

2 Vlastnosti funkcií



Metodický zámer

Funkcie popisujú mnohé deje každodenného života. Vďaka grafu funkcie, ktorý veľmi ľahko získame pomocou rôznych didaktických softvérov, či grafických kalkulačiek je možné dedukovať na jej viaceré dôležité vlastnosti ako sú: nulové body, párnosť a nepárnosť funkcie, periodickosť, monotónnosť, ohraničenosť funkcie, extrémny funkcií. Všetky zmienené matematické pojmy prinášajú kľúčové informácie o dejoch, ktoré tieto funkcie reprezentujú. V navrhovaných aktivitách sa zameriame na zlepšenie schopnosti študentov identifikovať dôležité vlastnosti funkcií. Mnohonásobná konkretizácia a následné zovšeobecnenie výsledkov pozorovaní grafov funkcií prispeje k hlbšiemu pochopeniu zmienených pojmov.



Čo by mal študent vedieť - stručný sylabus

<p><u>Funkcie f reálnej premennej x je:</u></p> <p><u>Rastúca</u> $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in M;$ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$</p> <p><u>Klesajúca</u> $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in M; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$</p> <p><u>Nerastúca</u> $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in M; x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$</p> <p><u>Neklesajúca</u> $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in M;$ $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$</p> <p><u>Monotónna</u>, ak je (ne)rastúca a (ne)klesajúca</p> <p><u>Rýdzomonotónna</u> funkcia je len rastúca a len klesajúca</p>	<p><u>Prostá</u> $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in M$ platí, ak $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$</p> <p>Nech f je prostá funkcia na $D(f)$, potom</p> <p><u>Inverzná funkcia k funkcii f</u> je množina všetkých usporiadaných dvojíc $[y, x] \in R \times R$, pre ktoré platí: $[x, y] \in f$.</p> <p>pre inverznú funkciu platí: $D(f^{-1}) = H(f)$ a $H(f^{-1}) = D(f)$</p> <p>grafy funkcií f, f^{-1} sú súmerné podľa priamky $y = x$</p>
<p><u>Ohraničená zhora</u> \Leftrightarrow existuje $h \in R$, že $\forall x \in M$ platí $f(x) \leq h$</p> <p><u>Ohraničená zdola</u> \Leftrightarrow existuje $d \in R$, že $\forall x \in M$ platí $f(x) \geq h$</p> <p><u>Ohraničená</u> \Leftrightarrow je ohraničená zdola a súčasne zhora</p>	<p>Funkcia f má na množine M v bode $a \in M$:</p> <p><u>Maximum</u> $\Leftrightarrow \forall x \in M$ platí $f(x) \leq f(a)$</p> <p><u>Minimum</u> $\Leftrightarrow \forall x \in M$ platí $f(x) \geq f(a)$</p> <p><u>Ostré minimum</u> $\Leftrightarrow \forall x \in M$ platí $f(x) > f(a)$</p> <p><u>Ostré maximum</u> $\Leftrightarrow \forall x \in M$ platí $f(x) < f(a)$</p>
<p><u>Párna</u> $\Leftrightarrow \forall x \in D(f)$ aj $-x \in D(f)$ a súčasne $\forall x \in D(f)$ je $f(-x) = f(x)$</p> <p><u>Nepárna</u> $\Leftrightarrow \forall x \in D(f)$ aj $-x \in D(f)$ a súčasne $\forall x \in D(f)$ je $f(-x) = -f(x)$</p>	<p><u>Periodická</u> $\Leftrightarrow \exists p > 0$ tak, $\forall x \in D(f)$ a $\forall k \in \mathbb{Z}$ aj $x + kp \in D(f)$ a súčasne $\forall x$ platí: $f(x + kp) = f(x)$. Číslo p sa nazýva perióda funkcie</p> <p>Bod $x_0 \in D(f)$ nazveme nulovým bodom funkcie $f \Leftrightarrow$ ak platí $f(x_0) = 0$</p>



Všeobecné vlastnosti funkcií sa preberajú predovšetkým v 2.ročníku (sexte) gymnázia v rámci tematického celku *Funkcie, rovnice a nerovnice II*, pričom časová dotácia pre túto problematiku je nepostačujúca. Špecifické vlastnosti elementárnych funkcií sú precvičované pri preberaní konkrétnych typov funkcií. Je preto vhodné zaradiť do časového plánu aktivitu, integrujúcu parciálne informácie a poznatky z tejto oblasti. Okrem tabuľkového procesoru Excelu využijeme aj didaktický softvér Equation Grapher (ďalej len EG) na precvičovanie a fixáciu definovaných vlastností funkcií. Uvedené aktivity v počítačovej učebni zaradíme do vyučovania po hodine matematiky, na ktorej už boli študenti zoznámení s presnými definíciami jednotlivých pojmov. Aktivity umožnia študentom "hlbšie vniknúť" do podstaty definícií počas práce s konkrétnymi modelmi; (grafmi funkcií). Študenti samostatne a aktívne riešia nasledujúce úlohy.



Riešené príklady

PRÍKLAD 2.1

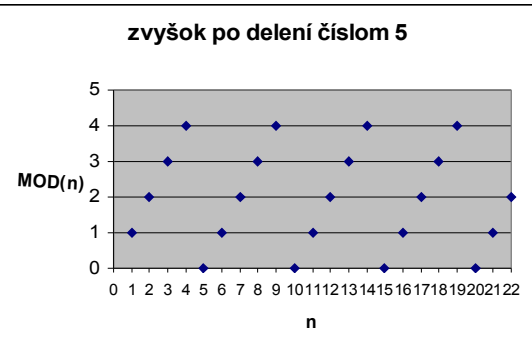
Funkcia f definovaná na množine prirodzených čísel priradí každému prirodzenému číslu n zvyšok po delení tohto čísla číslom 5.

- Určite obor hodnôt tejto funkcie.
- Narysujte graf funkcie $y = f(n)$ pre $n \leq 20$!
- Analyzujte získaný graf, určite nulové body tejto funkcie!
- Čo ešte pozorujete na grafe? Je niečím špecifický?
- Čomu sa rovná $f(n)$ a $f(n+5)$?
- Je táto funkcia prostá?

