

3 Lineárna funkcia



S lineárnou funkciou, teda funkciou tvaru $y = ax + b$, sa žiaci stretajú po prvýkrát v 9. ročníku základnej školy. Vedia už tiež, že jej grafom je priamka. Spoznávajú, že lineárnosť je vlastne rovnomernosť a lineárnu funkciu využívame na reprezentovania takých dejov okolo nás, u ktorých túto rovnomernosť pozorujeme. Ak teda registrujeme, že prírastok funkčnej hodnoty za "jednotku" (obyčajne času) je rovnaký, máme dočinenie s lineárnou funkciou. S lineárnosťou vieme tiež veľmi ľahko nárábať, je to prístupný nástroj ako vytvoriť matematický model istých javov okolo nás. Nasledujúci scenár vyučovacej hodiny má za cieľ fixovanie a integrovanie všetkých informácií súvisiacich s týmto pojmom na úrovni SŠ. Téma sa preberá v rámci celku *Funkcie, rovnice a nerovnice I* v 1.ročníku gymnázia (kvinte). Neformálne porozumenie kľúčových pojmov je predpokladom pre následné úspešné riešenie rovníc a nerovníc s absolútnymi hodnotami a tiež systémov lineárnych rovníc s dvoma neznámymi.

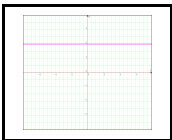
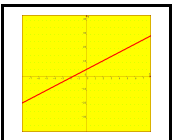
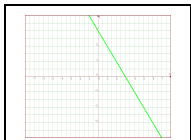


Čo by mal študent vedieť – stručný sylabus

Lineárna funkcia je každá funkcia určená predpisom $y = ax + b$, kde; $a, b \in R$; $a \neq 0$;

Ak $a = 0$ funkcia je konštantná.

Grafom každej každej lineárnej alebo konštantnej funkcie je priamka.

Konštantná funkcia	Lineárna funkcia	
<p>$a = 0$</p>  <p>$D(f) = R$; $H(f) = b$ nie je prostá ohraničená $\forall x \in R$ má maximum aj minimum</p>	<p>$a > 0$</p>  <p>$D(f) = R$; $H(f) = R$ rastúca nie je ohraničená nemá extrémny nulové body; $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -b/a$</p>	<p>$a < 0$</p>  <p>$D(f) = R$; $H(f) = R$ klesajúca nie je ohraničená nemá extrémny nulové body; $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -b/a$</p>



Riešené príklady

PRÍKLAD 3.1

Pomocou didaktického softveru narysujte do jedného súradnicového systému súbor grafov lineárnych funkcií špecifických vlastností. Pozorujte a analyzujte získané grafy. Výsledky pozorovaní zovšeobecnite a zapíšte do tabuľky. Uvažujte nasledujúce prípady:

a) Koeficient $a = 0$ rôzne hodnoty koeficientu b :

