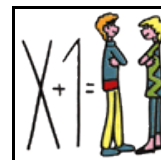


## 5 Sústavy lineárnych rovníc s dvoma neznámymi



Pri riešení sústav lineárnych rovníc sú študenti väčšinou úspešní; ľahko zvládajú základné metódy riešenia (substitučná, sčítacia). Problém často nastane až v momente, keď treba rozhodnúť o počte riešení danej sústavy. Toto je signál pre učiteľa, poukazujúci na nedostatočné a formálne chápanie tejto pomerne jednoduchšej problematiky. Hoci je časová dotácia pri vyučovaní tejto témy dostačujúca; (učivo sa preberá v 1. ročníku gymnázia (septime) v rámci témy *Funkcie, rovnice a nerovnice I*), navrhujeme zaradiť do procesu aspoň jednu vyučovaciu hodinu v počítačovej učebni, v rámci ktorej si študenti precvičujú grafickú metódu riešenia systémov rovníc. Ďalšou vhodnou aktivitou v rámci tejto témy je prezentovať pojem determinant sústavy lineárnych rovníc, podčiarknuť vzájomnú zvisanosť pojmov: lineárna funkcia, rovnica priamky v smernicovom a vo všeobecnom tvare, hodnota determinantu sústavy a tomu zodpovedajúci počet riešení sústavy.



### Čo by mal študent vedieť - stručný sylabus

Sústavu lineárnych rovníc s dvoma neznámymi má tvar:	Riešenie sústav pomocou determinantov
$a_1x + b_1y = c_1$ $a_2x + b_2y = c_2$ kde $a_1^2 + b_1^2 > 0$ a $a_2^2 + b_2^2 > 0$ , $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in R$ sú koeficienty sústavy Koreňom sústavy je taká dvojica $[x, y]$ , ktorá patrí do oborov pravdivosti oboch rovníc sústavy Metódy riešenia systémov lineárnych rovníc:	Číslo $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot a_2$ nazývame <u>determinantom druhého stupňa</u> . <u>Cramerova metóda</u> riešenia sústav lineárnych rovníc spočíva v nasledujúcom:
<ul style="list-style-type: none"> <li>sčítacia (adičná) metóda,</li> <li>dosadzovacia (substitučná) metóda,</li> <li>porovnávacia metóda,</li> <li>riešenie sústav rovníc pomocou determinantov,</li> <li>grafická metóda.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Pri riešení sústavy spočítame tri determinanty:                             <math display="block">D = \begin{vmatrix} a_1 &amp; b_1 \\ a_2 &amp; b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot a_2</math> <math display="block">D_x = \begin{vmatrix} c_1 &amp; b_1 \\ c_2 &amp; b_2 \end{vmatrix} = c_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot c_2</math> <math display="block">D_y = \begin{vmatrix} a_1 &amp; c_1 \\ a_2 &amp; c_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot c_2 - c_1 \cdot a_2</math> </li> <li>Následne, ak <math>D \neq 0</math> potom riešenie <math>[x, y]</math>:                             <math display="block">x = \frac{D_x}{D}; y = \frac{D_y}{D}</math> </li> </ul>



## AKTIVITA 5.1

Zavedenie pojmu determinant sústavy lineárnych rovníc, analýza vzťahu hodnoty determinantu k počtu riešení danej sústavy.