RIEŠENIE

Vytvoríme tabuľku argumentov funkcie a príslušných funkčných hodnôt v Exceli. Následne využijeme Sprievodcu grafom tabuľkového procesora Excel na vytvorenie požadovaného bodového grafu. Úloha je neštandardná (grafom funkcie sú izolované body) a pomerne obsažná. Riešiteľ uvažuje o celej škále vlastností danej funkcie.

aktivita	zápis v excelovskom hárku	reprezentácia na obrazovke počítača																																																																		
vytvorenie tabuľky	<ul style="list-style-type: none"> Do stĺpca A - bunky A2:A21 vkladáme hodnoty nezávislej premennej n využijeme pritom funkciu Rady Do bunky B2 vložíme hodnoty závislej premennej $f(n)$ v tvare $=MOD(A2;5)$, následne prekopírujeme do A3:A21 	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th><th>A</th><th>B</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>n</td><td>f(n)</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>4</td><td>3</td><td>3</td></tr> <tr><td>5</td><td>4</td><td>4</td></tr> <tr><td>6</td><td>5</td><td>0</td></tr> <tr><td>7</td><td>6</td><td>1</td></tr> <tr><td>8</td><td>7</td><td>2</td></tr> <tr><td>9</td><td>8</td><td>3</td></tr> <tr><td>10</td><td>9</td><td>4</td></tr> <tr><td>11</td><td>10</td><td>0</td></tr> <tr><td>12</td><td>11</td><td>1</td></tr> <tr><td>13</td><td>12</td><td>2</td></tr> <tr><td>14</td><td>13</td><td>3</td></tr> <tr><td>15</td><td>14</td><td>4</td></tr> <tr><td>16</td><td>15</td><td>0</td></tr> <tr><td>17</td><td>16</td><td>1</td></tr> <tr><td>18</td><td>17</td><td>2</td></tr> <tr><td>19</td><td>18</td><td>3</td></tr> <tr><td>20</td><td>19</td><td>4</td></tr> <tr><td>21</td><td>20</td><td>0</td></tr> </tbody> </table>		A	B	1	n	f(n)	2	1	1	3	2	2	4	3	3	5	4	4	6	5	0	7	6	1	8	7	2	9	8	3	10	9	4	11	10	0	12	11	1	13	12	2	14	13	3	15	14	4	16	15	0	17	16	1	18	17	2	19	18	3	20	19	4	21	20	0
	A	B																																																																		
1	n	f(n)																																																																		
2	1	1																																																																		
3	2	2																																																																		
4	3	3																																																																		
5	4	4																																																																		
6	5	0																																																																		
7	6	1																																																																		
8	7	2																																																																		
9	8	3																																																																		
10	9	4																																																																		
11	10	0																																																																		
12	11	1																																																																		
13	12	2																																																																		
14	13	3																																																																		
15	14	4																																																																		
16	15	0																																																																		
17	16	1																																																																		
18	17	2																																																																		
19	18	3																																																																		
20	19	4																																																																		
21	20	0																																																																		

vytvorenie grafu funkcie	<ul style="list-style-type: none"> postupujeme ako v príklade 1.1 pričom vyberieme <i>typ grafu - bodový</i> 	
analýza grafu funkcie	<p>Riešenie</p> <p>a) $H(f) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$</p> <p>c) Nulové body funkcie sú všetky násobky čísla 5, teda čísla v tvare $5k$</p> <p>d) Funkčné hodnoty sa pravidelne opakujú - funkcia je periodická</p> <p>e) Ak zvolíme $n=2$, potom $f(2) = 2$; $f(2+5) = f(7) = 2$, teda perióda funkcia $p=5$</p> <p>f) Keďže funkcia je periodická nespĺňa podmienky pre prostú funkciu</p>	

Obr.2.1: Postup riešenia v príklade 2.1

PRÍKLAD 2.2

Rozhodnite na základe pozorovania grafov funkcií, či číslo x_0 je ich nulovým bodom, výsledky následne overte výpočtom.

- a) $f(x) = -6x+5$ pre $x_0 = 5/6$;
b) $f(x) = x^4 + x^2 + 2$ pre $x_0 = 3$
c) $f(x) = \sin x^2 + \cos 2x$ pre $x_0 = \pi/2$
d) $f(x) = (2-x)/(x^2-3x)$ pre $x_0 = -2$

RIEŠENIE


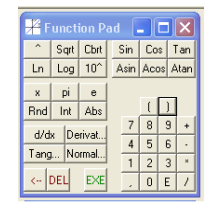
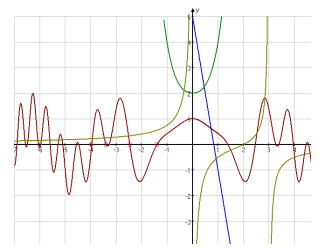



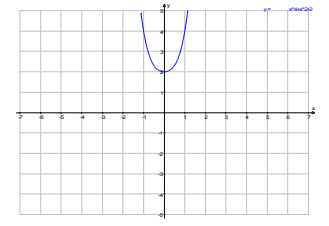
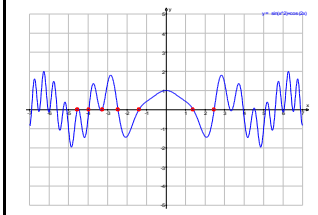
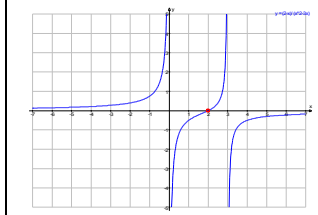
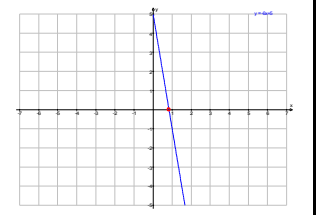


