

11 Exponenciálne funkcie



Metodický zámer

V tejto kapitole sa budeme zaoberať vlastnosťami a aplikáciami exponenciálnych funkcií. Tieto funkcie môžu byť použité ako matematický model pre mnohé situácie súvisiace s problematikou rastu či poklesu veličín z rôznych oblastí života. Môžeme ich využiť napríklad pri štúdiu rastu populácie, rýchlosti šírenia sa epidémií, finančného rastu, polčasu rozpadu rádioaktívneho materiálu a ďalších. Práve takýmito aplikáciami sa pokúsime študentov motivovať, aby sme vzbudili ich pozornosť a posunuli ich od mrazivého nezájmu a ľahostajnosti k aktívnemu poznávaniu a pochopeniu uvedeného pojmu.

Problemátike exponenciálnych funkcií sa študenti venujú v 2. ročníku (seste) gymnázia hneď po téme *Mocniny a odmocniny (výrazy, rovnice a nerovnice s mocninami a odmocninami)*. Práve neformálne porozumenie pojmu exponenciálna funkcia, poskytne študentom viac kompetencií pri riešení matematických problémov s ním súvisiacich. Inovatívny prístup s príspevom počítača kladie dôraz na vizualizáciu a získanie náhľadu na všetky spomenuté pojmy a poskytuje mnoho motivačných podnetov. Na úvod sme vybrali slovnú úlohu, pri riešení ktorej študenti odhaľujú, špecifikujú a matematicky zapisujú zaujímavú funkčnú závislosť. Pomocou Excelu následne zostroja jej graf.

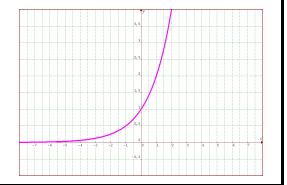
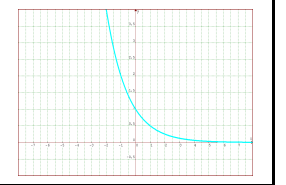
Druhá aktivita slúži na precvičovanie a fixovanie vedomostí týkajúcich sa tvaru grafov a vlastností jednotlivých typov exponenciálnych funkcií. Po krátkom samostatnom bádaní nasleduje spoločné fórum; diskusia o získaných výsledkoch.

Tretia úloha prezentuje problém z praxe, ktorý dokáže študentov zaujať a motivovať, predstaví im exponenciálnu funkciu, ako matematický model rôznych situácií a funkčných závislostí.



Čo by mal študent vedieť - stručný sylabus

Funkcia f určená predpisom, ktorým sa každému reálnemu číslu x priradzuje číslo: $y = a^x$, kde $a > 0$; $a \neq 1$ sa nazýva exponenciálna funkcia so základom a .

<ul style="list-style-type: none"> • <u>Grafom funkcie $y = a^x$ je exponenciálna krivka;</u> • $D(f) = R; H(f) = R^+;$ • Ak $a > 1$, je $y = a^x$ <u>rastúca</u> na R; • Ak $0 < a < 1$, je $y = a^x$ <u>klesajúca</u> na R • Funkcia $y = a^x$ je <u>prostá</u> na celom $D(f)$ 	<ul style="list-style-type: none"> • Z monotónnosti exponenciálnej funkcie vyplýva; • Pre každé $x, y \in R$ platí: $x \equiv y \Leftrightarrow a^x \equiv a^y \quad (a > 0, a \neq 1)$ $x < y \Leftrightarrow a^x < a^y \quad (a > 1)$ $x < y \Leftrightarrow a^x > a^y \quad (0 < a < 1)$
<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;">  <p>$a > 1;$</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>$0 < a < 1;$</p> </div> </div>	<ul style="list-style-type: none"> • Existuje k nej <u>inverzná funkcia</u>: $f^{-1}: y = \log_a x;$ • Každá funkcia $y = a^x$ je <u>zdola ohraničená</u>; • prechádza bodmi $[0, 1]$ a $[1, a];$ • os x je jej asymptotou; • Pre každé reálne x pri kladnom základe a platí: $a^x > 0$



Riešené príklady

PRÍKLAD 11.1

Počet baktérií v istej kolónii organizmov sa každú pol hodinu zväčší o 50%. O desiatej hodine mala kolónia 500000 jedincov.

- Zapíšte funkčnú závislosť počtu jedincov $N(t)$ kolónie od času t [hod].
- Určite početnosť kolónie v polhodinových intervaloch v čase od 6:00 do 20:00.
- Koľko jedincov mala kolónia o 13:30?
- O ktorej hodine presiahne počet členov kolónie 5 000 000?

