <i>"Ďalej"</i>, • definujeme <i>Rozsah údajov</i> • pokračujeme cez <i>Možnosti grafu</i>, • následne stlačíme <i>"Dokončiť"</i> 	
graf funkcie		
analýza grafu funkcie a riešenie úloh b),c),d),e)	<p>Záver:</p> <p>b) $(44,1 - 35,6)/5 = 1,7$, teda po 12 minútach mala káva teplotu približne $44,1 - 3,4 = 40,7$</p> <p>c) Mária by mala vypiť kávu nie skôr ako 10 minút po zaliatí a najneskôr 15 minút po zaliatí</p> <p>d) teplota v miestnosti bola približne 17,6°C</p> <p>e) obor hodnôt funkcie $H(f) = < 75; 17,6 >$</p>	

Obr.1: Postup riešenia v príklade 1.1

PRÍKLAD 1.2

Zobrazený graf prezentuje údaje pochádzajúce z prieskumu, ktorý udáva vzťah medzi počtom detí chodiacich do školy istým spôsobom v istých dňoch týždňa. Analyzujte graf a odpovedzte na otázky:



- Označte všetky tri funkcie a určite ich definičný obor a obor hodnôt, najväčšiu a najmenšiu hodnotu každej z nich! Myslíte si, že bolo vhodné pospájať body grafu úsečkami?
- V ktorý deň prišlo do školy najviac detí pešo a najmenej autom? Aké myslíš, že bolo v ten deň počasie?
- Ktorá forma dopravy počas týždňa vykazuje najmenšie odchýlky?
- V piatok bolo neprítomných 15 detí a 30 detí prišlo do školy na bicykli. Koľko detí celkom navštevuje túto školu?
- Koľko detí priemerne prišlo v uplynulom týždni do školy pešo, autobusom či autom?

RIEŠENIE



Táto úloha je vhodná pre spoločnú aktivitu s využitím dataprojektoru. Tento je vítanou pomocou ba priam neodmysliteľnou súčasťou hodiny vedenej v počítačovej učebni, umožňuje nám pružne reagovať na otázky študentov, podstatne skvalitniť výučbu.

Študentom dáme najskôr priestor pre samostatné uvažovanie o riešení. Následne usmerňujeme vhodnými otázkami heuristickú diskusiu.

V príklade diferencujeme tri funkcie, ktoré majú rovnaký definičný obor (dni v týždni). Obor funkčných hodnôt je množina prirodzených čísel (počet detí), ktoré prišli v daný deň do školy istým spôsobom.

Úlohou študentov je použiť matematický jazyk a na príklade z každodennej praxe identifikovať a správne použiť pojem argument funkcie, definičný obor a obor hodnôt funkcie. Uvedomiť si, že úlohou funkcií je popisovať a vyjadrovať vzťahy medzi dvoma množinami údajov (premenných).

a) Označíme postupne funkcie $a(x)$ - funkciu vyjadrujúcu závislosť počtu detí prichádzajúcich do školy v jednotlivé dni autom, $b(x)$ - autobusom a $p(x)$ peši. definičným oborom všetkých troch funkcií je množina $A = \{\text{pondelok, utorok, streda, štvrtok, piatok}\}$.

$$\max a(x) = 200, \min a(x) = 40; H(a) = \{75, 50, 200, 150, 50\}$$

$$\max b(x) = 350, \min b(x) = 300; H(b) = \{300, 350, 320\}$$

$$\max p(x) = 250, \min p(x) = 100; H(p) = \{200, 250, 100\}$$

b) V utorok prišlo do školy najviac detí pešo a najmenej autom; môžeme teda predpokladať, že bolo dobré počasie.

c) Funkčné hodnoty funkcie $b(x)$ (dochádzka do školy autobusom) sa pohybujú v rozpätí intervalu $\langle 300, 350 \rangle$, teda vykazuje najmenšie odchýlky.

d) Počet detí v škole: $50 + 200 + 350 + 45 = 645$

e) pešo: $(200 + 250 + 100 + 100 + 200) / 5 = 850 / 5 = 170$

autom: $(80 + 40 + 200 + 140 + 50) / 5 = 510 / 5 = 102$

autobusom: $(300 + 350 + 300 + 325 + 350) / 5 = 1625 / 5 = 325$

PRÍKLAD 1.3.

Parašutista po zoskoku z lietadla istý čas padá voľným pádom. Po istom čase otvára padák. V nasledujúcej tabuľke sú zaznamenané údaje o jeho pohybe:

t - čas padania [s]	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
s - prejdená dráha [m]	0	1	4	9	15	25	36	42	46	49	52

Zostroj graf funkcie a zistite z neho:

- Kedy približne parašutista otvoril padák?
- Akú najväčšiu rýchlosť parašutista dosiahol?