Pri riešení tejto úlohy využijeme kreslič grafov EG a jeho schopnosť vyhľadať,



označiť a vypočítať nulové body funkcie použitím tlačidla na ovládacom paneli. Takáto úloha umožňuje študentom veľmi dobre postrehnúť súvislosť medzi riešením rovnice $f(x) = 0$ a určovaním nulových bodov funkcie $y = f(x)$; Tj uvedomovať si, že úloha riešiť akúkoľvek rovnicu $f(x) = 0$ je ekvivalentná s problémom hľadania priesečníkov funkcie $f(x)$ s osou x . Toto poznanie je neskôr veľkým prínosom pri riešení rôznych netypických rovníc a nerovníc. Popis riešenia je kvôli prvému kontaktu s programom EG detailnejší.

aktivita	zápis v EG	reprezentácia na obrazovke počítača
----------	------------	-------------------------------------

<p>zápis funkcií do combo boxu</p>	<ul style="list-style-type: none"> Po spustení programu EG postupne zapisujeme do combo boxu funkcie v tvare:  $y = -6x+5$ $y = x^4+x^2+2$ $y = \sin(x^2)+\cos(2x)$ $y = (2-x)/(x^2-3x)$ <ul style="list-style-type: none"> Využívame pritom okno <i>Function Pad</i>. Následne stačí stlačiť Enter a program vykreslí príslušný graf funkcie 	
<p>určenie nulových bodov funkcií</p>	<ul style="list-style-type: none"> Pri vyhľadávaní nulových bodov pracujeme s každou funkciou separovane.  <ul style="list-style-type: none"> Využívame tlačidlo  na označenie vybraného obdĺžnika z okna Graph ťahom myškou pri stlačení ľavom tlačidle. Následne tlačidlo  na označenie nulových bodov. Po jeho použití sa v okne Log objaví vypočítaná hodnota x_0. Program EG teda posluží ako spätná väzba. Študenti sa presvedčia na vlastné oči o správnosti svojich výpočtov. 	 <p>$y = x^4+x^2+2$ Root: not found</p>
	 <p>$y = \sin(x^2)+\cos(2x)$ Root: $x = -3,275366604$</p> <p>$y = \sin(x^2)+\cos(2x)$ Root: $x = -2,46346276$</p> <p>$y = \sin(x^2)+\cos(2x)$ Root: $x = -1,390060455$</p> <p>$y = \sin(x^2)+\cos(2x)$ Root: $x = 1,390060455$</p> <p>$y = \sin(x^2)+\cos(2x)$ Root: $x = 2,46346276$</p>  <p>$y = (2-x)/(x^2-3x)$ Root: $x = 2$</p>	 <p>$y = -6x+5$ Root: $x = 0,8333333333$</p>

Riešenie:

program EG potvrdil, že iba **v prípade a) $f(x) = -6x$ pre $x_0 = 5/6$; je zvolené $x_0 \in D(f)$ nulovým bodom danej funkcie.**

Obr.2.2: Postup riešenia príkladu 2.2 programom EG

PRÍKLAD 2.3

V programe EG vytvorte grafy funkcií:

- $y = 5x^2 + 4$
- $y = -|3x| - 2$
- $y = 5\cos(2x) + 3$


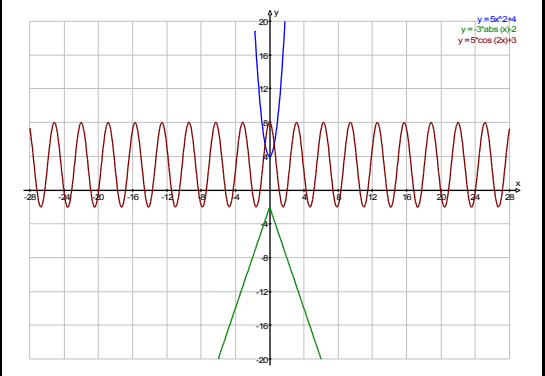
Presvedčte sa, či pre uvedené funkcie platí:

$\forall x \in D(f) \exists -x \in D(f)$ a $\forall x \in D(f) \Rightarrow f(-x) = f(x)$.


Akú vlastnosť majú všetky načrtnuté grafy?

RIEŠENIE


Pri riešení využijeme informácie o kreslení grafov funkcií v programe EG uvedené vyššie. Následne tlačidlom "zoom" v okolí počiatku súradnicového systému a trasovaním funkcií tlačidlom TRACE sledujeme aké hodnoty nadobúdajú funkcie v ľavom a pravom okolí bodu $[0,0]$. Niekoľko získaných hodnôt si študenti zapisujú do tabuľky. Študenti samostatne objavujú vlastnosť osovej súmernosti grafov párných funkcií podľa osí y . V rámci heuristickej besedy vyžadujeme od študentov klasické riešenie (dôkaz) problému analytickým spôsobom.

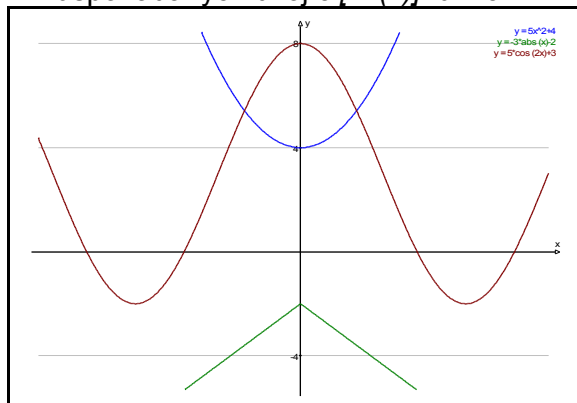
činnosť	zápis v EG	reprezentácia na obrazovke
vytvorenie grafov funkcií v programe EG	<ul style="list-style-type: none"> • do combo boxu postupne vložíme funkčné predpisy v tvare: $y = 5 \cdot \cos(2x) + 3$, $y = -3 \cdot \text{abs}(x) - 2$, $y = 5x^2 + 4$, • stlačíme Enter alebo  • v okne Graph získame tri farebne rozlíšené grafy funkcií 	

overenie podmienok pre párnosť funkcií

- použijeme "zoom" pomocou lupy  v okolí bodu [0,0],
- pre overenie podmienok párnosti použijeme trasovanie funkcie



tlačidlom , ktoré umožní odčítanie hodnôt funkcií v okolí počiatku súradnicového systému, príslušné usporiadané dvojice registrujeme v ľavom dolnom rohu obrazovky. Použiť môžeme aj z menu *Extra* položku *Value Table*, čím získame tabuľku usporiadaných dvojíc $[x, f(x)]$ funkcií



Riešenie:

všetky tri uvedené funkcie sú párne. Grafy sú súmerné podľa osi y.

