

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$$

14 Všeobecné vlastnosti postupností



Metodický zámer

S problematikou postupností sa stretávajú žiaci vo 4. ročníku gymnázia (oktáve) v rámci tematického celku *Funkcie, rovnice a nerovnice III.* Nepatria medzi najobľúbenejšie časti matematiky, pretože sú pomerne náročné na pochopenie. Je to spôsobené aj tým, že definície pojmov obsahujú veľa kvantifikátorov, s ktorými ešte žiaci nemajú dostatočné skúsenosti.

Zvýšiť efektivitu výučby a umožniť študentom byť aktívnymi objaviteľmi týchto pojmov môžeme integrovaním niekoľkých aktivít v počítačovej učebni

Všeobecné vlastností postupností; predovšetkým definícia limity postupnosti je študentmi omnoho lepšie chápaná, ak tento pojem za pomoci počítača primerane vizualizujeme. Tak ako pri funkciách, môžeme aj grafy postupností modelovať prostredníctvom tabuľkového procesora MS Excel. Študenti majú tak možnosť sami odкрыť v dynamickom procese činnosti pojmy ako *monotónnosť*, *ohraničenosť postupností*, *limity postupností* a tiež *vzájomné súvislosti medzi nimi*. Ich poznatky



Čo by mal študent vedieť - stručný syllabus

<ul style="list-style-type: none"> Postupnosťou reálnych čísel rozumieme zobrazenie f množiny N všetkých prirodzených čísel do množiny R. $f: N \rightarrow R$ Zapisujeme ju v tvare: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Výraz $f(n) = a_n$ nazývame <u>všeobecným členom postupnosti</u>. V prípade, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je daná svojím n-tým členom, hovoríme že je <u>daná analyticky</u>. Postupnosť môže byť daná aj <u>rekurentne</u>; $a_{n+1} = a_n + 3$, $a_1 = 5$. 	<ul style="list-style-type: none"> <u>Monotónnosť postupnosti</u>. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazývame <u>rastúcou</u>, ak každý jej nasledujúci člen je väčší ako člen predchádzajúci; tzn.: $a_{n+1} - a_n > 0$ pre každé $n \in N$. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazývame <u>klesajúcou</u>, ak každý jej nasledujúci člen je menší ako člen predchádzajúci; tzn. platí: $a_{n+1} - a_n < 0$ pre každé $n \in N$. Každá zhora (zdola) ohraničená neklesajúca (nerastúca) postupnosť má limitu. Ak postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje (t.j. má konečnú limitu), potom je ohraničená.
<ul style="list-style-type: none"> Hovoríme, že <u>číslo b je limitou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$</u>; (alebo tiež, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ <u>konverguje k číslu b</u>), ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje n_0 tak, 	<ul style="list-style-type: none"> Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je <u>ohraničená zhora (zdola)</u>, ak $\exists k \in R$ také, že pre všetky $n \in N$ platí: $a_n \leq k$; ($a_n \geq k$).

že pre každé $n > n_0$ je $|a_n - b| < \varepsilon$.



Inovácia vyučovacieho procesu

Študenti, použijúc MS Excel, získajú tabuľky a grafy postupností, ktoré analyzujú a formulujú závery. Pri tvorbe tabuliek využívajú položku Rady, ktorá je prístupná po vložení počiatočnej hodnoty n , následnom stlačení pravého tlačidla myši (kurzor v tvare „+“), potiahnutí a vyznačení oblasti buniek. Po otvorení sa okna Rady, špecifikujeme s akým krokom a po akú koncovú hodnotu sa bude počiatočná hodnota n zväčšovať. Tento postup s rôznymi obmenami bude využívaný vo väčšine príkladov. Výhodou tabuliek v Exceli je možnosť ich okamžitej a jednoduchšej modifikácie; napríklad nás bude zaujímať ako sa správajú členy postupnosti v okolí hodnoty $n = 1250$, bez problému modifikujeme premennú „ n “ v prvom stĺpci, pričom dôjde k zodpovedajúcej automatickej permutácii ostatných stĺpcov tabuľky a tiež grafu postupnosti. V príklade 1 a 2 nebudeme postup popisovať detailne, nakoľko bude uvedený podrobne v príkladoch 3,4,5.