Vyučujúci spustí program Graphmatica, pri práci využíva dataprojektor. Predstaví tri dvojice lineárnych funkcií a zobrazí ich grafy:

a) $y = 2 - x$	b) $4x - 2y = -4$	c) $2y - 3x = 3$
$y = x - 1$	$y = 2x + 2$	$3x - 2y = 3$

Počas niekoľkých nasledujúcich minút si študenti formou heuristickej besedy prostredníctvom obrázkov pripomenú známe vlastnosti lineárnej funkcie a geometrickú interpretáciu systému lineárnych rovníc. Je vhodné položiť študentom otázky typu:

*Je nejaký rozdiel medzi všeobecným a smernicovým tvarom rovnice priamky?*

Prax potvrdzuje, že správne chápanie rozdielu medzi oboma tvarmi a predovšetkým upriamenie pozornosti na špecifické tvary priamok ako sú  $x = a$  (priamka rovnobežná s osou  $y$  nie je funkciou), alebo  $y = b$  umožňujú lepšie pochopenie danej problematiky. Učiteľ následne zdôrazní informáciu o priesečníkoch priamok (získanú aplikáciou položky *Find Intersection* z menu *Tools*) zobrazenú v dolnej lište okna *Graph*. Vyzve študentov, aby vypočítali determinanty sústav a uvažovali o vzťahu hodnoty determinantu sústavy k počtu priesečníkov priamok. Ďalšími otázkami v rámci heuristickej besedy teda môžu byť: *Čo viete povedať o determinante sústavy, ak sú priamky totožné a čo v prípade, ak sú rovnobežné?*

Študenti v závere aktivity dospejú samostatne k správnym zovšeobecneniam.

<p><b>Equation(s):</b> <math>y = 2 - x</math> (1) <math>y = x - 1</math> (2) <u><math>D = -2, D_x \neq 0, D_y \neq 0</math></u></p> <p><b>Find Intersection:</b> <math>y = x - 1</math> <math>y = 2 - x</math></p> <table><tr><td><math>x</math></td><td><math>y</math></td></tr><tr><td>1,5</td><td>0,5</td></tr></table> <p><b>Priamky sú rôznobežky.</b> <b>Jediné riešenie.</b> <u><math>P = \{1,2; 0,5\}</math></u></p>	$x$	$y$	1,5	0,5	<p><b>Equation(s):</b> <math>4x - 2y = -4</math> (1) <math>y = 2x + 2</math> (2) <u><math>D = 0, D_x = D_y = 0</math></u></p> <p><b>Priamky sú totožné.</b> <b>Nekonečne veľa riešení.</b> <u><math>P = R</math></u></p>	<p><b>Equation(s):</b> <math>2y - 3x = 3</math> (1) <math>3x - 2y = 3</math> (2) <u><math>D = 0, D_x \neq 0, D_y \neq 0</math></u></p> <p><b>Priamky sú rovnobežné.</b> <b>Neexistuje žiaden spoločný bod.</b> <u><math>P = \emptyset</math></u></p>
$x$	$y$					
1,5	0,5					

Obr.5.1: Grafické riešenie príkladu.5.1

V ďalšej časti hodiny učiteľ delí triedu na skupiny. Každá skupina dostane kartičku s tromi úlohami. Viacero slovných úloh opisujúcich situácie z každodennej praxe sa rieši pomocou sústav lineárnych rovníc. Využijeme tento fakt na vhodnú motiváciu a zadáme aj úlohy tohto typu. Treťou v poradí bude sústava lineárnych rovníc s parametrom, pri ktorej sa najlepšie poukáže na význam a využitie determinantu sústavy. Študenti riešia všetky zadané úlohy najskôr algebraicky a neskôr graficky overujú svoje výsledky pomocou programu Graphmatica. Nasleduje spoločné vyhodnotenie výsledkov. Uvádzame jednu sadu príkladov