Obr.2.3: Riešenie príkladu 2.3 pomocou EG

PRÍKLAD 2.4

V programe EG vytvorte grafy funkcií:

- $y = -4x$
- $y = -5/x$
- $y = -2\sin(4x)$
- $y = \sin(x/2) + \cos(2x)$

Zistite, pre ktoré z uvedených funkcií platí:

$$\forall x \in D(f), \exists (-x) \in D(f) \text{ tak, že } \forall x \in D(f) \Rightarrow f(-x) = -f(x).$$

Akú vlastnosť majú všetky načrtnuté grafy?

RIEŠENIE

Postupujeme analogickým spôsobom ako v predchádzajúcom príklade. Usmerňujeme študentov, aby samostatne odhalili stredovú súmernosť grafov nepárnych funkcií podľa počiatku súradnicového systému.



Vytvoríme grafy troch prvých funkcií v jednom obrázku a graf štvrtej z nich do samostatného obrázku. Využívame lupu v okolí počiatku súradnicového systému a trasovanie funkcií. Študenti zisťujú niekoľko hodnôt argumentov x_i , $(-x_i) \in D(f)$ a príslušných funkčných hodnôt $f(x_i)$, $f(-x_i) \in H(f)$ a zapisujú ich do tabuľky. Na tento účel slúži v hlavnom menu položka *Extra* \rightarrow *Value Table*. Umožní im získať údaje analogicky ako na Obr. 4.2.4.

Value Table			
y = -5/x			
y = -5/x			
x	y	y'	
-2	2,5	1,25	
-1,5	3,33	2,22	
-1	5	5	
-0,5	10	20	
0		-5E100	
0,5	-10	20	
1	-5	5	
1,5	-3,33	2,22	
2	-2,5	1,25	

Obr. 2.4 : Tabuľka hodnôt funkcie získaná programom EG

Výsledky následne analyzujú a vyslovia záver o nepárnosti funkcií, ktorý tiež algebraicky dokážu.

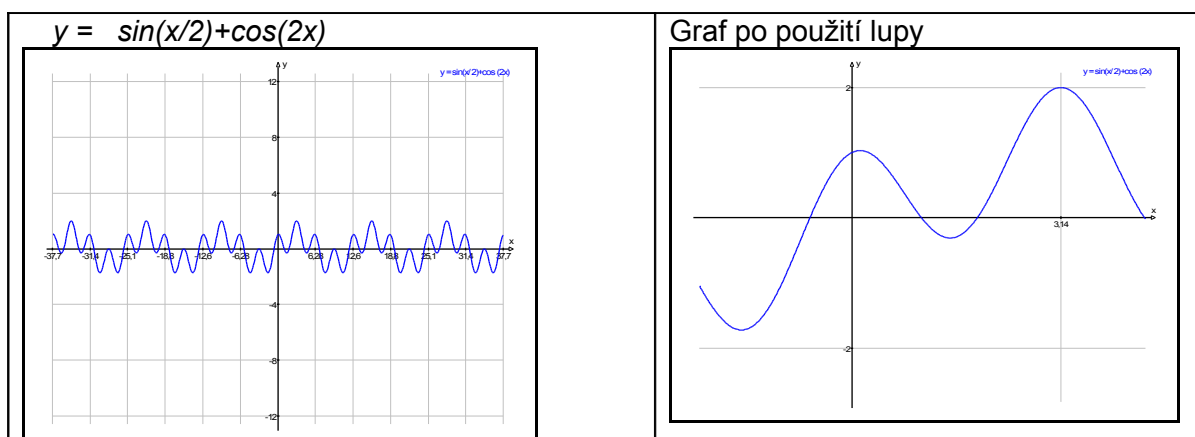
Pri vytváraní grafu štvrtej (goniometrickej funkcie) modifikujeme mierku na súradnicových osiach. Použijeme pritom okno *Range*. Vyberieme položku *Trigonometry Range* (druhá v poradí) čím nastavíme rozsahy a mriežku na osiach v radiánoch a klikneme na tlačidlo *Re*

Range	
Xmin	477796076938
Xmax	9,4247779607
Xstep	1,5707963267
Ymin	-3,1415926535
Ymax	3,1415926535
Ystep	1

Obr.2.5: Modifikácia mierky pri trigonometrických funkciách

Po použití lupy študenti registrujú, že graf štvrtej funkcie nie je stredovo súmerný podľa počiatku je však periodický s periódou $p = 2\pi$.





Závery:

- Stredová súmernosť prvých troch grafov podľa počiatku je zrejmá. Pri prvej a druhej funkcii je dôkaz triviálny. **Funkcie sú nepárne.** Pri funkcii $y = -2\sin(4x)$ dokážeme platnosť $f(-x) = -f(x)$ pomocou goniometrických vzorcov:

$$\begin{aligned}
 f(-x) &= -2\sin(-4x) = -2 \cdot 2\sin(-2x)\cos(-2x) = -8\sin(-x)\cos(-x) \cdot \cos(-2x) = \\
 &= 8\sin(x)\cos(x)[\cos(-x)\cos(-x) - \sin(-x)\sin(-x)] = \\
 &= 4\sin(2x)[\cos^2(x) - \sin^2(x)] = 4\sin(2x)\cos(2x) = 2\sin(4x) = -f(x) \quad \text{čbtd}
 \end{aligned}$$

- Štvrtá funkcia nie je párna ani nepárna, pozorujeme však jej **periodičnosť s periódou $p = 2\pi$** .

$$f(x+2\pi) = f(x) \Leftrightarrow \sin(x/2+2\pi) + \cos(2x+2\pi) = \sin(x/2)\cos 2\pi + \cos(x/2)\sin 2\pi + \cos(2x)\cos 2\pi - \sin(2x)\sin 2\pi = \sin(x/2) + \cos(2x) \cdot 1 - \sin(2x) \cdot 0 = \sin(x/2) + \cos(2x) = f(x)$$

Obr.2.6: Riešenie príkladu 2.4

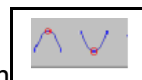
PRÍKLAD 2.5

V programe EG vytvorte grafy funkcií:

- $y = 5x^2 + 4x + 2$
- $y = -3x^6 - 3$
- $y = 2x/(3x^2+1)$

Uvažujte o ohraničenosti týchto funkcií. Určite ich horné a dolné ohraničenia. Získané hodnoty využite pri exaktnom dôkaze.