Tabuľkový procesor umožňuje študentom pozorovať vyššie spomenuté vlastnosti postupností na konkrétnych numerických a grafických modeloch. Povzbudzujeme ich aby samostatne vyslovili tvrdenia, týkajúce sa vzájomných korelácií medzi vlastnosťou ohraničenosti, monotónnosti a konvergenciou postupnosti.

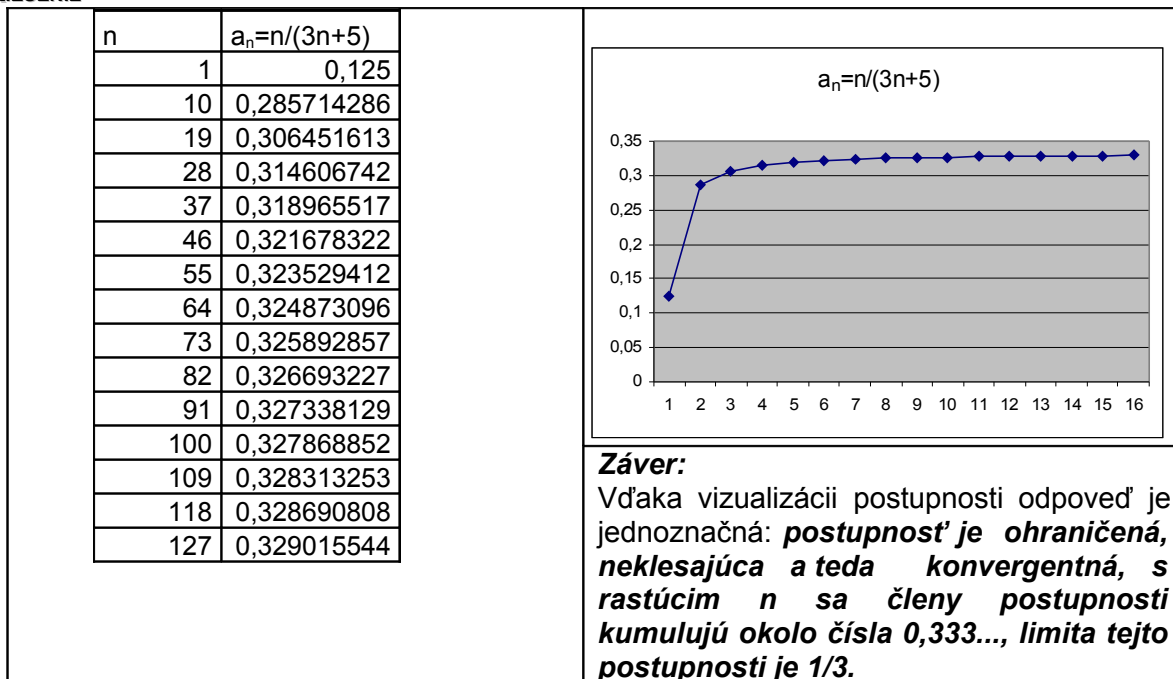


Riešené príklady

PRÍKLAD 14.1

Uvažujme postupnosť $a_n = n/(3n+5)$. Analyzujte tabuľku jej členov a vyvodte závery v zmysle monotónnosti a ohraničenosti danej postupnosti.

