

## 18 Derivácia funkcie



### Metodický zámer

Derivácia funkcie sa preberá vo štvrtom ročníku gymnázia (oktáve) v rámci *Úvodu do infinitezimálneho počtu*. Problematika je mimoriadne vhodná na vyučovanie pomocou počítačových technológií, predovšetkým pomocou Excelu a EG. Pochopenie vzájomných súvislostí medzi smernicou dotyčnice ku grafu funkcie  $f(x)$  v bode  $x_0$  a deriváciou funkcie  $f(x)$  v tomto bode, ktorú študenti sami "objavujú" pri realizácii prvej aktivity je veľkým prínosom k neformálnemu pochopeniu problematiky.

V tejto kapitole predstavíme niekoľko vhodných aktivít zameraných na inováciu vyučovania derivácie funkcie. Použijeme stratégiu experimentovania a následného overovania hypotéz prostredníctvom didaktického softvéru. Študentov "vtiahneme" do procesu objasňovania tohto tak závažného a zaujímavého matematického pojmu. Umožníme im na základe vlastných zistení a pozorovaní formulovať všeobecne platné tvrdenia.



### Čo by mal študent vedieť - stručný sylabus

- Hovoríme, že funkcia  $f(x)$  má v bode  $x_0 \in D(f)$  deriváciu, ak je definovaná v okolí bodu  $x_0$  a existuje limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Túto limitu nazývame deriváciou funkcie  $f$  v bode  $x_0$  a označujeme ju  $f'(x_0)$ .

- Ak existuje  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k \in \mathbb{R}$ ;

tak existuje dotyčnica ku grafu funkcie  $y = f(x)$  v bode  $(x_0; f(x_0))$ .

- Funkcia  $f$  má v bode  $x_0$  deriváciu  $f'(x_0)$  práve vtedy, ak má v bode  $x_0$  deriváciu zľava aj deriváciu sprava a platí:  $f'_{-}(x_0) = f'_{+}(x_0)$ .

- Ak funkcia  $f$  má v bode  $x_0$  deriváciu, potom je v tomto bode spojitá.

- Hovoríme, že funkcia  $f(x)$  má v bode  $x_0 \in \mathbb{R}$  deriváciu zľava, ak je definovaná v istom ľavom okolí bodu  $x_0$  a existuje

$$\text{limita } \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}; \text{ resp. deriváciu}$$

sprava, ak je definovaná v istom pravom okolí bodu  $x_0$  a existuje

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

- Tieto limity nazývame deriváciou zľava (resp. sprava) funkcie  $f$  v bode  $x_0$ .

### AKTIVITA 18.1

V tejto aktivite využijeme poznatok o najlepšej lineárnej aproximácii funkcie  $f(x)$  polynómom 1. stupňa pomocou diferenciálu v okolí zvoleného bodu  $x_0$ .

Študenti vykonajú postupne tieto činnosti:

- Narysujte graf funkcie  $y = x^3 + 2x$ .
- Zostrojte dotyčnicu ku grafu funkcie v bode  $X = [x_0, y_0]$ ;  $x_0 = 1$
- Zapíšte jej smernicu  $k =$  .
- Zväčšite graf v okolí bodu  $x_0 = 1$ .
- Získajte tabuľku hodnôt funkcie v blízkom okolí bodu  $x_0 = 1$ .