RIEŠENIE

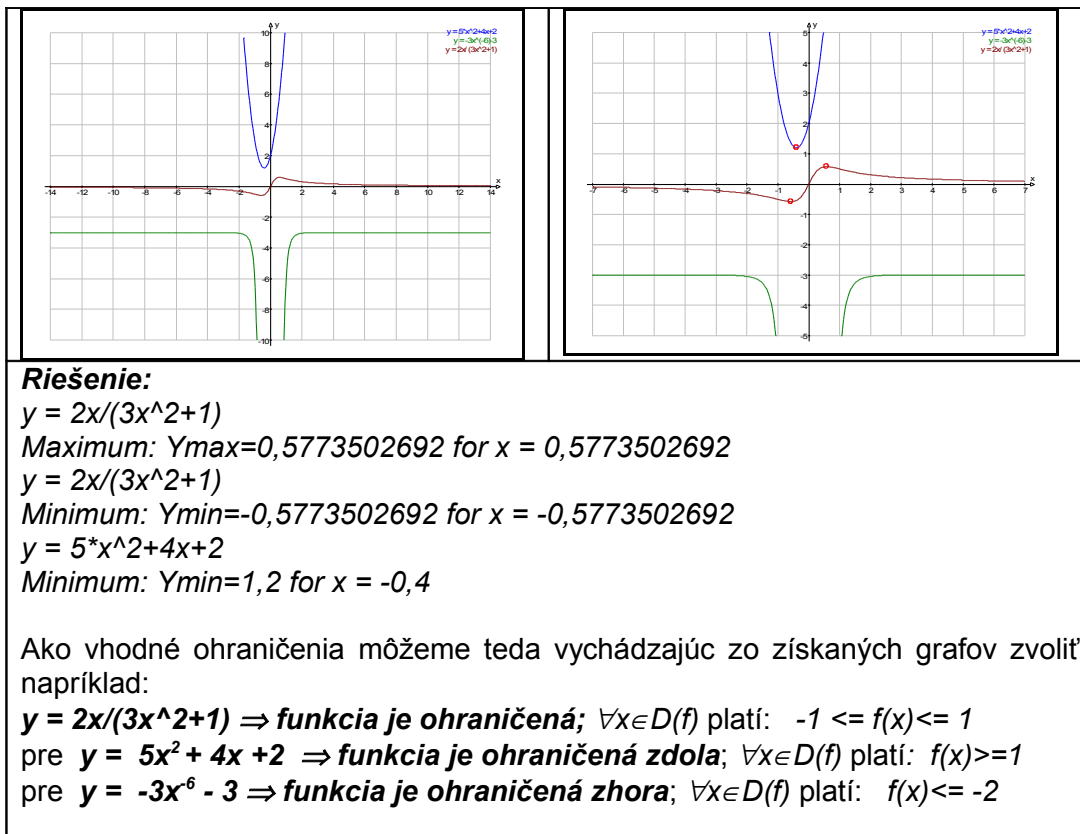


Grafy funkcií získame didaktickým softvérom EG. Tlačidlom z lišty programu určíme minimá a maximá funkcií. Výsledky sa objavajú v okne Log, program červeným krúžkom vyznačí body extrémov. Tieto následne pri algebraických dôkazoch tvrdení o ohraničenosti skúmaných funkcií. Počas tejto činnosti si študenti tiež zopakujú riešenie rôznych typov nerovníc.



Pre funkciu $y = -3x^6 - 3$ program EG nevyhodnotil žiadne extrémy. V rámci záverečnej spoločnej diskusie formulujeme otázky typu: Ako sa chovajú hodnoty

funkcie v okolí bodu $x=0$; aké hodnoty nadobúda funkcia v prípade, že x sa blíži i nekonečnu (k mínus nekonečnu). Zoznamujeme takto študentov na intuitívnej úrovni s pojmom okolie bodu, limita funkcie, vlastná limita v nevlastnom bode a nevlastná limita vo vlastnom bode. Takto vďaka didaktickému softvéru, vizualizácii a konkretizácii riešených problémov môžeme zefektívniť a zatraktívniť vyučovanie, spraviť preberanie danej témy zrozumiteľnejším



Obr.2.7:postup riešenia príkladu 2.5

PRÍKLAD 2.6

V programe Graphmatica vytvorte grafy funkcií:

- $y = 3^{x+2}$
- $y = x^5 + x^3 + 1$
- $y = \log(x-3)$

a tiež grafy

- $y = -2x - 3$
- $y = -x^3 - x$
- $y = (1/5)^x$

Akú vlastnosť majú všetky načrtnuté grafy v prvom a akú v druhom prípade?