RIEŠENIE



Obr.14.1: Vizualizácia riešenia príkladu 14.1

Príklad 14.2

Zistite, ktoré z postupností:

a) $a_n = (1+5n)/n$,

b) $a_n = (-1)^n/n$,

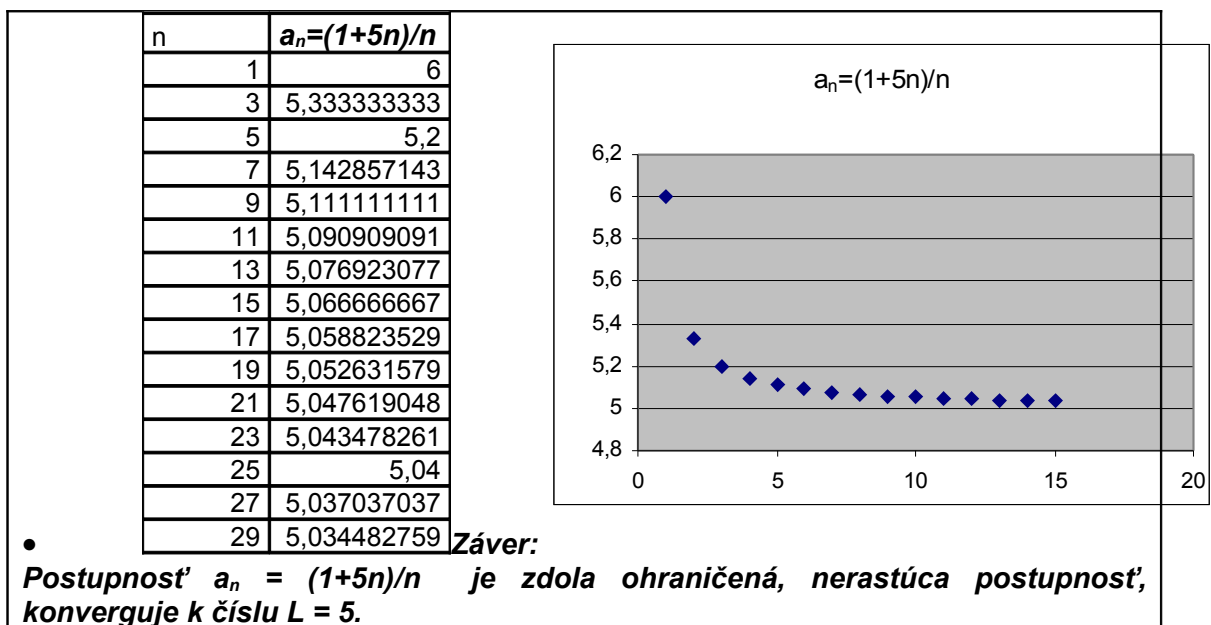
c) $a_n = \sin(\pi \cdot n/2)$,

d) $a_n = (-1+2n^2)/10n$

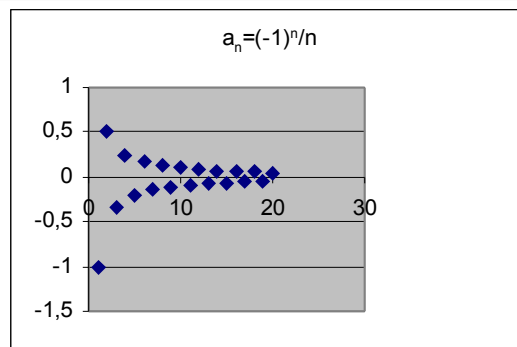
sú monotónne, zhora (zdola) ohraničené, ktoré z postupností sú konvergentné?

Riešenie

Každý z príkladov zastupuje istú "triedu postupností", ktoré majú charakteristickú vlastnosť: a) ohraničené, konvergentné, b) ohraničené, konvergentné, oscilujú okolo nuly a súčasne sa k nej blížia c) ohraničené, nie konvergentné, d) neohraničené, divergentné.