6. Ako sa javí graf funkcie po viacnásobnom zväčšení v okolí bodu  $x_0 = 1$ ?

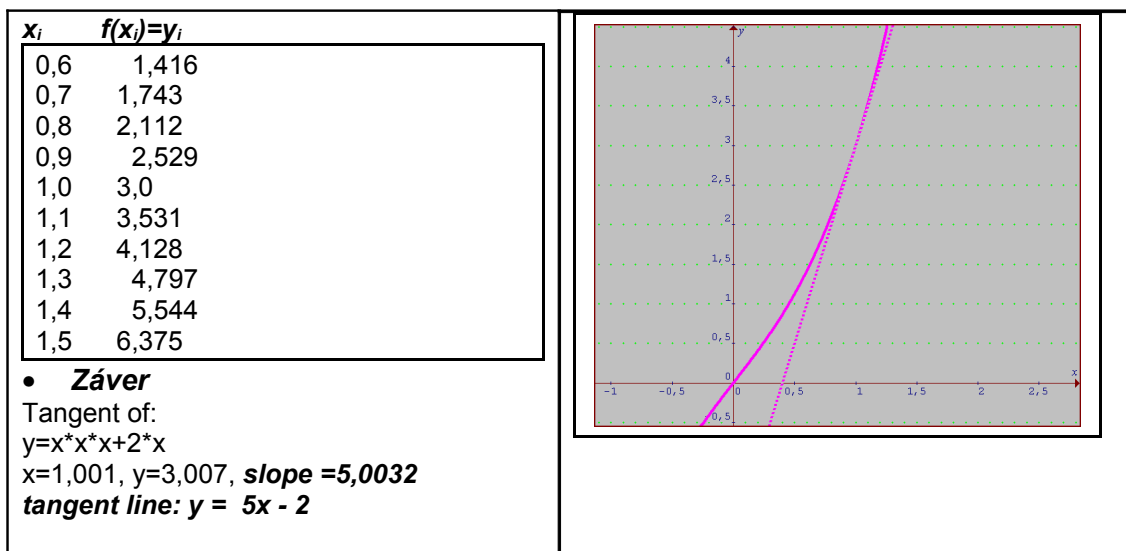
7. Zvoľte bod  $Y = [x_1, y_1]$  v blízkom okolí bodu  $x_0 = 1$ .

$$q = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

8. Vypočítajte hodnotu

9. Porovnajcie výsledky získané v (3) a (8)!

Program Graphmatica poskytol tieto výsledky:



Obr.18.1: Dotyčnica ku grafu funkcie  $y=x^3+2x$  v bode  $x=1$



### Inovácia vyučovacieho procesu

Cieľom cvičenia je vyzdvihnúť fakt, že pri dostatočnom zväčšení grafu  $f(x)$  v okolí bodu  $x_0 = 1$  jeho zakrivenie "mizne", graf prechádza do lineárnej funkcie. Využívajúc tabuľku hodnôt funkcie si študenti zvolia bod  $Y = [x_1, y_1]$  z blízkeho okolia bodu  $x_0$

$$k_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

a vypočítajú smernicu priamky určenej bodmi  $X$  a  $Y$ :

Túto následne porovnajú so smernicou dotyčnice ku grafu funkcie v bode  $x_0 = 1$

získanou použitím tlačidla

Diskusia so študentmi sa upriami na analýzu otázok: Prečo nie sú získané výsledky zhodné u všetkých študentov? Čo spôsobilo zistené diferencie? Ku akej hodnote sa napriek istej odchýlke blížia všetky výsledky? Koho výsledok sa najmenej líši od hodnoty smernice dotyčnice ku grafu funkcie  $f(x)$  v bode  $x = 1$ ?

*Snažíme sa študentov priviesť na myšlienku limitného prechodu; "ak sa  $x_i$  blíži k  $x_0$  potom sa získané  $k_i$  približuje ku hodnote  $k$ ", aby tak lepšie pochopili, prečo je derivácia  $f(x)$  v bode  $x_0$  definovaná ako limita podielu (1).*

Vyzveme ich tiež, aby sa pokúsili objasniť význam a funkciu čísla " $k$ " vzhľadom k funkcii  $f(x)$ . Úvahy smerujeme k vysloveniu poznatku: číslo " $k$ " vyjadruje kvantitatívnu zmenu (mieru zmeny) funkcie  $f(x)$ , vzhľadom na jednotkovú zmenu argumentu funkcie  $f(x)$  v okolí bodu  $x_0$ . Prezentujeme takto nielen geometrický význam derivácie funkcie, ale tiež jej kardinálny zmysel. Pochopenie tohto jej významu je rozhodujúce pri riešení aplikačných príkladov z praxe. (Často ide o úlohy zamerané na skúmanie rastu či

poklesu istých ukazovateľov, teda zmien funkčných hodnôt funkcií, pripadajúcich na istú jednotku argumentu).