RIEŠENIE

V tejto úlohe študenti získajú grafy troch funkcií tentoraz v programe Graphmatica,



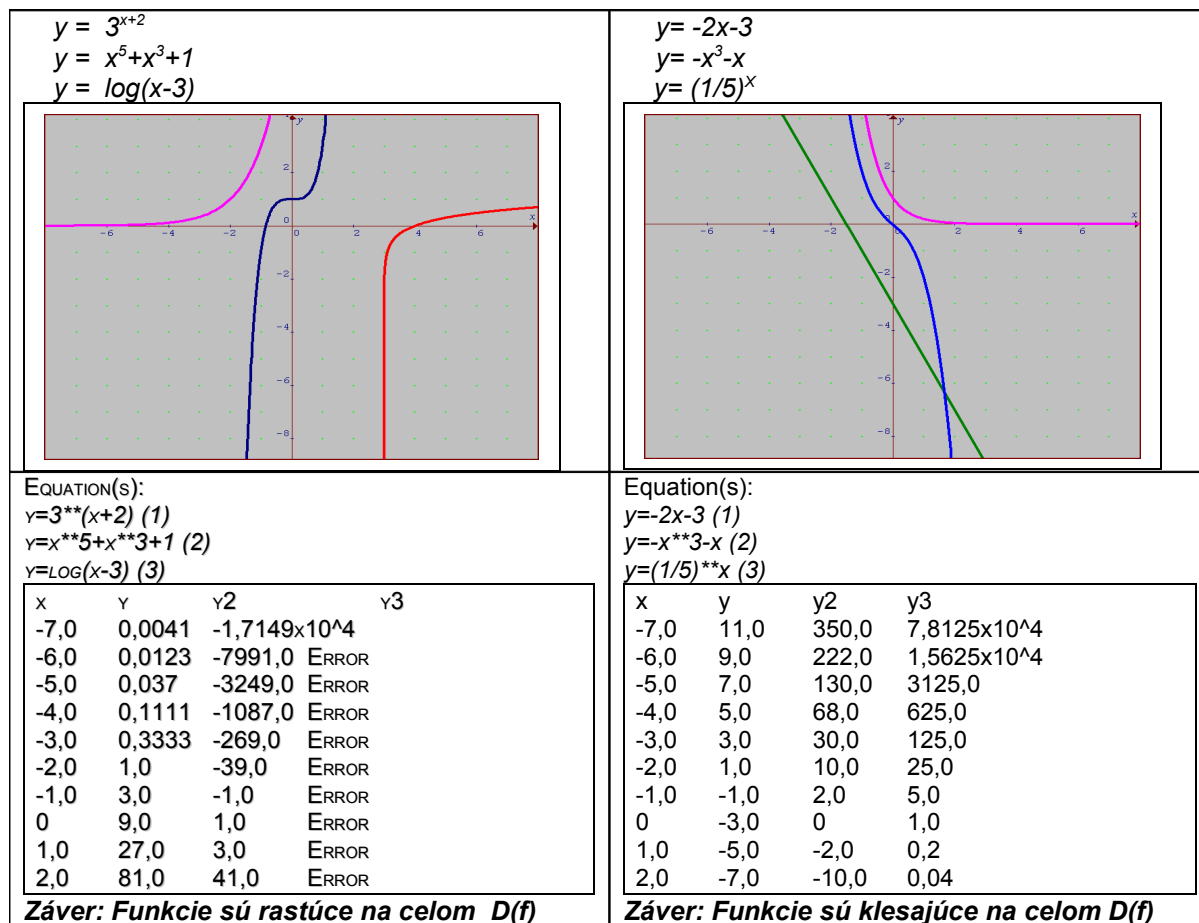
ktorý vďaka tlačidlu vypíše pre danú funkciu tabuľku usporiadaných dvojíc hodnôt $[x, f(x)] \in f$ v závislosti na zvolenej mierke. (Postup je jednoduchší a rýchlejší ako pri programe EG). Analýza grafov a hodnôt funkcií v tabuľke núti k neformálnemu uvažovaniu o používaných definíciách. Študenti vyslovujú a overujú hypotézu:

V prípade prvej sady funkcií platí:

$\forall x_1, x_2 \in D(f); x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ teda funkcia je rastúca,

v prípade druhej sady platí:

$\forall x_1, x_2 \in D(f); x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ teda funkcia je klesajúca.



Obr.2.8: Postup pri riešení príkladu 2.6 programom Graphmatica



Študenti sú následne vyzvaní odpovedať aj na otázky typu: Môžeme dedukovať, že ak funkcia $f(x)$ je rastúca (klesajúca) na množine M a súčasne $g(x)$ je rastúca (klesajúca) na M potom je aj funkcia $(f(x)+g(x))$, $(f(x)g(x))$ rastúca (klesajúca) na M ? Aký je vzťah medzi monotónnosťou funkcie $f(x)$ a opačnej funkcie $-f(x)$? Počítačové technológie otvoria priestor pre veľmi zaujímavú heuristickú besedu, ktorú môžeme iniciovať otázkami podobného typu. Vďaka dataprojektoru a didaktickému softvéru študenti experimentujú s rôznymi konkrétnymi modelmi, ktoré analyzujú, vyslovujú hypotézy, potvrdzujú ich analytickými výpočtami. Sú aktívnymi a tvorivými subjektami vyučovacieho procesu.

PRÍKLAD 2.7

Do jedného obrázku narysujte grafy funkcií:

a)

- $y = |-3x + 5|$
- $y = -x^2 + 2x + 1$
- $y = -3^x$

b)

- $y = 0,5x + 2$
- $y = 2x^4 - 4x^2 + 3$

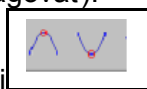
V prípade a) určte interval, na ktorom sú všetky tri funkcie súčasne klesajúce (rastúce).

V prípade b) určte interval, na ktorom sú obe uvedené funkcie súčasne rastúce.