- $y = 0$
- $y = 2$
- $y = -3$
- $y = 3,2$

b) Koeficient $b = 0$, rôzne hodnoty koeficientu a

- $y = 5x$
- $y = -3x$
- $y = -1,25x$
- $y = x$

c) Koeficient $a > 0$ - totožný, rôzne hodnoty koeficienta b

- $y = 3x + 2$
- $y = 3x - 4$
- $y = 3x$
- $y = 3x - 2,1$

d) Koeficient $a < 0$ - totožný, rôzne hodnoty koeficienta b

- $y = -2x + 1$
- $y = -2x - 3$
- $y = -2x$
- $y = -2x - 1,25$

e) Koeficient b je totožný, rôzne koeficienty a

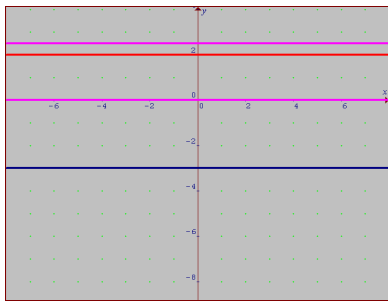
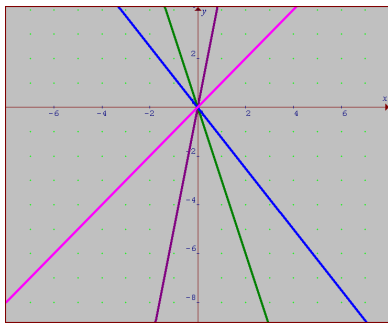
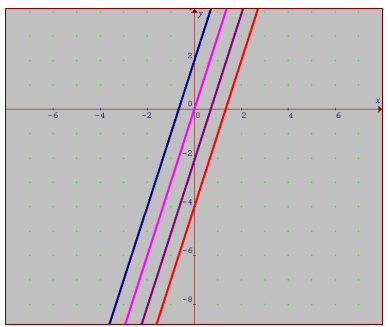
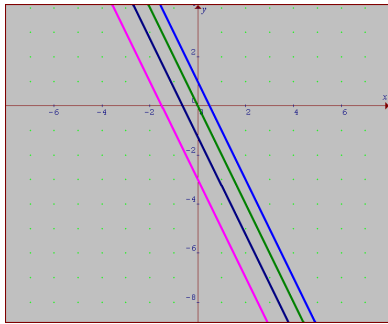
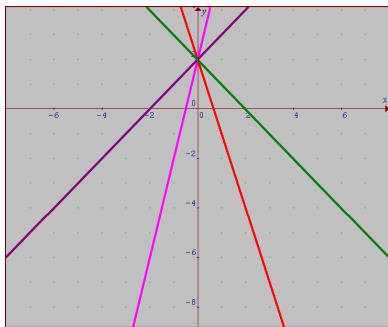
- $y = -3x + 2$
- $y = 4x + 2$
- $y = x + 2$
- $y = -x + 2$

RIEŠENIE



Využijeme program EG a zostrojíme vždy grafy niekoľkých funkcií s určitou vlastnosťou do toho istého okna *Graph*. Motivujeme študentov, aby sa snažili do výslednej tabuľky zapísať čo najviac záverov svojich pozorovaní. Zameriame sa aj na nulové body funkcie. Je dobré, ak sa študenti naučia vnímať súvislosť medzi riešením rovnice (hľadaním koreňov rovnice $f(x) = 0$, kde $f(x)$ je ľubovoľná funkcia a určovaním nulových bodov príslušnej funkcie $y = f(x)$). *Pozitívom práce s počítačmi* je aj fakt, že umožňujú študentom pracovať s väčším množstvom konkrétnych modelov ako pri klasickom vyučovaní a tak zefektívniť vyučovací proces. Vo finálnej fáze hodiny prezentujú študenti svoje výsledky pred spolužiakmi, zdôvodňujú svoje závery. Pri prezentácii dbáme na exaktné matematické vyjadrovanie, primeranú argumentáciu.

sada funkcií	reprezentácia na obrazovke počítača	závery pozorovaní
--------------	-------------------------------------	-------------------

<ul style="list-style-type: none"> • $y = 0$ • $y = 2$ • $y = -3$ • $y = 3,2$ 		<ul style="list-style-type: none"> • ak $a = 0$, grafom lineárnej funkcie je priamka rovnobežná s osou x; • funkcia je ohraničená, konštantná
<ul style="list-style-type: none"> • $y = 5x$ • $y = -3x$ • $y = -1,25x$ • $y = x$ 		<ul style="list-style-type: none"> • ak $b = 0$, tak priamka, ktorá je grafom funkcie $y=ax$ prechádza počiatkom súradnicového systému, • naviac, ak $a > 0$ priamka zvierá s osou x ostrý uhol, funkcia je rastúca • ak $a < 0$, priamka zvierá s osou x tupý uhol, funkcia je klesajúca
<ul style="list-style-type: none"> • $y = 3x + 2$ • $y = 3x - 4$ • $y = 3x$ • $y = 3x - 2,1$ 		<ul style="list-style-type: none"> • ak majú lineárne funkcie totožnú hodnotu koeficientu a, potom ich grafmi sú navzájom rovnobežné priamky, • pretože $a > 0$, funkcia je rastúca • funkcie pretínajú os y v bodoch $[0,b]$ a os x v bode $[-b/a,0]$
<ul style="list-style-type: none"> • $y = -2x + 1$ • $y = -2x - 3$ • $y = -2x$ • $y = -2x - 1,25$ 		<ul style="list-style-type: none"> • analogicky ako v predchádzajúcom prípade, grafmi sú rovnobežné priamky, • keďže $a < 0$ funkcie sú klesajúce • funkcie opäť pretínajú os y v bodoch $[0,b]$ a os x v bode $[-b/a;0]$
<ul style="list-style-type: none"> • $y = -3x + 2$ • $y = 4x + 2$ • $y = x + 2$ • $y = -x + 2$ 		<ul style="list-style-type: none"> • v tomto prípade totožná hodnota argumentu b u všetkých funkcií spôsobí, že všetky grafy majú s osou y ten istý priesečník, opäť je ním bod $[0,b]$ • ďalšie vlastnosti jednotlivých funkcií závisia od hodnoty argumentu a