- **Záver:**

Deriváciu funkcie  $f(x)$  v danom bode  $x_0$  určíme ako limitu podielu:

$$(1) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

## AKTIVITA 18.2

Výsledok ( $k=5$ ) získaný pri predchádzajúcom experimente overíme výpočtom, ktorý realizujeme v Exceli. Vytvoríme tabuľku, vďaka ktorej určíme s veľmi dobrou presnosťou limitu podielu (1). Pri jej tvorbe študenti zadajú všetky požadované parametre pre výpočet podielu (1), čo je možné iba vtedy, ak definíciu derivácie funkcie skutočne rozumejú. Pracujú v týchto krokoch:

<ul style="list-style-type: none"> <li>• Do buniek A1, B1, C1 vložíme záhlavie tabuľky (postupne <math>\Delta x</math>, <math>f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)</math>, <math>(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) / \Delta x</math>).</li> <li>• Do bunky A2 vložíme počiatočnú hodnotu <math>\Delta x = 0,1</math>. Využívame funkciu Excelu Rady do buniek A3 - A20 vložíme postupne členy geometrického radu pre: <math>a_1 = 0,1</math> a <math>q = 0,5</math>.</li> <li>• V bunke B2 zadefinujeme potrebnú funkciu v tvare <math>= f(x_0 + A2) - f(x_0)</math> následne skopírujeme do buniek B3 - B20.</li> <li>• Do bunky C2 vložíme funkciu v tvare <math>= B2/A2</math>, skopírujeme do buniek C3 - C20. V tomto stĺpci už získame výsledok; limitu podielu (1).</li> </ul>	<b><math>\Delta x</math></b>	<b><math>f(x + \Delta x) - f(x)</math></b>	<b><math>(f(x + \Delta x) - f(x)) / \Delta x</math></b>
	0.1	0.531	5.31
	0.05	0.257625	5.1525
	0.025	0.12689063	5.075625
	0.0125	0.0629707	5.03765625
	0.00625	0.03136743	5.018789063
	0.003125	0.01565433	5.009384766
	0.001563	0.00781983	5.004689941
	0.000781	0.00390808	5.00234436
	0.000391	0.00195358	5.001172028
	0.000195	0.00097668	5.000585976
	9.77E-05	0.00048831	5.000292978
	4.88E-05	0.00024415	5.000146487
	2.44E-05	0.00012207	5.000073243
	1.22E-05	6.1036E-05	5.000036621
	6.1E-06	3.0518E-05	5.000018311
	3.05E-06	1.5259E-05	5.000009155
	1.53E-06	7.6294E-06	5.000004578
	7.63E-07	3.8147E-06	5.000002289
	3.81E-07	1.9073E-06	5.000001143
	1.91E-07	9.5367E-07	5.000000573
	9.54E-08	4.7684E-07	5.000000289
	4.77E-08	2.3842E-07	5.000000149

Obr.18.2: Výpočet derivácie funkcie  $f(x)$  v Exceli

Takto vytvorená tabuľka je flexibilná, môžeme modifikovať predpis funkcie alebo prírastok argumentu a tak ju využiť na demonštráciu rôznych verzií úlohy. Môžeme tiež pohoťovo poukázať na fakt, že čím väčší prírastok  $\Delta x$  volíme, tým je výpočet menej presný. Získanú tabuľku môžeme použiť aj pri aktivite 4.16.3, tu však treba pracovať s jednostrannými limitami, ktorých pochopenie je vďaka takémuto didaktickému postupu omnoho lepšie.