### Riešené príklady

#### PRÍKLAD 5.1

Riešte algebraicky, pomocou determinantu a následne graficky sústavy rovníc:

a)  $0,5x + y = -1$   
 $2y + x = 0$

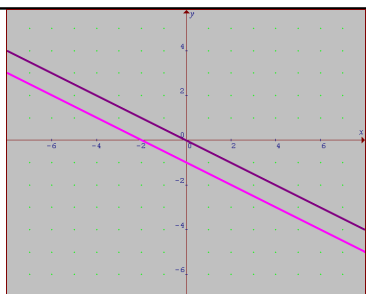
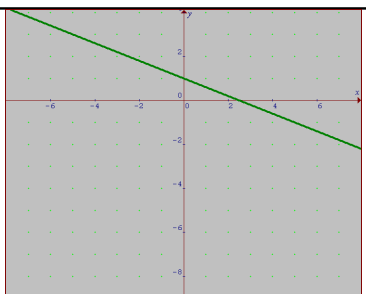
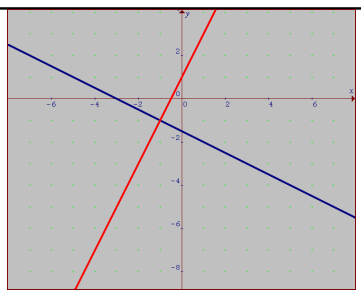
b)  $y = 1 + -2/5x$   
 $2x + 5y = 5$

c)  $x + 2y = -3$   
 $2x - y = -1$

#### RIEŠENIE



Pri riešení úlohy si študenti uvedomujú vzťah medzi výsledkami získanými klasickými metódami riešenia (dosadzovania alebo sčítavacia metóda), Cramerovou metódou a grafickou metódou. Vyžadujeme od nich vytvorenie tabuľky výsledkov, v ktorej budú uvedené ako hodnoty príslušných determinantov, tak aj počet riešení sústavy, grafická interpretácia sústavy (rovnobežné, totožné, rôznobežné priamky).

		
$D = 0, D_x \neq 0, D_y \neq 0$ $P = \emptyset$ Priamky sú rovnobežné	$D = 0, D_x = D_y = 0$ $P = R$ Priamky sú totožné	$D = -2, D_x \neq 0, D_y \neq 0$ $P = \{-1, -1\}$ Priamky sú rôznobežné

Obr.5.2: Grafické riešenie príkladu 5.1

#### PRÍKLAD 5.2

Robotník kopal studňu. Keď sa ho okoloidúci opýtal aká hlboká bude studňa odpovedal: Meriam 1,8 metra. Keď vykopem celú studňu, moja hlava bude o toľko pod povrchom zeme, o koľko je teraz, keď som sa dostal do polovice studne nad zemou. Vypočítajte hĺbku studne.

#### RIEŠENIE

Úlohu riešime najskôr algebraicky. Didaktický softvér je využitý vo funkcii autokontroly, pre grafickú interpretáciu a overenie správnosti výsledkov. Samotné

riešenie sústavy nepredstavuje pre študentov taký problém, ako zostavovanie sústavy lineárnych rovníc.

Premennou  $y$  označíme hĺbku studne, premennou  $x$  hĺbka toho fragmentu studne, ktorý sa nachádza medzi hlavou robotníka a povrchom zeme. Zo zadania dostávame rovnice:

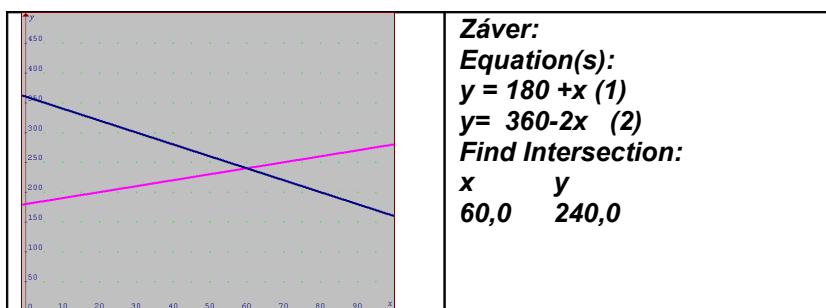
$$\begin{aligned} y &= 180 + x \\ y/2 &= 180 - x/2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 180 + x \quad / \cdot 2 \\ y &= 360 - 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2y &= 360 + 2x \\ y &= 360 - 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3y &= 720 \\ y &= 240 \end{aligned}$$

**Hĺbka studne bola 2,4 metra.**



Obr.5.3:Riešenie príkladu 5.2 programom Graphmatica

### PRÍKLAD 5.3

Zistite, pre aké hodnoty parametra  $m$  majú sústavy :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } mx + 2y = 3 & \text{b) } mx + 2y = 1 & \text{c) } x + y = m \\ x + 4y = 4 & 2x + my = 10 & x - 3y = 5 \end{array}$$

jediné riešenie?

