

6 Lineárne nerovnice s jednou a dvoma neznámymi a ich sústavy



Metodický zámer

Podobne ako rovnica aj nerovnica je predovšetkým výzva na riešenie, hľadanie množiny všetkých $x, y \in R$, ktoré danej nerovnici vyhovujú. Rozdiel medzi nimi je v kvantite množiny riešení, v spôsobe riešenia a vo význame a spôsobe skúšky. Zvyčajne je množina riešení rovnice konečná a nerovnice nekonečná. Operácie, ktoré používame pri úpravách rovníc sú platné s menšími modifikáciami; (ak nerovnosť vynásobíme záporným číslom, zmení sa znak nerovnosti) aj pri riešení nerovníc.

S lineárnymi nerovnicami sa študenti stretávajú v 1.ročníku gymnázia (kvinte), v rámci témy *Lineárne nerovnice, intervaly*. S týmto učivom veľmi úzko súvisí aj problematika rovníc a nerovníc s absolútnou hodnotou preberaná v tesnej nadväznosti tejto témy, preto sme sa rozhodli v tejto kapitole obe spojiť a poukázať na možnosť inovatívneho prístupu pri vyučovaní zmenej tematiky pomocou programu Graphmatica. Tento dokáže inetrperetovať nielen reálne funkcie ale tiež relácie na R^2 . Skúsenosti potvrdzujú formalizmus, nepochopenie a veľmi slabú pripravenosť študentov v oblasti riešenia nerovníc všetkých typov. Grafické modely, ktoré doporučujeme používať pri riešení nerovníc majú predovšetkým potvrdiť a informovať o tom, či a koľko riešení daná sústava nerovníc má a tiež poukázať na grafickú interpretáciu takýchto matematických problémov.

Na úvod uvádzame dve aktivity zamerané na určovanie vzdialeností bodov na číselnej osi pomocou absolútnej hodnoty čísla. Hoci úloha patrí medzi jednoduché a štandardné, vzhľadom na závažné nedostatky, ktoré registrujeme u študentov pri ich riešení, doporučujeme intenzívnejšie precvičenie príkladov tohto typu aj pomocou IKT.



Čo by mal študent vedieť - stručný sylabus

Lineárna nerovnica s jednou neznámou je nerovnica, v ktorej sa vyskytuje premenná x so stupňom mocniny max. 1, t.j. nerovnica $ax + b < 0$, respektíve nerovnica so znakmi $\leq, \geq, >$ kde $a, b \in R$.
Nerovnice $ax+by +c >0$, $ax+by + c <0$, $ax+by +c \geq 0$, $ax+by +c \leq 0$, kde $a^2 + b^2 > 0$, nazývame nerovnicou prvého stupňa s dvoma neznámymi

Poznámka: Dvojica čísel (x_1, y_1) je riešením lineárnej nerovnice s dvoma neznámymi x, y práve vtedy, ak po ich dosadení do nerovnice za premenné x a y dostaneme pravdivý výrok.
Množina riešení lineárnej nerovnice je nekonečná alebo prázdna.
Grafickou interpretáciou množiny riešení lineárnej nerovnice s dvoma neznámymi je polrovina s hraničnou priamkou $ax+by+c=0$

<ul style="list-style-type: none"> • <u>Karteziánskym grafom</u> lineárnej rovnice s dvoma neznámymi je priamka. • <u>Karteziánskym grafom</u> lineárnej nerovnice s dvoma neznámymi je polrovina s hraničnou priamkou alebo bez nej. • Rovnicu hraničnej priamky získame, ak v nerovnici zmeníme znamienko nerovnosti na znamienko rovnosti. • Karteziánskym grafom sústavy dvoch lineárnych nerovníc s dvoma neznámymi je <u>ostrý uhol, čiže konvexná množina</u>. 	<ul style="list-style-type: none"> • <u>Absolútna hodnota reálneho čísla:</u> pre každé reálne číslo a je jeho <u>absolútna hodnota</u> a rovná: $a = \begin{cases} a; \dots ak & a \geq 0 \\ -a; \dots ak & a < 0 \end{cases}$ • Z geometrického pohľadu definujeme absolútnu hodnotu ako <u>vzdialenosť bodu a na reálnej osi od nuly</u> $x < b \Leftrightarrow x \in (-b, b);$ $x > b \Leftrightarrow x \in (-\infty, -b) \cup (b, \infty);$ $x+a < b \Leftrightarrow x \in (-a-b, -a+b);$ $x+a > b \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a-b) \cup (-a+b, \infty)$
---	---