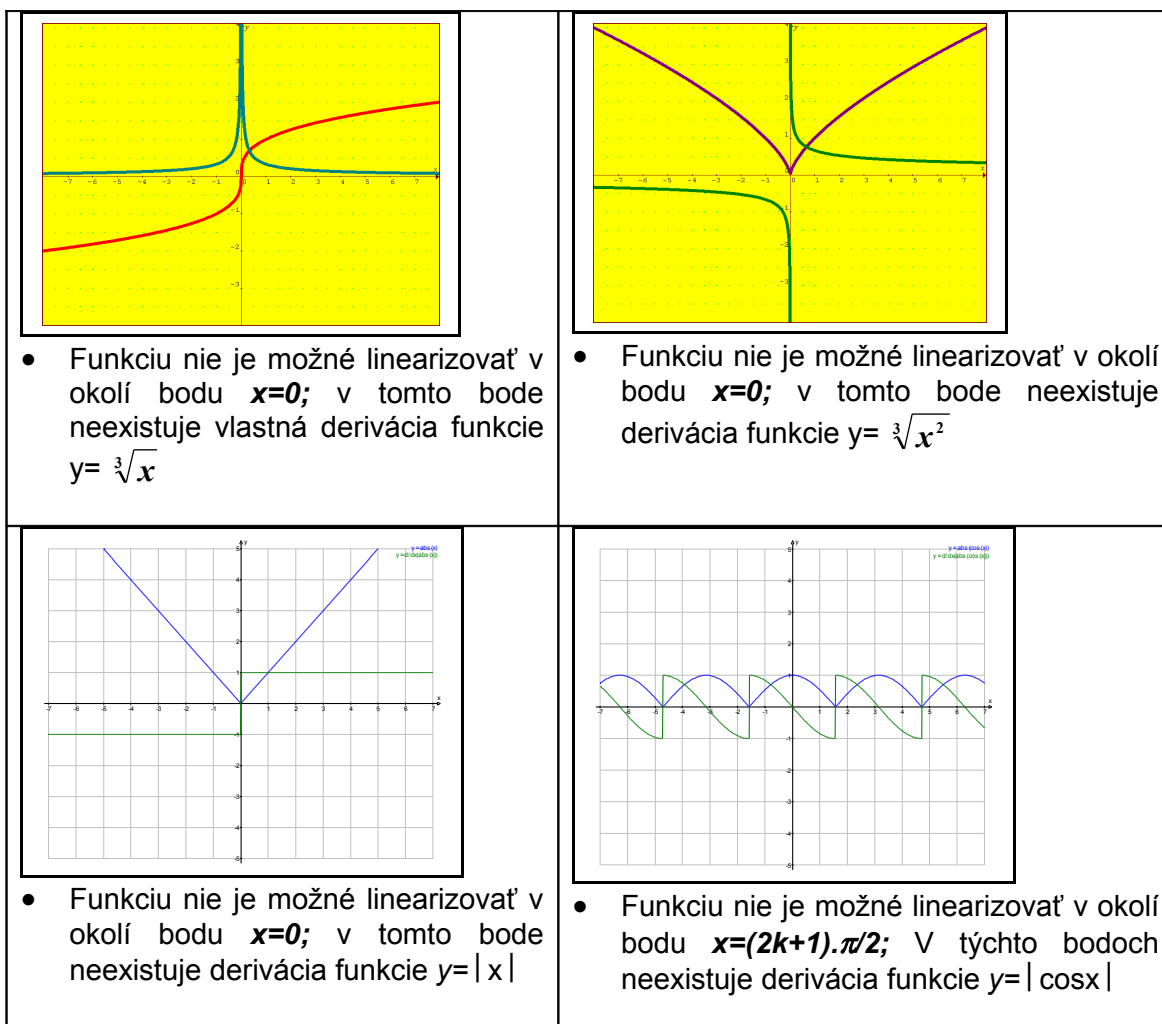
## AKTIVITA 18.3

Týmto cvičením chceme dosiahnuť, aby študenti dokázali korektne odpovedať na otázku.: Je každá funkcia diferencovateľná **vo všetkých svojich argumentoch**?