### RIEŠENIE



Úloha poukazuje na prednosti použitia Cramerovho pravidla pri riešení systémov lineárnych rovníc s parametrom. Didaktický softvér umožní vytvoriť heuristickú simuláciu problému; použijeme schopnosť programu vykresliť *jednparametrický systém kriviek*  $F(x,y,m)$ . Hodnoty parametra  $m$  zadávame v textovom riadku formou podmienky v tvare **{m: min, max, krok}**. Študenti môžu pozorovať aké zmeny grafov spôsobuje zmena hodnoty parametra  $m$ , zopakovať si poznatky o lineárnej funkcii. Táto aktivita poukazuje na to, ako počítačové technológie dávajú priestor na efektívnejšie, mnohostrannejšie opakovanie a upevňovanie už známych alebo súvisiacich matematických pojmov z predošlého vyučovacieho procesu. Študenti nielen precvičujú Crammerovo pravidlo, registrujú aj geometrický význam systémov lineárnych rovníc s dvoma neznámymi s parametrom, opätovne uvažujú o lineárnej funkcii a jej vlastnostiach.

Klasické riešenie pomocou determinantov:

$$a) \quad D = \begin{vmatrix} m & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4m - 2$$

$$D \neq 0 \Leftrightarrow 4m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow 4m \neq 2 \Leftrightarrow m \neq 1/2$$

Existuje práve jedno riešenie sústavy, ak  $m \in \mathbb{R} \wedge m \neq 1/2$

$$b) \quad D = \begin{vmatrix} m & 2 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m^2 - 4$$

$$D \neq 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2 \wedge m \neq -2$$

Existuje práve jedno riešenie sústavy, ak  $m \in \mathbb{R} \wedge m \neq -2 \wedge m \neq 2$

$$c) \quad D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -4 \quad D \neq 0$$

Existuje práve jedno riešenie sústavy pre akékoľvek  $m$ , ak  $m \in \mathbb{R}$

a) Najskôr zostrojíme graf funkcie:  $x+4y = 4$   
a tiež grafy funkcií:

$$m \cdot x + 2 \cdot y = 3 \quad \{m: 1, 3, 1\}$$

$$m \cdot x + 2 \cdot y = 3 \quad \{m: 0, 2, 0.5\}$$

pre hodnoty parametrov  $m=1, m=2, m=3,$   
 $m=0, m=0.5, m=1.5$

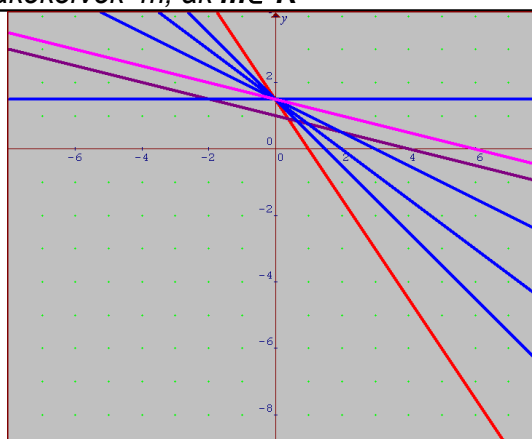
Položíme študentom otázky typu:

Ako sa mení tvar grafu priamky pre rôzne hodnoty parametra  $m$ ?

Aký je vzťah zväzku priamok ku priamke  $x+4y = 4$ ?