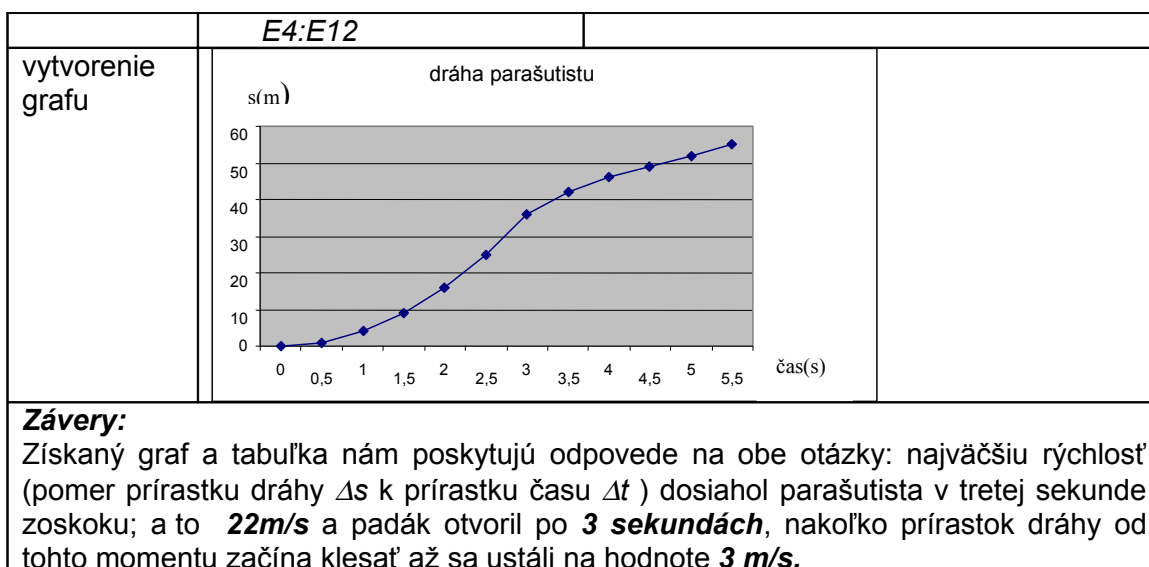
RIEŠENIE



Metodickým zámerom je dosiahnutie podobných cieľov ako v predchádzajúcom príklade. Okrem toho sa študenti na intuitívnej úrovni stretávajú v tejto úlohe s pojmom monotónnosť funkcie, prírastok argumentu či funkčnej hodnoty. Úloha je vhodná aj ako propedeutické cvičenie pri zoznamovaní sa s pojmom derivácia funkcie.

Pri riešení využijeme tabuľkový procesor Excel. Uvažujeme dráhu s prejdenú parašutistom ako funkciu času t . Registrujeme, že parašutistu sa najskôr približuje k zemi so vzrastajúcou rýchlosťou, ktorá sa po 3 sekundách od zoskoku prudko znižuje. Rýchlosť v pádu parašutistu určíme ako podiel $v = \Delta s / \Delta t$. Obr.2 zaznamenáva postup riešenia úlohy.

činnosť	zápis v Exceli	reprezentácia na obrazovke																																																																	
vytvorenie tabuľky	<ul style="list-style-type: none">do stĺpca A; buniek A2:A12 vložíme hodnoty argumentu t (čas) funkcie,do stĺpca B; buniek B2:B12 vložíme funkčné hodnoty t.j. prejdenú dráhu s,stĺpec C; do bunky C3 vložíme prírastok dráhy $= B3 - B2$ a následne prekopírujeme do buniek C4:C12,stĺpec D; do bunky D3 vložíme prírastok času $= A3 - A2$ a skopírujeme do buniek D4:D12stĺpec E; do bunky E3 vložíme podiel prírastku dráhy a zmeny času $= C3/D3$ a skopírujeme do	<table><tr><th>t (s)</th><th>s (m)</th><th>Δs</th><th>Δt</th><th>$v = \Delta s / \Delta t$</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>0,5</td><td>1</td><td>1</td><td>0,5</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>4</td><td>3</td><td>0,5</td><td>6</td></tr><tr><td>1,5</td><td>9</td><td>5</td><td>0,5</td><td>10</td></tr><tr><td>2</td><td>16</td><td>7</td><td>0,5</td><td>14</td></tr><tr><td>2,5</td><td>25</td><td>9</td><td>0,5</td><td>18</td></tr><tr><td>3</td><td>36</td><td>11</td><td>0,5</td><td>22</td></tr><tr><td>3,5</td><td>42</td><td>6</td><td>0,5</td><td>12</td></tr><tr><td>4</td><td>46</td><td>4</td><td>0,5</td><td>8</td></tr><tr><td>4,5</td><td>49</td><td>3</td><td>0,5</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>52</td><td>3</td><td>0,5</td><td>6</td></tr><tr><td>5,5</td><td>55</td><td>3</td><td>0,5</td><td>6</td></tr></table>	t (s)	s (m)	Δs	Δt	$v = \Delta s / \Delta t$	0	0				0,5	1	1	0,5	2	1	4	3	0,5	6	1,5	9	5	0,5	10	2	16	7	0,5	14	2,5	25	9	0,5	18	3	36	11	0,5	22	3,5	42	6	0,5	12	4	46	4	0,5	8	4,5	49	3	0,5	6	5	52	3	0,5	6	5,5	55	3	0,5	6
t (s)	s (m)	Δs	Δt	$v = \Delta s / \Delta t$																																																															
0	0																																																																		
0,5	1	1	0,5	2																																																															
1	4	3	0,5	6																																																															
1,5	9	5	0,5	10																																																															
2	16	7	0,5	14																																																															
2,5	25	9	0,5	18																																																															
3	36	11	0,5	22																																																															
3,5	42	6	0,5	12																																																															
4	46	4	0,5	8																																																															
4,5	49	3	0,5	6																																																															
5	52	3	0,5	6																																																															
5,5	55	3	0,5	6																																																															