Obr.3.1: Riešenie príkladu 3.1

Príklad 3.2

Marta prešla za 4 hodiny 50 km. Najprv išla pešo, potom chvíľu odpočívala a kochala sa krásnym výhľadom, neskôr stretla kamarátku na bicykli, ktorá ju odviezla na autobusovú zastávku. Zvyšok cesty išla autobusom. Tabuľka prezentuje informácie o Martinej ceste.

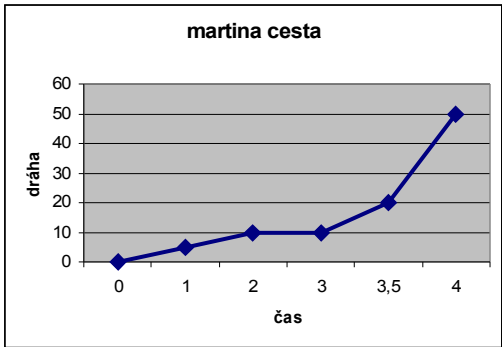
čas(hod)	2	3	3,5	4
dráha (km)	10	10	20	50

- Zostrojte graf popisujúci cestu Marty podľa vyššie uvedenej tabuľky!
- Akou rýchlosťou išla Marta v jednotlivých etapách cesty?
- Zapíšte dráhu prejdenu Martou na jednotlivých úsekoch cesty pomocou vzorca.

Riešenie



Pri riešení úlohy využijeme tabuľkový procesor Excel. Grafom funkcie, ktorá opisuje Evinu cestu bude lomená čiara, jednotlivé úseky cesty budú reprezentované rôznymi lineárnymi funkciami. Definičným oborom parciálnej lineárnej funkcie bude vždy určitý časový interval. Pri riešení teda študenti vytvoria hneď niekoľko predpisov lineárnych funkcií používajúc vždy dva zvolené body, ležiace na grafe funkcie. Takýmto príkladom z praxe priblížime pre študentov „natypické“ grafy funkcií, ktoré sú dané viacerými predpismi na rôznych intervaloch. Táto, v podstate malá anomália, je pre študentov častým zdrojom nepochopenia.

zápis v Exceli	reprezentácia na obrazovke počítača																							
<ul style="list-style-type: none">využijeme dva stĺpce A a B v excelovskom hárku, do ktorých vložíme údaje z tabuľkyPomocou Sprievodcu grafom vytvoríme čiarový graf																								
<ul style="list-style-type: none">do bunky C2 vložíme $= (B3-B2)/(A3-A2)$prekopírujeme do buniek C3:C7v stĺpci C získame údaje o rýchlosti	<table><tr><th>Čas(t/hod)</th><th>Dráha (s/km)</th><th>Rýchlosť</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>5</td><td>5</td></tr><tr><td>2</td><td>10</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td>10</td><td>0</td></tr><tr><td>3,5</td><td>20</td><td>20</td></tr><tr><td>4</td><td>50</td><td>60</td></tr></table>	Čas(t/hod)	Dráha (s/km)	Rýchlosť	0	0	0	1	5	5	2	10	5	3	10	0	3,5	20	20	4	50	60		
Čas(t/hod)	Dráha (s/km)	Rýchlosť																						
0	0	0																						
1	5	5																						
2	10	5																						
3	10	0																						
3,5	20	20																						
4	50	60																						
Záver: <ul style="list-style-type: none">na intervale $<0,2>$ použijeme body $[0,0]$ a $[2,10]$ pre výpočet koeficientov a, b vo vzorci $y=ax+b$. Po dosadení dostávame hodnoty $b = 0$, $a = 5$; teda$\forall x \in <0,2>$ platí predpis $y=5x$$\forall x \in <2,3>$ platí $y =10$$\forall x \in <3;3,5>$ platí $y=20x -50$$\forall x \in <3,5;4>$ platí $y = 60x -190$																								

Obr.3.