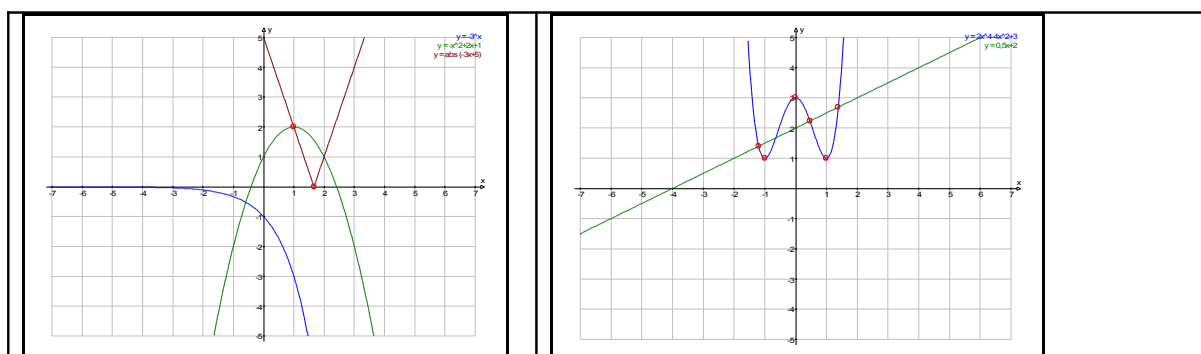
RIEŠENIE



Úloha slúži na precvičovanie vlastností funkcií a súčasne aktualizovanie už známych vlastností konkrétnych elementárnych funkcií (lineárna, kvadratická, exponenciálna). Vo všeobecnosti platí, že veľkým pozitívom využívania technológií vo vyučovacom procese je práve možnosť vrátiť sa a oživiť vedomosti získané v minulosti, poznatky sú trvacejšie a navzájom prepojenejšie v rámci poznatkovej štruktúry. (počítače šetria čas, umožňujú nám flexibilne reagovať).



Programom EG získame potrebné grafy funkcií. Tlačidlami a určíme maximum a minimum funkcie $y = 2x^4 - 4x^2 + 3$ a tiež potrebné priesečníky grafov. Získané údaje z okna Log použijeme pri riešení úlohy b).



Riešenie

a) Údaje z okna Log pre funkcie:

$y = -x^2 + 2x + 1$ and $y = \text{abs}(-3x + 5)$ Intersection: $y = 2$ for $x = 1$

$y = \text{abs}(-3x + 5)$ Root: $x = 1,68$

Teoretické poznatky o monotónnosti elementárnych funkcií vedú k záveru, že hľadaným intervalom, na ktorom sú všetky funkcie klesajúce je $x \in < 1, 5/3 >$.

b) Údaje z okna Log pre funkciu $y = 2x^4 - 4x^2 + 3$

Maximum: $Y_{\text{max}} = 3$ for $x = 0$

Minimum: $Y_{\text{min}} = 1$ for $x = -1$

Minimum: $Y_{\text{min}} = 1$ for $x = 1$

Funkcia $y = 0,5x + 2$ je na celom svojom definičnom obore rastúca. Treba len určiť intervaly, na ktorých rastie funkcia $y = 2x^4 - 4x^2 + 3$.

Podľa údajov z okna Log sú to intervaly: $x \in < -1, 0 >$ a $x \in < 1, \infty >$. Obe funkcie teda rastú na uvedených intervaloch.

Obr.2.9: Riešenie príkladu.2.7 programom EG

PRÍKLAD 2.8

Nájdite všetky hodnoty parametra a , pre ktoré bude funkcia daná predpisom:

$$f(x) = |ax + 1| - |2x - a|$$

- ohraničená
- ohraničená zdola
- ohraničená zhora
-

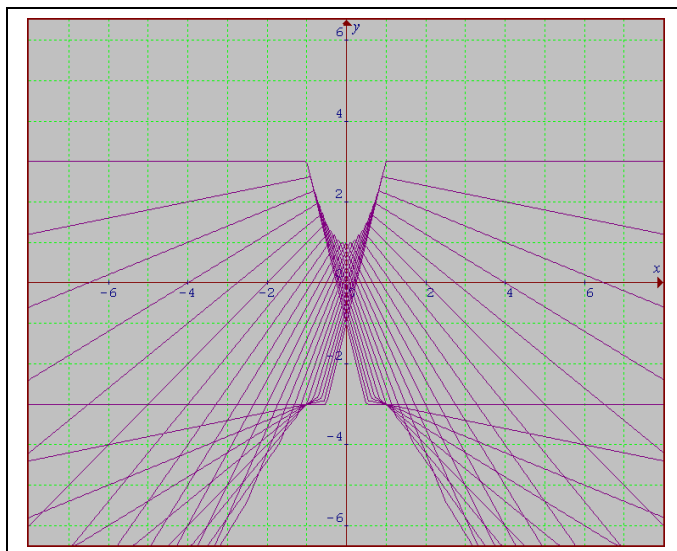
RIEŠENIE



Úloha je inšpirujúca, vhodná na cvičenia z matematiky alebo matematický seminár vo 4. ročníku gymnázia. Pri jej riešení si študenti zopakujú hneď niekoľko pojmov: absolútna hodnota čísla, funkcie s absolútnou hodnotou, ohraničená funkcia, monotónnosť funkcie, vlastnosti lineárnej funkcie. Úlohu môžeme riešiť používajúc definíciu ohraničenej funkcie, alebo tiež stačí vedieť definíciu absolútnej hodnoty a mať veľa trpezlivosti pri testovaní jednotlivých prípadov. Omnoho zaujímavejší je experimentálny a tvorivý postup s použitím heuristickej simulácie programom Graphmatica. Môžeme študentom navrhnúť použitie grafického modelu aj bez predchádzajúcich analýz. Ak vhodne zvolí hodnoty parametra a (pod vhodnosťou myslíme mieru ich relevancie k riešeniu problému), model mu poskytne dostatok materiálu pre ďalšiu dedukciu. Obrázok 2.10 reprezentuje takýto "pokús na slepo". Do dialógového okna bola zadaná funkcia $f(x)$ v tvare: $y = \text{abs}(a \cdot x + 1) - \text{abs}(2 \cdot x - a)$ { a : -3, 3, 0.2}

Program vykreslil postupne grafy funkcií $y = \text{abs}(-3x + 1) - \text{abs}(2x + 3)$ až $y = \text{abs}(3x + 1) - \text{abs}(2x - 3)$. Grafický model poskytne niekoľko dobrých nápadov. Študenti zaregistrujú, že grafom takejto funkcie je lomená čiara pozostávajúca z troch segmentov, nakoľko máme dva nulové body, v ktorých hodnoty výrazov v absolútnych hodnotách menia znamienko (okrem prípadu, kedy sa $a = 0$). Každý z nich je grafom lineárnej funkcie $y = ax + b$. Táto môže byť rastúca, klesajúca alebo stacionárna v závislosti od hodnoty koeficientu a . Skúmaná funkcia $f(x)$ bude ohraničená práve vtedy, ak prvý a tretí segment grafu bude stacionárna funkcia typu $y = k$. Ak si študent správne odpovie na otázku, kedy taký prípad môže nastať, posunie sa bližšie k riešeniu. Funkcia môže byť ohraničená zdola (zhora), ak lineárna funkcia reprezentujúca prvý segment má opačný charakter monotónnosti ako funkcia, v treťom intervale. Zvláštnu pozornosť treba venovať prípadu pre $x = 0$. Môžeme nechať študentov pracovať samostatne a následne zorganizovať heuristickú besedu o spôsoboch riešenia úlohy.