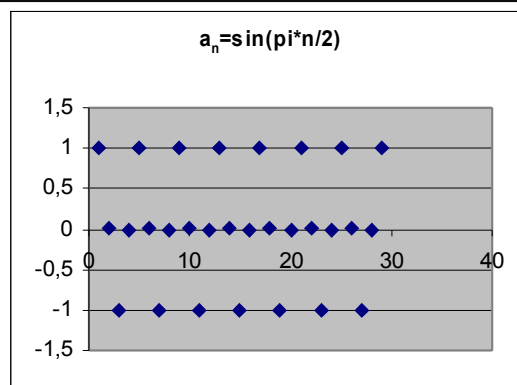


n	$a_n = (-1)^n / n$
1	-1
2	0,500000
3	-0,333333
4	0,250000
5	-0,200000
6	0,166667
7	-0,142860
8	0,125000
9	-0,111111
10	0,100000
11	-0,090910
12	0,083333
13	-0,076920
14	0,071429
15	-0,066676



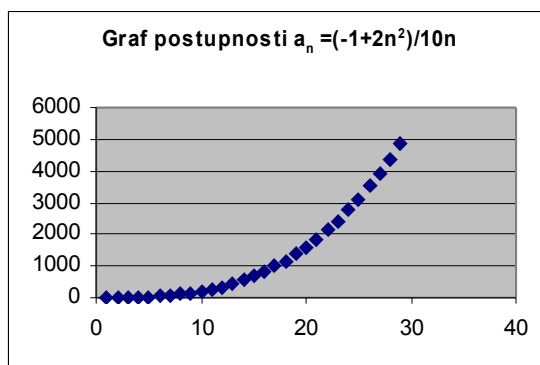
- Záver:**
Postupnosť $a_n = (-1)^n / 2$ je ohraničená a konvergentná, osciluje okolo nuly; limitou je číslo $L = 0$.

n	$a_n = \sin(\pi \cdot n / 2)$
1	1
2	0,001593
3	-1
4	-0,003190
5	0,999992
6	0,004778
7	-0,999989
8	-0,006370
9	0,999974
10	0,007963
11	-0,999968
12	-0,009560
13	0,999946
14	0,011148
15	-0,999933
16	-0,012740



- Záver:**
Postupnosť $a_n = \sin(\pi n / 2)$ je ohraničená ale nie je konvergentná; jej hodnoty sa kumulujú okolo čísel 1 alebo 0 alebo -1. Príklad je možné využiť na demonštráciu vety o jednoznačnosti limity.

n	$a_n = (-1+2n^2)/10n$
1	0,1
2	1,4
3	5,1
4	12,4
5	24,5
6	42,6
7	67,9
8	101,6
9	144,9
10	199
22	2127,4
23	2431,1



- **Záver:** Postupnosť $a_n = (-1+2n^2)/10n$ nie je konvergentná ani ohraničená.

Obr.14.2: Grafické riešenie príkladu 14.2

Príklad 14.3

Zostrojte graf postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ktorej členy sú dané predpisom: a_n je aritmetický priemer cifier čísla n . Je táto postupnosť konvergentná?