Využijeme farebné rozlíšenie grafov a zakreslíme zvlášť priamku pre  $m = 0.5$

$$0.5 \cdot x + 2 \cdot y = 3$$



**Záver:**

Registrujeme dve farebne rozlíšené rovnobežné priamky:  $x+4y=4$  a  $0.5x+2y=3$  pre hodnotu parametra  $m = 0.5$

$\Rightarrow$  neexistuje priesečník týchto priamok, sústava nemá riešenie;

c) Postupujeme obdobne:

Znázorníme priamku  $x - 3y = 5$

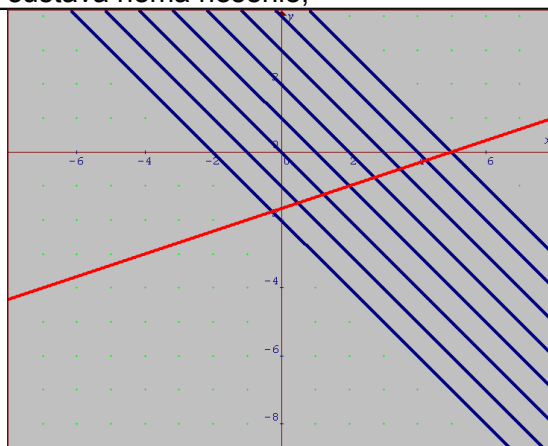
a následne niekoľko ďalších priamok tvaru  $x + y = m \quad \{m: -2, 5, 1\}$

Grafická interpretácia vhodne potvrdzuje existenciu riešenia pre akúkoľvek hodnotu parametra  $m$ ;

**Záver:**

**Priamka  $x - 3y = 5$  (vyznačená červenou farbou) je rôznobežná s ktoroukoľvek priamkou z množiny priamok  $x + y = m$**

$\Rightarrow$  existuje práve jeden spoločný bod oboch priamok



b) Postupne znázorníme množinu priamok:

$$mx+2y=1 \quad \{m: 1, 3, 1\}$$

$$2x+my=10 \quad \{a: 1, 3, 1\}$$

Farebne odlíšime špeciálne prípady.

Dvojicu priamok pre ktoré platí:  $D=0$

$$-2x+2y=1$$

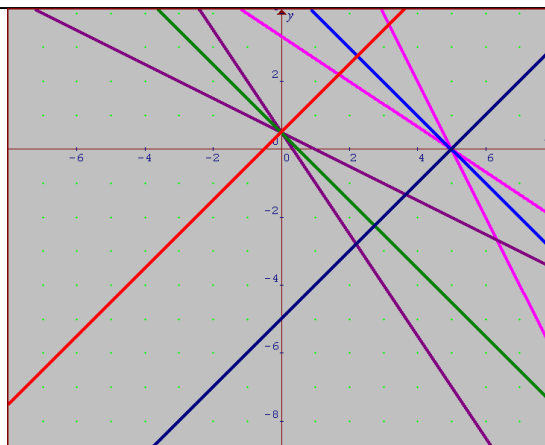
$$2x-2y=10$$

$$2x+2y=10$$

$$2x+2y=1$$

**Záver:**

Priamky  $mx+2y=1$  a  $2x+my=10$  sú rovnobežky okrem prípadov, ak  $m=2$  alebo  $m=-2$  kedy sa jedná o rovnobežné priamky.



Obr.5.4: Riešenie príkladu 5.3



Zaujímavým a užitočným cvičením pri preberaní tejto témy je určovanie množín bodov istých vlastností, ktoré sú dané výrazmi s absolútnymi hodnotami. Študenti tak precvičujú a opakujú problematiku absolútnej hodnoty čísla, súčasne si uvedomujú jej výhody pri zápise takýchto množín bodov v skrátenej forme. Uvedenú aktivitu zaradíme do vyučovacieho procesu pri téme *Absolútna hodnota čísla, alebo Rovnice s absolútnymi hodnotami* (1.ročník gymnázia alebo kvinta) Málo ktorí študenti si totiž uvedomujú, že napríklad matematický zápis  $|x| + |y| = 4$  vyjadruje množinu bodov, ktoré tvoria štvorec a podobne.