Študenti riešia nasledujúce úlohy:

1. Narysujte postupne grafy funkcií:  $y_1 = x^{1/3}$ ,  $y_2 = x^{2/3}$ ,  $y_3 = |x|$ ,  $y_4 = |\cos x|$
2. Použite „zoom“ a určite body, v ktorých nie je možné funkcie "linearizovať", teda aproximovať lineárnou funkciou.
3. Rozhodnite, či platí tvrdenie: Ak je funkcia  $f(x)$  spojitá na svojom  $D(f)$  potom je na ňom aj diferencovateľná.
4. Platí opačné tvrdenie? Ak je funkcia v bode  $x$  diferencovateľná, potom je v ňom aj spojitá?

Postupne boli programom Graphmatica a EG vykreslené grafy funkcií a ich derivácií:



Obr.18.3: Grafy funkcií a ich derivácií

Počas experimentu sa študenti presvedčili, že nie všetky funkciu sme schopní "linearizovať" v okolí všetkých argumentov, nie sú teda diferencovateľné vo všetkých svojich argumentoch a prišli k záveru:

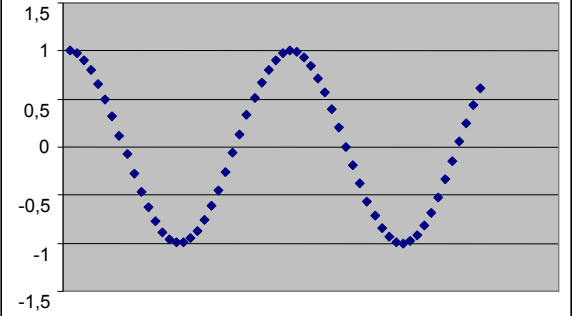
**Diferencovateľnosť funkcie implikuje jej spojitosť a nie naopak.**

#### AKTIVITA 18.4

V tomto cvičení sa študenti presvedčia o platnosti niektorých vzorcov pre deriváciu elementárnych funkcií. Využijeme opäť Excel na postupné simulovanie a výpočet derivácie funkcie "bod po bode" podľa vzorca (1). Premenná  $x_0$  vo vzorci (1) sa bude postupne meniť (v závislosti na intervale, na ktorom chceme deriváciu získať) a prírastok  $\Delta x$  bude konštantný;  $\Delta x=0,1$ . Študenti môžu pozorovať, že výsledkom je opäť funkcia premennej  $x$ .

Študenti dostanú nasledujúce zadanie:

Vychádzajúc z definície derivácie funkcie vytvorte v Exceli numerický model ktorý potvrdí, že deriváciou funkcie  $y=\sin(x)$  je funkcia  $y'=\cos(x)$ . Pracujte na intervale  $x \in < 0, 2\pi >$ .

<ul style="list-style-type: none"> <li>• Do buniek A1, B1, C1 vložíme záhlavie tabuľky (postupne <math>x</math>, <math>f(x_0+\Delta x)-f(x_0)</math>, <math>(f(x_0+\Delta x)-f(x_0))/\Delta x</math>).</li> <li>• Volíme <math>\Delta x=0,1</math> konštantné</li> <li>• Do bunky A2 vložíme počiatočnú hodnotu <math>x_0 = 0</math>. Využívame funkciu Excelu Rady do buniek A3 - A20 vložíme postupne rôzne hodnoty argumentu funkcie <math>x \in &lt; 0; 6,28 &gt;</math>; <math>A1+0,1</math>.</li> <li>• V bunke B2 zadefinujeme rozdiel v tvare <math>= \sin(x_0 + 0,1) - \sin(x_0)</math> následne skopírujeme do buniek B3 -B20.</li> <li>• Do bunky C2 vložíme funkciu v tvare <math>= B2/0,1</math>; skopírujeme do buniek C3 - C20. V tomto stĺpci už získavame požadované výsledky; deriváciu funkcie <math>\sin(x)</math> v bode <math>x_0</math></li> <li>• Zostrojíme bodový graf</li> </ul>	<div style="text-align: center;"> <b>Derivácia funkcie <math>y=\sin(x)</math></b>  </div> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Záver:</b> Získaný graf potvrdzuje známy vzorec pre deriváciu funkcie <math>y=\sin(x)</math>; t.j. <math>y'=\cos(x)</math></li> </ul>
---	--