Riešenie

<ul style="list-style-type: none">do bunky A1 – A20 vkladáme 1. cifru čísla,do bunky B1- B20 2. cifru čísla,v C3 – C20 realizujeme výpočet priemeru cifier (príkaz =PRIEMER(A1;B1)),následne prekopírujeme pomocou pravého tlačidla myši do zvyšných buniek stĺpca.V bunke D1 – D20 zapíšeme číslo n, ktorého priemer počítame.Následne vytvoríme graf pre polia D1-D20 a C1-C20.	<table><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>0</td><td>3</td><td>1,5</td><td>3</td></tr><tr><td>0</td><td>4</td><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>0</td><td>5</td><td>2,5</td><td>5</td></tr><tr><td>0</td><td>6</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>0</td><td>7</td><td>3,5</td><td>7</td></tr><tr><td>0</td><td>8</td><td>4</td><td>8</td></tr><tr><td>0</td><td>9</td><td>4,5</td><td>9</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0,5</td><td>10</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>11</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>1,5</td><td>12</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>2</td><td>13</td></tr><tr><td>1</td><td>4</td><td>2,5</td><td>14</td></tr><tr><td>1</td><td>5</td><td>3</td><td>15</td></tr><tr><td>1</td><td>6</td><td>3,5</td><td>16</td></tr><tr><td>1</td><td>7</td><td>4</td><td>17</td></tr><tr><td>1</td><td>8</td><td>4,5</td><td>18</td></tr><tr><td>1</td><td>9</td><td>5</td><td>19</td></tr><tr><td>2</td><td>0</td><td>1</td><td>20</td></tr></table>	0	1	1	1	0	2	1	2	0	3	1,5	3	0	4	2	4	0	5	2,5	5	0	6	3	6	0	7	3,5	7	0	8	4	8	0	9	4,5	9	1	0	0,5	10	1	1	1	11	1	2	1,5	12	1	3	2	13	1	4	2,5	14	1	5	3	15	1	6	3,5	16	1	7	4	17	1	8	4,5	18	1	9	5	19	2	0	1	20
0	1	1	1																																																																														
0	2	1	2																																																																														
0	3	1,5	3																																																																														
0	4	2	4																																																																														
0	5	2,5	5																																																																														
0	6	3	6																																																																														
0	7	3,5	7																																																																														
0	8	4	8																																																																														
0	9	4,5	9																																																																														
1	0	0,5	10																																																																														
1	1	1	11																																																																														
1	2	1,5	12																																																																														
1	3	2	13																																																																														
1	4	2,5	14																																																																														
1	5	3	15																																																																														
1	6	3,5	16																																																																														
1	7	4	17																																																																														
1	8	4,5	18																																																																														
1	9	5	19																																																																														
2	0	1	20																																																																														
<p>Záver:</p> <p>Postupnosť, ktorú takto vytvoríme nie je konvergentná.</p>	<div><p>priemer cifier čísla</p><p>číslo z N</p></div>																																																																																

Obr.14.3: Grafické riešenie príkladu 14.3



Počas práce usmerňujeme študentov, aby uvažovali o istom „ustaľovaní hodnôt“ postupnosti pre $n \rightarrow \infty$ v okolí konkrétnej hodnoty; ak toto kumulovanie hodnôt nemá žiadne výnimky (zjednodušene povedané), potom môžeme hovoriť o konvergencii postupnosti. V zmysle definície teda postupnosť z príkladu 3 konvergentná nie je.

V príklade 2a), b) prichádza k akémusi ustáleniu funkčných hodnôt. Všetky členy počnúc od istej hodnoty n sa v prípade postupnosti a) začínajú zhľukovať okolo čísla 5, čoraz viac sa k nemu blížia, Táto postupnosť je navyše rastúca a zhora ohraničená. V príklade b) sa hodnoty stabilizujú v okolí bodu 0 a postupnosť je opäť ohraničená. Heuristicku besedu so žiakmu vedieme k formulácii záverov:

Každá zhora (zdola) ohraničená neklesajúca (nerastúca) postupnosť má limitu.

Ak postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje (t.j. má konečnú limitu), potom je ohraničená.

Platí opačná veta? Grafy postupnosti z úlohy 2c), na ktorom vidíme ohraničenú nekonvergentnú postupnosť poskytuje vhodný kontrapríklad na zdôvodnenie tvrdenia: *Opačná veta neplatí.*

Inšpirujúce sú aj nasledujúce príklady. Umožníme v nich žiakom práve vďaka Excelu sa doslova "dotknúť sa" tak veľmi obávaných formuliek a definícií obsahujúcich kvantifikátory ε a δ pochopiť definíciu limity postupnosti a získať nie len transmisívne ale predovšetkým generické vedomosti v tejto oblasti.

PRÍKLAD 14.4

Nech je daná postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$; $a_n = n/(n+1)$ a číslo $L = 1$. Dokážte, vychádzajúc z definície, že L je limitou postupnosti a nájdite príslušné n_0 pre zvolené hodnoty $\varepsilon = 0,02$; $\varepsilon = 0,01$; $\varepsilon = 0.005$.