Obr.2: Postup riešenia príkladu 1.3

PRÍKLAD 1.4

Určite definičné obory funkcií a výsledky overte pomocou kresliča grafov:

a) $y = 1/(x^3 - 4x)$

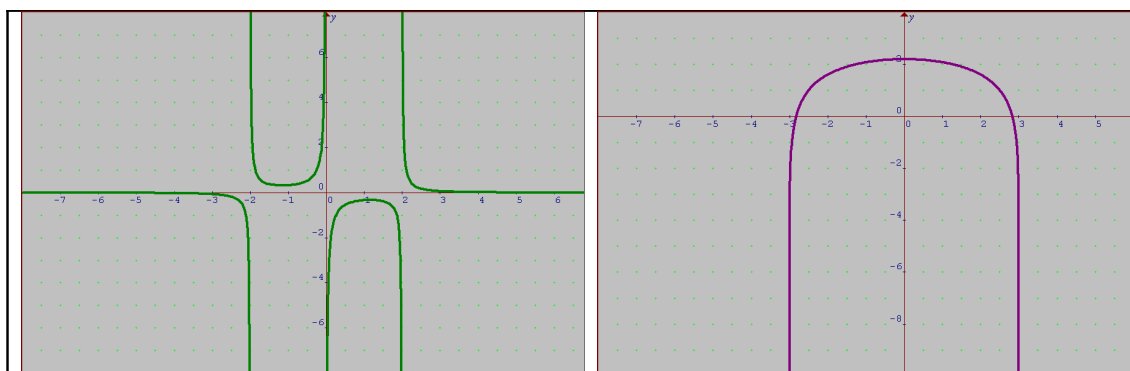
b) $y = \ln(9-x^2)$

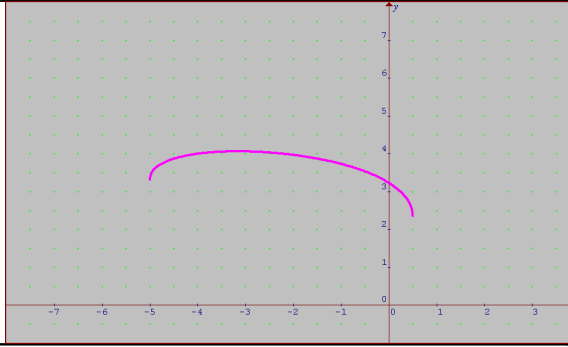
c) $y = \sqrt{1-2x} + \sqrt{x+5}$

RIEŠENIE

Klasická úloha na určovania definičného oboru funkcie obohatená vďaka využitiu vhodného kresliča grafov o možnosť "na vlastné oči" sa presvedčiť o priebehu každej z vyšetrovaných funkcií.

Študenti najskôr algebraicky vypočítajú definičný obor funkcií, následne využijeme didaktický softvér Graphmatica na vizualizáciu grafov. Vedeťme so študentmi diskusiu o priebehu funkcií v okolí "podozrivých" bodov. Majú možnosť vnímať, ako sa podmienky, o ktorých uvažujú počas určovania definičného oboru funkcie prejavujú na jej grafe. Počítač tak napomáha neformálnejšie chápanie problematiky, otvára priestor pre riešenie podstatne väčšieho množstva úloh a autokontrolu študenta.



<p>Záverý:</p> <p>a) $y = 1/(x^3 - 4x)$ $x^3 - 4x \neq 0 \Leftrightarrow x \cdot (x^2 - 4) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \vee x \neq 2 \vee x \neq -2$; $D(f) = \mathbb{R} - \{-2, 0, 2\}$</p>	<p>b) $y = \ln(9 - x^2)$ $9 - x^2 > 0 \Leftrightarrow 9 > x^2 \Leftrightarrow x < 3$ $D(f) = (-3, 3)$</p>
	<p>c) $y = \sqrt{1 - 2x} + \sqrt{x + 5}$</p> <p>$(1 - 2x) \geq 0 \wedge (x + 5) \geq 0 \Leftrightarrow (1 \geq 2x) \wedge (x \geq -5) \Leftrightarrow x \leq 1/2 \wedge x \geq -5$ $D(f) = [-5, 1/2]$</p>

Obr.3: Grafická interpretácia riešenia príkladu 1.4