Obr.18.4: Numerický model derivácie funkcie  $y = \sin(x)$

Takto vytvorená tabuľka je flexibilná, opäť môžeme modifikovať predpis funkcie a využiť ju na demonštráciu vzorcov ďalších funkcií. Cvičenie je veľkým prínosom k neformálnemu pochopeniu problematiky derivácie funkcie.

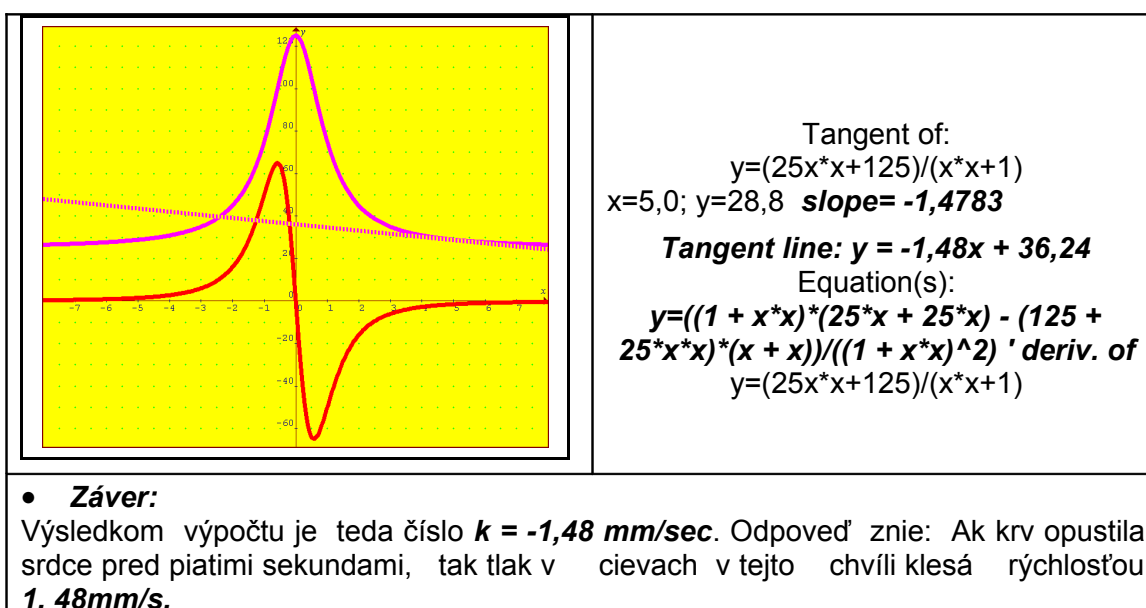
### AKTIVITA 18.5

Posledné dve aktivity majú za cieľ priblížiť preberanú problematiku na úlohe z každodenného života. Študenti podľa zadaných bodov analyzujú graf funkcie, uvažujú o jej definičnom obore a obore funkčných hodnôt, derivácii funkcie v kontexte reálneho problému. Úlohy majú predovšetkým motivačný význam.