Riešené príklady

PRÍKLAD 6.1

Určte množinu riešení nerovníc:

- a) $|x| < 3$
b) $|x| \geq 3$
c) $|x - 3| \geq 2$
d) $|2x - 1| \leq 3$

RIEŠENIE



Úlohou študentov je príklady riešiť najskôr analyticky, vychádzajúc z definície absolútnej hodnoty, následne v kresliči grafov zadané problémy vizualizovať a analyzovať výsledky (program Graphmatica vo funkcii autokontroly). Študenti zovšeobecnia získané poznatky a sami naznačia ako postupovať, ak chceme na číselnej osi znázorniť množiny bodov daných vlastností a urýchliť tak proces riešenia nerovnice. (určenie nulového bodu pre výraz v absolútnej hodnote: $|x+a|=0 \Leftrightarrow x=-a$, vyznačenie čísla a na číselnej osi, určenie intervalov, ktoré sú riešením nerovnice).

Pozornosť venujeme predovšetkým prípadu d), ktorý treba objasniť detailne. Tu sa totiž študenti dopúšťajú chýb najčastejšie. Je vhodné pripraviť samostatnú aktivitu s viacerými príkladmi typu d) a motivovať študentov, aby sami identifikovali zdroj chýb.

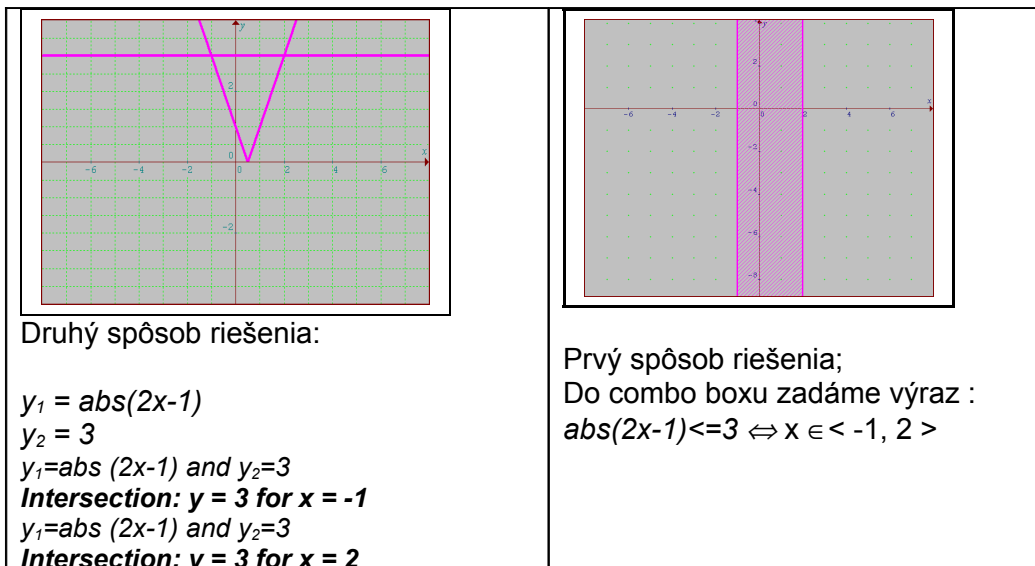
Grafické riešenie môžeme realizovať dvoma spôsobmi: priamo vkladáme do combo boxu nerovnicu, ktorú chceme riešiť, alebo zadáme zvlášť výraz na pravej a zvlášť výraz na ľavej strane nerovnice (ako funkcie y_1 a y_2), následne vyhladáme priesečníky grafov funkcií pomocou **FIND INTERSECTION** z menu **TOOLS** a odčítame riešenie nerovnice.

Druhý spôsob riešenia:

Vyznačíme do jedného obrázku grafy:

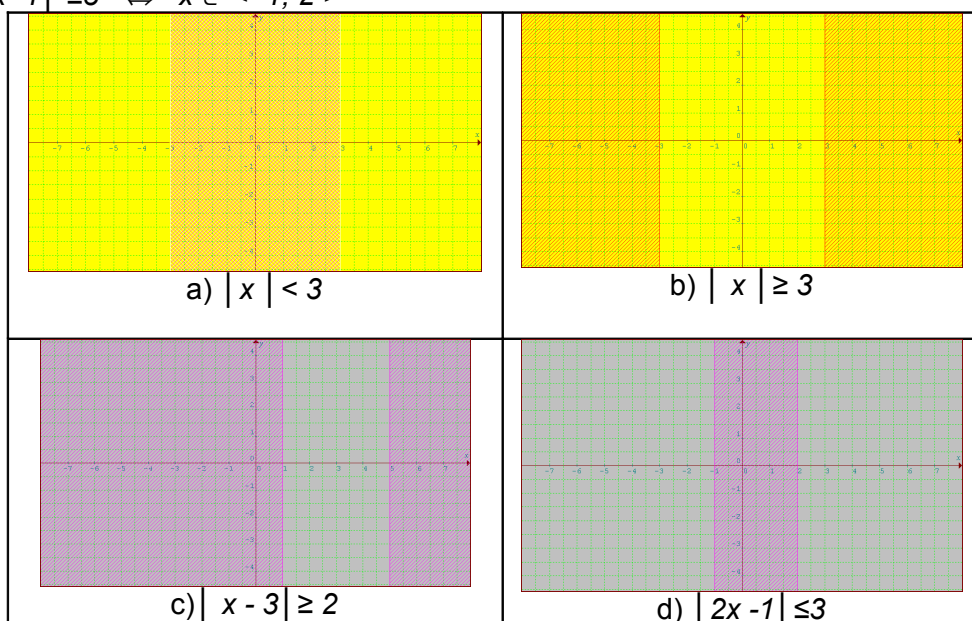
$$y = \text{abs}(2x-1)$$

$$y = 3$$



Obr. 6.1: Dva spôsoby riešenia zadania d) z príkladu 6.1

- a) $|x| < 3 \Leftrightarrow x \in (-3, 3)$
b) $|x| \geq 3 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3] \cup [3, \infty)$
c) $|x - 3| \geq 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1] \cup [5, \infty)$
d) $|2x - 1| \leq 3 \Leftrightarrow x \in [-1, 2]$



Obr. 6.2: Grafická interpretácia riešenia príkladu 6.1

PRÍKLAD 6.2

Zapíšte pomocou absolútnej hodnoty množiny bodov daných vlastností:

- a) $x \in [-2, 2]$
b) $x \in [-3, 2]$
c) $x \in (-\infty, -1] \cup [5, \infty)$

Výsledky skontrolujte didaktickým programom!

RIEŠENIE

Úloha má opačný charakter. Znázornenie množín bodov na číselnej osi, následné vyznačenie stredu intervalu x_s a vzdialenosti d čísla x_s od koncových bodov intervalu privedú študentov k správne mu riešeniu. Program Graphmatica má opäť funkciu autokontroly. Príklad dobre preverí neformálnosť vedomostí z tejto oblasti.

- a) $x \in \langle -2, 2 \rangle \Leftrightarrow |x| \leq 2$
- b) $x \in \langle -3, 2 \rangle \Leftrightarrow |2x + 1| \leq 5$
- c) $x \in \langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 5, \infty \rangle \Leftrightarrow |x - 2| \geq 3$
- d)

PRÍKLAD 6.3

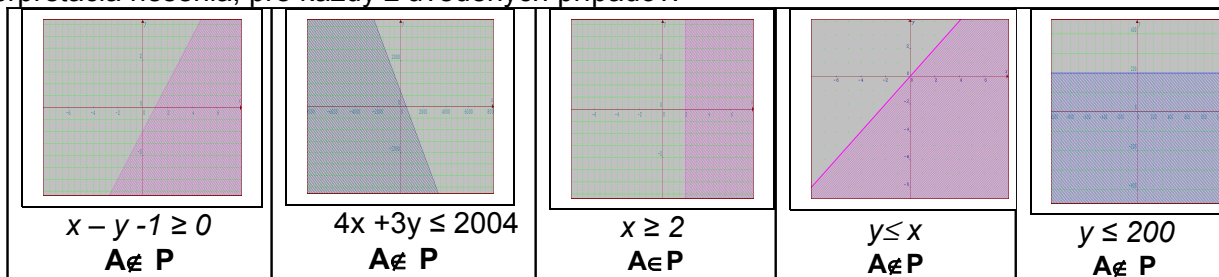
Ovetre, či bod A [2004,2007] patrí do množiny riešení nerovnice:

- a) $x - y - 1 \geq 0$
- b) $4x + 3y \leq 2004$
- c) $y \leq x$
- d) $y \leq 200$
- e) $x \geq 2$

RIEŠENIE



Cieľom úlohy je prostredníctvom programu Graphmatica graficky znázorniť množinu riešení nerovnice, demonštrovať fakt, že je ňou polrovina ohraničená hraničnou priamkou. (alebo bez nej). Študenti na jednej strane prostým dosadením súradníc bodu kontrolujú platnosť podmienky a súčasne registrujú geometrickú interpretáciu riešenia, pre každý z uvedených prípadov.