#### PRÍKLAD 5.4

Určite algebraicky a následne narysujte pomocou didaktického softvéru množinu všetkých bodov v rovine, ktorých súradnice  $x, y$  vyhovujú rovniciam:

a)  $|x| + |y| = 4$

b)  $|x| - |y| = 5$

c)  $|x + y| = 4$

d)  $|x - y| = 4$

f)  $|x + y| + |x| = 4$

g)  $|x - y| - |x| = 4$

#### RIEŠENIE

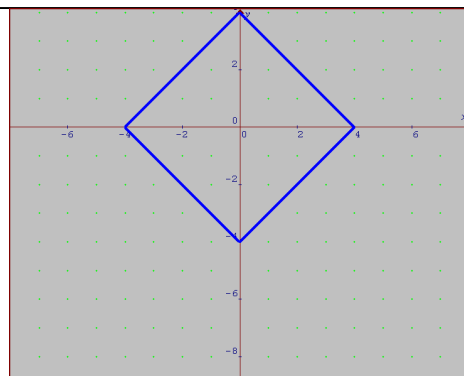
Pri riešení si študenti pripomenú vedomosti o absolútnej hodnote čísla, lineárnej funkcii, kartézskom súradnicovom systéme. Najskôr algebraicky vyjadrujú množiny bodov daných vlastností pomocou sústav lineárnych rovníc. Následne ich zakresľujú do grafu. V prípade problémov im môžeme navrhnúť aj metódu "cesty späť, od výsledku k riešeniu" využívajúc vizualizáciu problému programom Graphmatica.

a)  $|x| + |y| = 4 \Leftrightarrow$

1.  $x > 0 \wedge y > 0 \Leftrightarrow x + y = 4$  a zároveň  $x, y$  patria do 1. kvadrantu; úsečka A[0,4], B[4,0]
2.  $x > 0 \wedge y < 0 \Leftrightarrow x - y = 4$  a zároveň  $x, y$  patria do 4. kvadrantu; úsečka C[0,-4], B[4,0]
3.  $x < 0 \wedge y < 0 \Leftrightarrow -x - y = 4$  a zároveň  $x, y$  patria do 3. kvadrantu; úsečka D[-4,0], C[0,-4]
2.  $x < 0 \wedge y > 0 \Leftrightarrow -x + y = 4$  a zároveň  $x, y$  patria do 2. kvadrantu; úsečka D[-4,0], A[0,4]

**Záver:**

**Riešením sú body ležiace na obvode štvorca;**



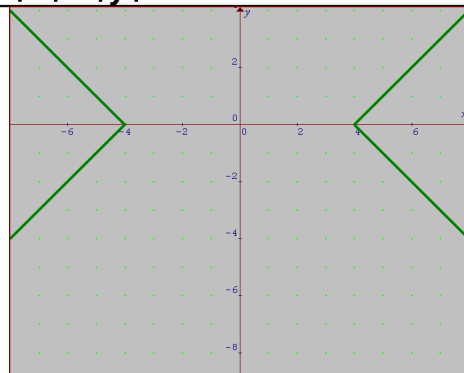
$|x| + |y| = 4$

b)  $|x| - |y| = 4 \Leftrightarrow$

1.  $x > 0 \wedge y > 0 \Leftrightarrow x - y = 4$  a zároveň  $x, y$  patria do 1. kvadrantu; polpriamka s počiatkom v bode [4,0]
2.  $x > 0 \wedge y < 0 \Leftrightarrow x + y = 4$  a zároveň  $x, y$  patria do 4. kvadrantu; polpriamka s počiatkom v bode [4,0]
3.  $x < 0 \wedge y < 0 \Leftrightarrow -x + y = 4$  a zároveň  $x, y$  patria do 3. kvadrantu; polpriamka s počiatkom v bode [-4,0]
4.  $x < 0 \wedge y > 0 \Leftrightarrow -x - y = 4$  a zároveň  $x, y$  patria do 2. kvadrantu; polpriamka s počiatkom [-4,0]