Pri pohybe krvi v organizme zo srdca cez artérie až ku kapilárom a späť, systolický tlak spojitě klesá, čo vyjadruje funkcia:  $P = \frac{25t^2 + 125}{t^2 + 1}$ , kde  $P$  je tlak v milimetroch ortuťového stĺpca a  $t$  je čas v sekundách. Aká je miera zmeny tlaku krvi v cievach po piatich sekundách ako krv opustí srdce?  
Pri riešení úlohy realizujte tieto kroky:

1. Programom Graphmatica vytvorte graf funkcie  $P(t)$ .
2. Zostrojte dotyčnicu ku grafu funkcie v bode  $t = 5$ .
3. Zapíšte si veľkosť jej smernice  $k = !$
4. Vypočítajte analyticky 1. deriváciu funkcie  $P'(t)$ !
5. Dosadením do  $P'(t)$  za  $t = 5$  získajte hodnotu  $P'(5)$ !
6. Narysujte deriváciu funkcie  $P'(t)$
7. Zistíte z grafu hodnotu  $P'(5)$ !
8. Porovnajte výsledky získané v krokoch (3), (5), (7)!

Program Graphmatica ponúkol takéto grafické a numerické výstupy. Navyše "vypočítal" prvú deriváciu analyticky a ponúkol tak študentom možnosť overiť si správnosť svojho výpočtu. Môžeme ho teda používať aj ako spätnú väzbu pre študentov pri výpočte derivácie funkcie (potrebné je len poznať syntax).



Obr.18.5. Závislosť tlaku  $P$  v organizme človeka na čase  $t$

## AKTIVITA 18.6

*Koncentrácia lieku v krvnom obeh.*

Pacientovi je podaný istý liek. Model zachytávajúci koncentráciu lieku v organizme pacienta počas dvoch hodín od jeho podania vyjadruje funkcia:

$$C = 0,29483t + 0,04253t^2 - 0,00035t^3$$

Kde  $0 \leq t \leq 120$ ;  $C$  je koncentrácia látky v miligramoch a  $t$  je čas v minútach.

Študenti sú vyzvaní realizovať tieto činnosti:

1. Pomocou programu Graphmatica zostrojte graf funkcie  $C(t)$ .
2. Aké hodnoty nadobúdajú koncentrácie lieku v organizme po 20-tich minútach a po 100 minútach?
3. Určte obor hodnôt funkcie  $C(t)$  pre  $t \in \langle 0, 120 \rangle$ .
4. Zostrojte graf  $C'(t)$ .

5. Kedy je koncentrácia lieku v organizme najvyššia?
6. Akú hodnotu vtedy nadobúda  $C'(t)$ ?
7. Určte hodnotu  $t$ , pre ktorý platí  $C'(t) = 0$ !
8. Akú hodnotu nadobúda funkcia  $C$  v tomto bode?
9. Po akom čase treba podať ďalšiu dávku lieku, ak jeho koncentrácia v organizme nesmie klesnúť pod 100mg?
10. Identifikujte, pre ktoré hodnoty  $t$  platí;  $C'(t) > 0$ ?
11. Identifikujte hodnoty  $t$ , pre ktoré  $C'(t) < 0$ ?
12. Vypočítajte algebraicky hodnotu  $t$ , pre ktorú platí  $C'(t) = 0$
13. Porovnajme výsledky získané v bode (5) a (7)!
14. Zostrojte dotyčnicu ku grafu funkcie  $C(t)$  v bode  $t_1 = 60$ !
15. Zostrojte dotyčnicu ku grafu funkcie  $C(t)$  v bode  $t_2 = 101$ !
16. Čo môžete povedať o znamienku smerníc týchto dotyčníc?
17. Porovnajme znamienka smerníc dotyčníc v bodoch  $t_1, t_2$  so znamienkom  $C'(t_1)$ !