Podstatné je, že takýto prístup je kreatívnejší a atraktívnejší, študenti sú pri ňom aktívnymi "objaviteľmi" nových poznatkov, tiež je menej pracný ako klasický analytický prístup, vedie rýchlejšie k cieľu.



Obr.2.10: Vizualizácia problému programom Graphmatica

Predchádzajúce úvahy privedú študentov veľmi rýchlo k poznaniu, že ohraničenosť zhora alebo zdola grafu funkcie $f(x)$ závisí od toho, či sa hodnota parametru a pohybuje v intervale $< -2, 2 >$, alebo nadobúda hodnoty z intervalov $(-\infty, -2)$ či $(2, \infty)$.

Analytické riešenie úlohy.

Urobíme ho v štyroch krokoch:

1. Nech $a = 0$ potom pre $x \geq 0$ dostávame $\Rightarrow f_1(x) = 1 - 2x$ a pre $x \leq 0 \Rightarrow f_1(x) = 1 + 2x$

Grafom funkcie je lomená čiara nadobúdajúca maximálnu hodnotu $f(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Platí: $1 + 2x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0$ a súčasne $1 - 2x \leq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$.

Funkcia je ohraničená zhora $\forall x \in \mathbb{R}$.

2. Pre $a > 0$ dostávame nasledovné riešenia na parciálnych intervaloch:

$\forall x \in (-\infty, -1/a)$ dostávame $f_1(x) = (2 - a)x - 1 - a$

$\forall x \in (-1/a, a/2)$ dostávame $f_2(x) = (a + 2)x + 1 + a$

$\forall x \in (a/2, \infty)$ dostávame $f_3(x) = (a - 2)x + 1 + a$

Ďalší potup oprieme o fakt, že lineárna funkcia $y = ax + b$ je rastúca pre kladné hodnoty koeficientu a , klesajúca pri záporných hodnotách koeficientu a .

Zostavíme tabuľku riešení:

$x \in$ do intervalu	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	schematicky	ohraničenosť
$(0, 2)$	$+ \nearrow$	$+ \nearrow$	$- \searrow$	$\nearrow \nearrow \searrow$	\exists supremum $\Rightarrow f(x)$ ohraničená zhora
$(2, \infty)$	$- \searrow$	$+ \nearrow$	$+ \nearrow$	$\searrow \nearrow \nearrow$	\exists infimum $\Rightarrow f(x)$ ohraničená zdola

Tab.2.1: Tabuľka riešení príkladu 2.8

3. Pre $a < 0$ dostávame tieto riešenia na parciálnych intervaloch:

$\forall x \in (-\infty, a/2)$ dostávame $f_1(x) = (a + 2)x + 1 - a$

$\forall x \in (a/2, -1/a)$ dostávame $f_2(x) = (a - 2)x + 1 + a$

$\forall x \in (-1/a, \infty)$ dostávame $f_3(x) = (-a - 2)x - 1 + a$

Tabuľku riešení vzhľadom k hodnote parametru a :

$x \in$ do	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	schematick	ohraničenosť
------------	----------	----------	----------	------------	--------------

intervalu))	y	
$(-2, 0)$	$+$ ↗	$-$ ↘	$-$ ↘	↗↘↘	\exists supremum $\Rightarrow f(x)$ ohraničená zhora
$(-\infty, -2)$	$-$ ↘	$-$ ↘	$+$ ↗	↘↘↗	\exists infimum $\Rightarrow f(x)$ ohraničená zdola

Tab.2.2: Tabuľka riešení príkladu.2.8

4. Nech $a = 2$, potom $f_1(x) = -3$, $f_2(x) = 4x + 3$, $f_3(x) = 3 \Rightarrow$ funkcia je ohraničená $\forall x \in \mathbb{R}$.

nech $a = -2$, potom $f_1(x) = 3$, $f_2(x) = -4x - 1$, $f_3(x) = -3 \Rightarrow$ funkcia je ohraničená $\forall x \in \mathbb{R}$



Projekty, ktoré uvádzame na záver vyžadujú síce precíznosť, vytrvalosť a disciplínu, no súčasne sú veľmi jednoduché na realizáciu. Umožňujú študentom uvedomiť si existenciu funkcií všade okolo nás. Podporiť kreativitu študentov môžeme tiež tým, že ich povzbudíme k samostatnému vyhľadávaniu podobných situácií a funkčných závislostí v každodennom živote



Úlohy na samostatné riešenie

ÚLOHA 4.2.1

Počas dvoch týždňov zapisuj denne teplotu vzduchu v tom istom čase. Definuj funkciu, ktorá priradí každému dňu v týždni teplotu vzduchu zapísanú v určitú hodinu. Narysuj graf tejto funkcie, uvažuj o jej vlastnostiach. Je prostou funkciou? Je ohraničená? Je monotónna, ak áno urči intervaly monotónnosti tejto funkcie!

ÚLOHA 4.2.2

Každé ráno v mesiaci ohodnoťte svoju náladu na stupnici 0 (otrasná) po 10 (vynikajúca). Posledný deň mesiaca narysujte graf funkcie, ktorá priradí každému dňu mesiaca úroveň vašej nálady. Aké vlastnosti má táto funkcia? Má aj nulové body? Úlohu zopakujte aj v ďalšom mesiaci a porovnať priebeh oboch získaných funkcií!