**Záver:**

**Riešením sú body ležiace na lomených čiarach**



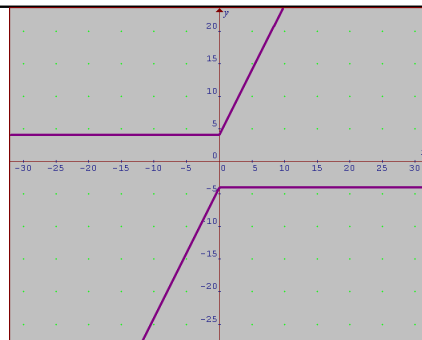
$|x| - |y| = 4$

c)  $|x - y| - |x| = 4 \Leftrightarrow$

1.  $x > y \wedge x > 0 \Leftrightarrow y = -4$ ; polpriamka s počiatkom v bode [0,-4]
2.  $x > y \wedge x < 0 \Leftrightarrow y = 4 - 2x$ ; polpriamka s počiatkom v bode [0,4]
3.  $x < y \wedge x < 0 \Leftrightarrow y = 4$ ; polpriamka rovnobežná s osou x s počiatkom v bode [0,4]
4.  $x < y \wedge x > 0 \Leftrightarrow y = 2x + 4$ ; polpriamka s počiatkom v bode [0,4]

**Záver:**

**Výsledkom sú body ležiace na lomených čiarach**



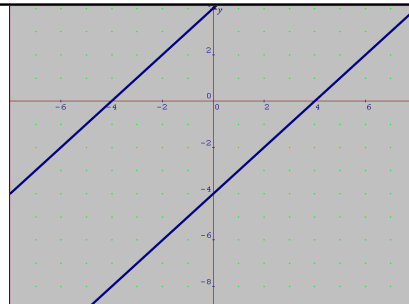
$|x - y| - |x| = 4$

d)  $|x - y| = 4 \Leftrightarrow$

1.  $x > y \Leftrightarrow y_1 = x - 4$
2.  $x < y \Leftrightarrow y_2 = x + 4$

**Záver:**

**Riešením sú body ležiace na dvoch rovnobežných priamkach.**



$|x - y| = 4$

$$f) |x+y| + |x| = 4 \Leftrightarrow$$

1.  $x > -y \wedge x > 0 \Leftrightarrow y = 4 - 2x$ ; úsečka AC; A [0,4] a D[4, -4]

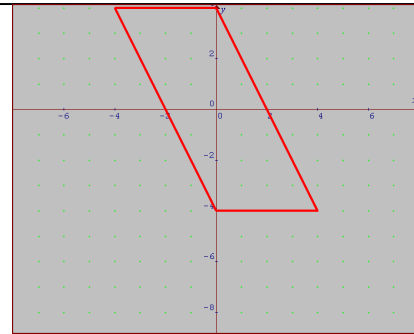
2.  $x > -y \wedge x < 0 \Leftrightarrow y = 4$  úsečka AB; A [0,4] a B [4, -4]

3.  $x < -y \wedge x < 0 \Leftrightarrow y = -2x - 4$  úsečka BC; B[4,-4] a C [0, -4]

4.  $x < -y \wedge x > 0 \Leftrightarrow y = -4$  úsečka CD

**Záver:**

**Riešením sú body na obvode kosodĺžnika ABCD.**



$$|x+y| + |x| = 4$$

Obr.5.5: Riešenie príkladu 5.4.