PRÍKLAD 3.3

Narysujte graf funkcie $f(x)$ danej predpisom:

$$\forall x \in (-\infty, -3) \text{ platí } f(x) = 2x + 5$$

$$\forall x \in (-3, 3) \text{ platí } f(x) = 2x$$

$$\forall x \in (3, \infty) \text{ platí } f(x) = 2x - 5$$

RIEŠENIE

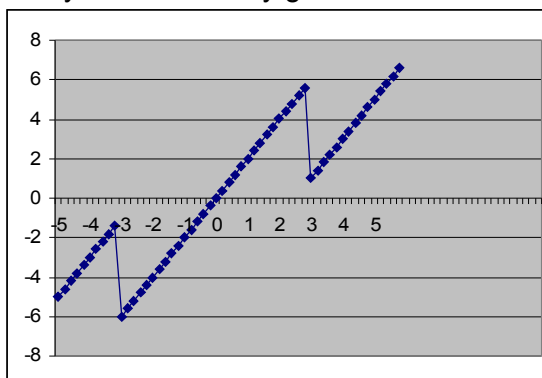
Úloha opačná k predchádzajúcej (poznáme predpis funkcie na jednotlivých intervaloch, chceme získať jej graf), inak pomerne jednoduchá, pre mnohých študentov znamená dosť veľký problém, považujú ju za neštandardnú. Pri jej riešení využijeme na vytvorenie tabuľky hodnôt logickú funkciu *IF* zabudovanú v tabuľkovom procesore Excel; ďalej postupujeme už známym spôsobom pomocou *Sprievodcu grafom* ako už bolo popísané vyššie.

zápis v Exceli + reprezentácia na obrazovke počítača

- generujeme obor funkčných hodnôt funkcie $f(x)$
- definičný obor funkcie $f(x)$ vložíme do stĺpca A,
- použijeme diferenciu $\Delta x = 0,2$ a funkciu Rady pre jednoduché vloženie argumentov
- do bunky B2 vložíme formulu:
`=IF(A1<=-3;2*A1+5;IF(A1<=3;2*A1;2*A1-5))`
- prekopírujeme do B2: B72

x	f(x)
-5	-5
-4,8	-4,6
-4,6	-4,2
-4,4	-3,8
-4,2	-3,4
-4	-3
-3,8	-2,6
-3,6	-2,2
-3,4	-1,8
-3,2	-1,4
-3	-6
-2,8	-5,6
-2,6	-5,2
-2,4	-4,8

- použijeme *Sprievodcu grafom* funkcií a vytvoríme čiarový graf



Obr.3.3: Riešenie príkladu 3.3

PRÍKLAD 3.4

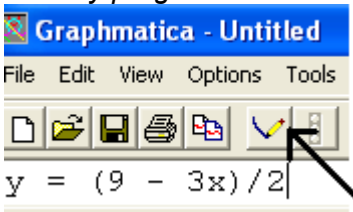
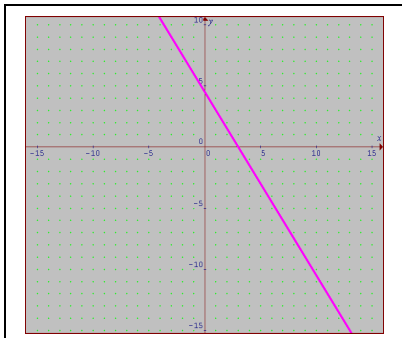
Nákup v cene 115Sk bolo zaplatený päťkorunáčkami, desaťkorunáčkami a dvadsaťkorunáčkami. Bolo použitých spolu 8 mincí a bankoviek. Koľko bolo jednotlivých mincí a bankoviek danej nominálnej hodnoty?

RIEŠENIE



Táto, ako aj všetky ďalšie úlohy zaraďujeme do vyučovacieho procesu v jeho fixačnej fáze. Cieľom úloh je zdôrazniť súvislosť medzi lineárnou funkciou a lineárnou rovnicou s dvoma neznámymi, ktorá často slúži ako matematický model pri riešení rôznych slovných úloh. Príkladmi tohto typu upozorníme študentov na paralelu medzi diofantickými rovnicami s dvoma neznámymi, lineárnou funkciou a všeobecnou rovnicou priamky - z metodického hľadiska dôležité vnímanie vzájomných súvislostí medzi týmito pojmami.