Obr.6.3: Geometrická interpretácia množiny riešení z príkladu 6.3

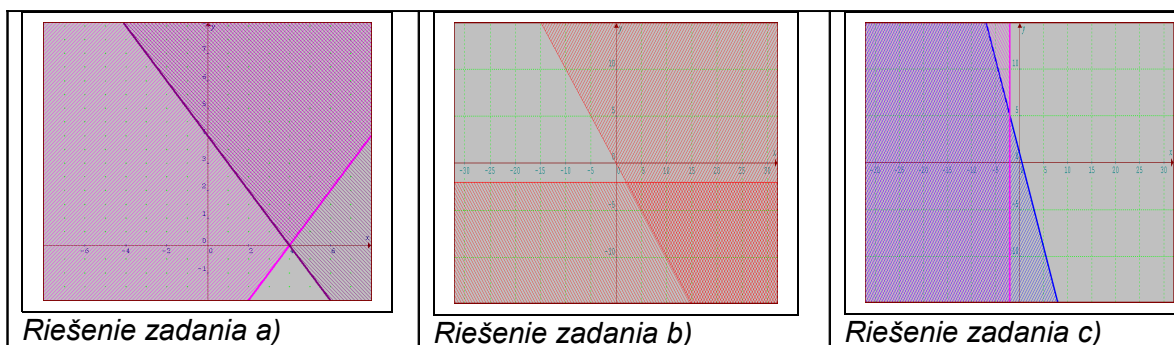
PRÍKLAD 6.4

Určte graficky množinu riešení systémov lineárnych nerovnic:

- a) $y \geq -x + 4$ b) $y \geq -x$ c) $x \leq -3$
- $y \geq x - 4$ $y \leq -2$ $y \leq -5x + 1$

RIEŠENIE

Program Graphmatica vykreslí oblasti (konvexné uhly), ktoré sú riešeniami systémov lineárnych nerovnic. Dosadením súradníc ľubovoľného bodu oblasti študenti kontrolujú správnosť riešenia a súčasne registrujú geometrickú interpretáciu pre každý z prípadov.



Obr.6.4: Množiny riešení sústav lineárnych nerovníc

PRÍKLAD 6.5

Pre aké $p \in \mathbb{R}$ je grafom riešení sústavy lineárnych nerovníc:

$$y \geq -3x + 2$$

$$y \geq px + 4$$

a) polrovina

b) pravý uhol

c) konvexný uhol



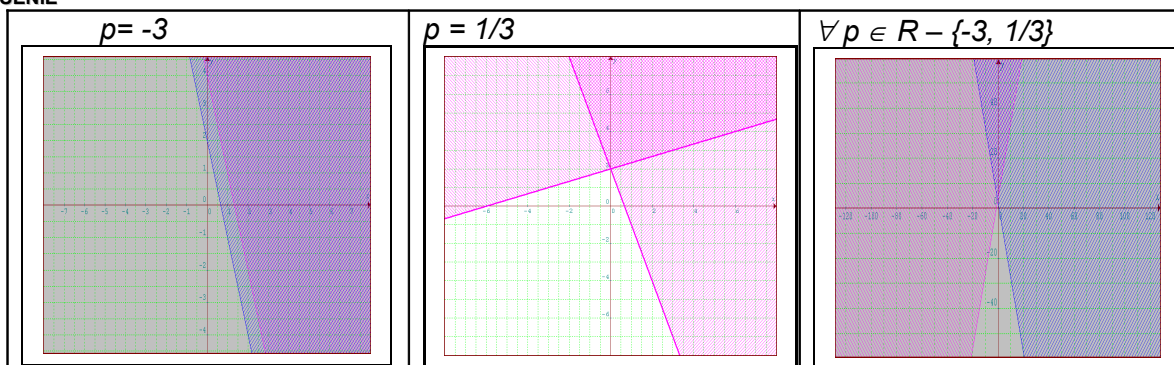
Pri tejto úlohe opäť umožníme študentom syntetizovať vedomosti získané pri preberaní celku *Lineárne funkcie* a *Systémy lineárnych nerovníc*. Podstatnú úlohu zohráva program Graphmatica, ktorým vizualizujeme riešený problém.