RIEŠENIE

<ul style="list-style-type: none"> V bunke A1, B1, C1 vyznačíme záhlavie tabuľky. Do A2 vložíme hodnotu 1. Do A3 = A2 + 14 (využijeme položku Rady – krok 14), prekopírujeme do požadovaného počtu buniek stĺpca. Do B2 vložíme=A2/(A2+1); skopírujeme do zvyšných buniek stĺpca. Do C2 vložíme = ABS(B2-1); skopírujeme do zvyšných buniek stĺpca C Hľadáme v tabuľke také n, pre ktoré sú splnené požadované kritériá. Ak chceme dosiahnuť lepšiu presnosť výpočtu jednoducho tabuľku modifikujeme, prípadne zadáme formát buniek v stĺpci B a C s presnosťou na väčší počet desatinných miest. 	n	$a_n=n/(n+1)$	a_n-L	
	1	0,500000	0,500000	
	15	0,937500	0,062500	
	29	0,966667	0,033333	
	43	0,977273	0,022727	
	57	0,982759	0,017241	$\varepsilon = 0.02$
	71	0,986111	0,013889	
	85	0,988372	0,011628	
	99	0,999999	0,010000	
	113	0,991228	0,008772	$\varepsilon = 0.01$
	127	0,992188	0,007813	
	141	0,992958	0,007042	
	155	0,993599	0,006410	
	169	0,994118	0,005882	
	183	0,994565	0,005435	
	197	0,994949	0,005051	
	211	0,995283	0,004717	$\varepsilon = 0.005$
	225	0,995575	0,004425	
	239	0,995833	0,004167	
	253	0,996063	0,003937	

Záver:

Získali sme hodnoty:

$n_0= 57$ pre $\varepsilon = 0.02$; $n_0= 113$ pre $\varepsilon = 0.01$ a $n_0= 211$ pre $\varepsilon = 0.005$.

Obr.14.4: Numerický model riešenia príkladu.14.4

PRÍKLAD 14.5

Daná je postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ rekurentne: $a_{n+1} = 1+2/a_n$, $a_1 = 1$. Zostavte tabuľku hodnôt postupnosti, rozhodnite, či je konvergentná.

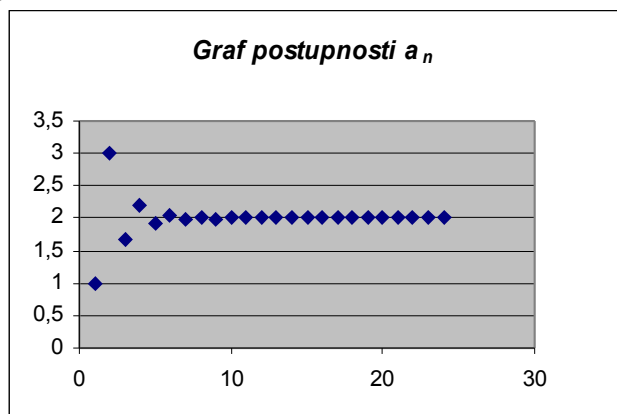
Riešenie

n	a_n	$ a_n - 2 $
1	1	1
2	3	1
3	1,666667	0,333333
4	2,200000	0,200000
5	1,909091	0,090909
6	2,047619	0,047619
7	1,976744	0,023256
8	2,011765	0,011765
9	1,994152	0,005848
10	2,002933	0,002933
11	1,998536	0,001464
12	2,000733	0,000733
13	1,999634	0,000366
14	2,000183	0,000183
15	1,999908	9,15E-05
16	2,000046	4,58E-05
17	1,999977	2,29E-05
18	2,000011	1,14E-05
19	1,999994	5,72E-06

- Pri zostavovaní tabuľky vložíme do bunky A2–A20 poradové číslo člena postupnosti.
- Následne do bunky B2=1, B3 = 1+ 2/B2 a skopírujeme do buniek B4-B20.
- Hodnoty členov postupnosti sa kumulujú okolo čísla 2; predpokladáme teda, že 2 je limitou postupnosti.
- Do bunky C2 vložíme =ABS(B2-2) a opäť prekopírujeme do buniek C3-C20. Hodnoty rozdielu sa blížia k nule.

Záver:

Postupnosť je teda konvergentná. Jej limitou je číslo 2.



Obr. 14.5: Grafický a numerický model riešenia príkladu 14.5