V procese riešenia vytvoríme matematický model slovnej úlohy. Programom Graphmatica získame graf lineárnej rovnice s dvoma neznámymi. Keďže počet mincí a bankoviek musí byť prirodzené číslo zaujímajú nás tie usporiadané dvojice vyhovujúce rovnici $ax+by = c$, kde $x,y \in \mathbb{N}$. Tabuľka hodnôt, ktorú vypíše program Graphmatica umožní nájsť riešenie úlohy.

vytvorenie matematického modelu slovnej úlohy	x - počet 5 -korunáčok, y - počet 10 - korunáčok $(8-x-y)$ - počet dvadsaťkorunáčok $5x + 10y + (8-x-y) \cdot 20 = 115$ $5x + 10y + 160 - 20x - 20y = 115$ $-15x - 10y = -45$ $15x + 10y = 45$ $3x + 2y = 9 \Leftrightarrow y = (9 - 3x)/2$																																												
vytvorenie grafu lineárnej funkcie $y = (9-3x)/2$	<ul style="list-style-type: none">do combo boxu zapíšeme lineárnu funkciu v tvare $y = (9 - 3x)/2$použijeme tlačidlo <i>Enter</i>, alebo ceruzku z lišty programu  <ul style="list-style-type: none">pomocou tlačidla Table aktivujeme tabuľku hodnôt a získame usporiadané dvojice $[x,y]$, ktoré vyhovujú našej rovnici		Equation(s): $y = (9-3x)/2$ <table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>-15,0</td><td>27,0</td></tr><tr><td>-14,0</td><td>25,5</td></tr><tr><td>-13,0</td><td>24,0</td></tr><tr><td>-12,0</td><td>22,5</td></tr><tr><td>-11,0</td><td>21,0</td></tr><tr><td>-10,0</td><td>19,5</td></tr><tr><td>-9,0</td><td>18,0</td></tr><tr><td>-8,0</td><td>16,5</td></tr><tr><td>-7,0</td><td>15,0</td></tr><tr><td>-6,0</td><td>13,5</td></tr><tr><td>-5,0</td><td>12,0</td></tr><tr><td>-4,0</td><td>10,5</td></tr><tr><td>-3,0</td><td>9,0</td></tr><tr><td>-2,0</td><td>7,5</td></tr><tr><td>-1,0</td><td>6,0</td></tr><tr><td>0</td><td>4,5</td></tr><tr><td>1,0</td><td>3,0</td></tr><tr><td>2,0</td><td>1,5</td></tr><tr><td>3,0</td><td>0</td></tr><tr><td>4,0</td><td>-1,5</td></tr></table>	x	y	-15,0	27,0	-14,0	25,5	-13,0	24,0	-12,0	22,5	-11,0	21,0	-10,0	19,5	-9,0	18,0	-8,0	16,5	-7,0	15,0	-6,0	13,5	-5,0	12,0	-4,0	10,5	-3,0	9,0	-2,0	7,5	-1,0	6,0	0	4,5	1,0	3,0	2,0	1,5	3,0	0	4,0	-1,5
x	y																																												
-15,0	27,0																																												
-14,0	25,5																																												
-13,0	24,0																																												
-12,0	22,5																																												
-11,0	21,0																																												
-10,0	19,5																																												
-9,0	18,0																																												
-8,0	16,5																																												
-7,0	15,0																																												
-6,0	13,5																																												
-5,0	12,0																																												
-4,0	10,5																																												
-3,0	9,0																																												
-2,0	7,5																																												
-1,0	6,0																																												
0	4,5																																												
1,0	3,0																																												
2,0	1,5																																												
3,0	0																																												
4,0	-1,5																																												
Riešenie: spomedzi usporiadaných dvojíc našim požiadavkám a podmienkam vyhovuje práve jedna: počet päťkorunáčok $x = 1$ počet desaťkorunáčok $y = 3$																																													

počet dvadsaťkorunáčok $(8-x-y) = 4$

Skúška správnosti: $5 \cdot 1 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 20 = 115$ ✓