Najskôr znázorníme polrovinu určenú nerovnicou $y \geq -3x + 2$ a následne niekoľko polrovín $y \geq px + 4$ pre $p \in \{2, -2, 0, -3\}$.

Diskusné fórum

- Aby bol prienik polrovín opäť polrovina je nutné, aby hraničné priamky polrovín boli rovnobežné, teda aby mali zhodné smernice. Riešením je teda jediná hodnota $p = -3$
- Konvexný uhol bude riešením systému pre $\forall p \in \mathbb{R} - \{-3, 1/3\}$
- Pravý uhol bude riešením systému nerovníc práve vtedy, ak hraničné priamky budú na seba kolmé, teda ak pre vzťah ich smerníc platí :
 $k_1 = -1/k$; v našom prípade pre $p = 1/3$

RIEŠENIE



Obr.6.4: Grafický model riešenia príkladu.6.5



Veľmi podnetnými sú aj nasledujúce úlohy, pri riešení ktorých sú prepojené vedomosti o absolútnej hodnote čísla, kartézskom súradnicovom systéme, logických spojkách, lineárnej funkcii a systémoch lineárnych nerovníc. Študenti vychádzajú

z definície absolútnej hodnoty čísla dostávajú niekoľko podmienok. Tieto formulujú v tvare lineárnych nerovníc s dvoma neznámymi. Grafickým riešením systému týchto nerovníc dostávajú hľadané riešenie. Necháme študentom priestor na samostatné riešenie úloh a autokontrolu didaktickým programom Graphmatica. V následnej heuristickej besede ozrejmiť prípadné nejasnosti, nepresnosti a neporozumenia. Študenti majú možnosť sa presvedčiť, že niektoré geometrické útvary sa veľmi elegantne a jednoducho popisujú práve takýmito výrazmi s absolútnymi hodnotami.

PRÍKLAD 6.6

Zakreslite množinu všetkých bodov v rovine, pre ktorých súradnice x, y platí:

- a) $|x| + |y| \leq 4$
- b) $|x + y| \leq 4$
- c) $|x| - |y| \geq 4$
- d) $|x| \leq |y|$

RIEŠENIE

Postup prezentujeme na prípade a); zvyšné úlohy riešime analogicky. Dostávame sústavu 4 lineárnych nerovníc s dvoma neznámymi.

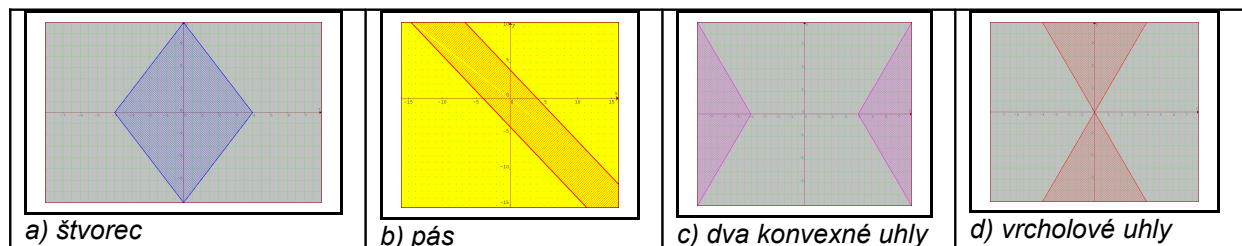
- a) $(x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x + y \leq 4) \vee$
 $(x \geq 0 \wedge y \leq 0 \wedge x - y \leq 4) \vee$
 $(x \leq 0 \wedge y \geq 0 \wedge -x + y \leq 4) \vee$
 $(x \leq 0 \wedge y \leq 0 \wedge -x - y \leq 4)$

V programe Graphmatica sa to zapíše takto:

- $x - y \leq 4 \quad \{0, 4\}$
- $x + y \leq 4 \quad \{0, 4\}$
- $x - y \leq 4 \quad \{0, 4\}$
- $-x - y \leq 4 \quad \{0, 4\}$

Využívame pritom možnosti špecifikácie definičného oboru, čo zapíšeme formou zloženej zátvorky za rovnicu (nerovnicu) do combo boxu ako: $\{xmin, xmax\}$.

Môžeme tiež použiť priamy zápis : $abs(x) + abs(y) \leq 4$. Získavame tieto grafické riešenia.



Obr.6.5: Grafická interpretácia riešenia príklad.6.6