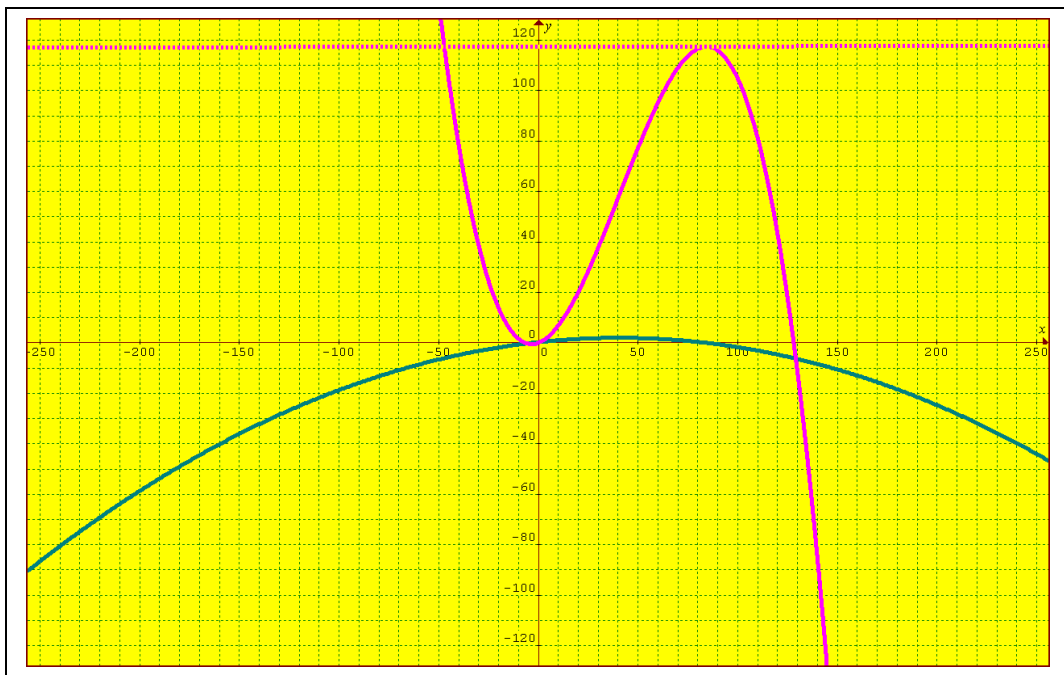


Vidíme, že pri riešení tohto príkladu má mimoriadny význam využitie didaktického softvéru na výpočet extrémů funkcie (vzhľadom na vyjadrenie príslušnej funkcie); výpočet bez použitia počítača či kalkulačky by bol príliš pracný. Určenie intervalov monotónnosti si vyžaduje istú zručnosť a hlavne dobré poznanie práce s príslušným softvérom. Výsledky je možné získať až po „nazoomovaní“ základného grafu. Je žiaduci matematický nadhľad nad problematikou. Príslušný softver pri prvom spustení nevyznačí všetky tri korene polynómu, ani bod extrémů funkcie, (potrebná je vedomosť o počte reálnych koreňov polynómu).

#### **Záver:**

2.  $C(20) = 20,3$
3.  $H(C) = \langle 0; 117,4 \rangle$
5. Koncentrácia lieku je najvyššia, ak  $t = 84,33 \text{ min}$
6.  $C'(84,33) = 0$
7.  $C'(t) = 0$  práve vtedy, ak  $t = 0$  alebo  $t = 84,33 \text{ min}$
8. Funkcia  $C(t)$  nadobúda v týchto bodoch hodnotu 0 alebo 84,33min
9. Ďalšiu dávku lieku treba podať približne po 102 minútach, ak nechceme, aby koncentrácia lieku klesla pod 100mg.
10.  $C'(t) > 0$  práve vtedy, ak  $t \in (0; 84,33)$ .
14. dotyčnica v bode  $t = 60$  má rovnicu  $y = 0,62x - 188$ ; dotyčnica v bode  $t = 101$  má rovnicu dotyčnice  $y = -1,6x + 264$

Po nazoomovaní sme získali takýto graf funkcie a jej derivácie:



*Obr.18.6: Koncentrácia lieku v krvnom obehu*