Obr.3.4: Riešenie príkladu 3.4

PRÍKLAD 3.5

V istom podniku "Unitrans" cena y (v Sk) za prepravu nákladu po železnici do vzdialenosti x (km) sa vypočíta podľa vzorca $y = 300 + 2,5x$, kým náklady (cena) za preprava toho istého tovaru kamiónom sa vypočítajú podľa vzorca $y = 200 + 5x$.

a) Zvoľte vhodné jednotky na oboch súradnicových osiach, prezentujte grafom závislosť nákladov y prepravy nákladu železnicou aj kamiónom od vzdialenosti $x \in (0 \text{ km}, 90 \text{ km})$

b) Na akú vzdialenosť sa viac oplatí využívať prepravu po železnici?

RIEŠENIE

Opäť ide o slovnú úlohu, poukazujúcu na všestranné využitie lineárnej závislosti v praxi. Jej cieľom je zaujať a motivovať študentov. Pri riešení použijeme program EG a jeho ďalšiu schopnosť vyznačenia a vyčíslenia priesečníka grafov dvoch funkcií



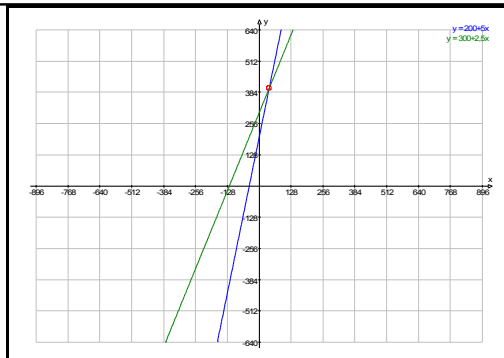
aplikovaním tlačidla na hlavnej lište programu. V príklade bude nutné prispôsobiť mierky na oboch osiach pomocou okna *Range* alebo prostredníctvom lupy



Pri automatickom spustení kresliča grafov sa grafy nezobrazia (základné nastavenie rozsahu na súradnicových osiach to neumožní), nakoľko ich definičné obory a obory hodnôt sú $D(f) < 0, 500 >$; $H(f) = < 200, 2000 >$. Program EG totiž pri automatickom spustení kreslenia použije rozpätie

$x \in < -7,7 >$ a $y \in < -7,7 >$

- Spustíme program EG a do combo boxu zapíšeme funkčný predpis $y = 300 + 2,5x$
- stlačíme Enter
- následne vložíme predpis funkcie $y = 200 + 5x$.
- opäť použijeme tlačidlo Enter
- v prípade, že použijeme lupu na priblíženie grafu získame nie najvhodnejšie výsledky, ktoré sa ťažko interpretujú

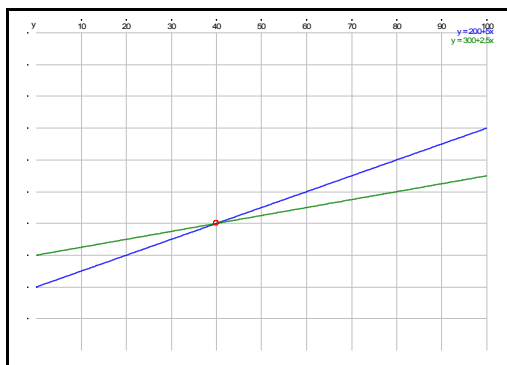


- použijeme okno *Range* a prispôbime mierky na osiach

Range	
Xmin	0
Xmax	100
Xstep	10
Ymin	0
Ymax	1000
Ystep	100



- tlačidlom aktivujeme vyhľadávanie priesečníka grafov



<p>dvoch funkcií, pričom následne ťahom myškou vyznačíme oblasť vyhľadávania</p> <ul style="list-style-type: none"> • v okne <i>Log</i> sa objaví hľadaná hodnota $y_1=300+2,5x$ and $y_2=200+5x$ Intersection: $y = 400$ for $x = 40$ 	<p>Riešenie: Hodnoty funkcie $y= 5x+200$ sú väčšie ako hodnoty funkcie $y = 2,5x+300$ pre $x>40$. na vzdialenosť väčšiu ako 40 km sa teda oplatí prepravovať tovar železnicou. Na kratšie trasy je vhodnejšie využívať kamiónovú dopravu.</p>
---	--

Obr.3.5: Riešenie príkladu 3.5