RIEŠENIE

Prvým krokom je vytvorenie matematického modelu uvedenej situácie. Opísaná funkčná závislosť nás privádza k exponenciálnej funkcii kde $a > 0$; $N(t) = 500000 \cdot 1,5^t$; ktorá má rastúci charakter. Za $t=0$ volíme počet jedincov o 10:00. Ak nás teda zaujíma množstvo členov kolónie povedzme o 7:00, bude vhodné dosadiť za $t = -3$, naopak pri zisťovaní počtu jedincov o 12:00 bude hodnota $t=2$.

Pri tvorbe grafu využijeme tabuľkový procesor Excel, nesmieme zabudnúť na vhodné formátovanie buniek (v stĺpci A využijeme formát "čas"). Následne aplikujeme Sprievodcu grafom tabuľkového procesoru Excel na vytvorenie požadovaného grafu.

aktivita	zápis v excelovskom hárku	reprezentácia na obrazovke počítača
----------	---------------------------	-------------------------------------

vytvorenie tabuľky	<ul style="list-style-type: none">Do stĺpca A - bunky A2:A30 čas (použijeme formát bunky typu "čas" v tvare hod:min),Do stĺpca B - bunky B2:B30 vložíme hodnoty nezávislej premennej t (čas) podľa horeuvedenej dohody (využívame funkciu Excelu "Rady")Do stĺpca C - do bunky C2 vložíme funkčné hodnoty v tvare: $=500000*EXP(B2)$prekopírujeme do buniek C3:C30	<table><tr><th></th><th>A</th><th>B</th><th>C</th></tr><tr><th>1</th><th>hodina</th><th>t</th><th>N(t)</th></tr><tr><td>2</td><td>6:00</td><td>-4</td><td>98765,43</td></tr><tr><td>3</td><td>6:30</td><td>-3,5</td><td>120962,5</td></tr><tr><td>4</td><td>7:00</td><td>-3</td><td>148148,1</td></tr><tr><td>5</td><td>7:30</td><td>-2,5</td><td>181443,7</td></tr><tr><td>6</td><td>8:00</td><td>-2</td><td>222222,2</td></tr><tr><td>7</td><td>8:30</td><td>-1,5</td><td>272165,5</td></tr><tr><td>8</td><td>9:00</td><td>-1</td><td>333333,3</td></tr><tr><td>9</td><td>9:30</td><td>-0,5</td><td>408248,3</td></tr><tr><td>10</td><td>10:00</td><td>0</td><td>500000</td></tr><tr><td>11</td><td>10:30</td><td>0,5</td><td>612372,4</td></tr><tr><td>12</td><td>11:00</td><td>1</td><td>750000</td></tr><tr><td>13</td><td>11:30</td><td>1,5</td><td>918558,7</td></tr><tr><td>14</td><td>12:00</td><td>2</td><td>1125000</td></tr><tr><td>15</td><td>12:30</td><td>2,5</td><td>1377838</td></tr><tr><td>16</td><td>13:00</td><td>3</td><td>1687500</td></tr><tr><td>17</td><td>13:30</td><td>3,5</td><td>2066757</td></tr><tr><td>18</td><td>14:00</td><td>4</td><td>2531250</td></tr><tr><td>19</td><td>14:30</td><td>4,5</td><td>3100135</td></tr><tr><td>20</td><td>15:00</td><td>5</td><td>3796875</td></tr><tr><td>21</td><td>15:30</td><td>5,5</td><td>4650203</td></tr><tr><td>22</td><td>16:00</td><td>6</td><td>5695313</td></tr><tr><td>23</td><td>16:30</td><td>6,5</td><td>6975305</td></tr><tr><td>24</td><td>17:00</td><td>7</td><td>8542969</td></tr></table>		A	B	C	1	hodina	t	N(t)	2	6:00	-4	98765,43	3	6:30	-3,5	120962,5	4	7:00	-3	148148,1	5	7:30	-2,5	181443,7	6	8:00	-2	222222,2	7	8:30	-1,5	272165,5	8	9:00	-1	333333,3	9	9:30	-0,5	408248,3	10	10:00	0	500000	11	10:30	0,5	612372,4	12	11:00	1	750000	13	11:30	1,5	918558,7	14	12:00	2	1125000	15	12:30	2,5	1377838	16	13:00	3	1687500	17	13:30	3,5	2066757	18	14:00	4	2531250	19	14:30	4,5	3100135	20	15:00	5	3796875	21	15:30	5,5	4650203	22	16:00	6	5695313	23	16:30	6,5	6975305	24	17:00	7	8542969
	A	B	C																																																																																																			
1	hodina	t	N(t)																																																																																																			
2	6:00	-4	98765,43																																																																																																			
3	6:30	-3,5	120962,5																																																																																																			
4	7:00	-3	148148,1																																																																																																			
5	7:30	-2,5	181443,7																																																																																																			
6	8:00	-2	222222,2																																																																																																			
7	8:30	-1,5	272165,5																																																																																																			
8	9:00	-1	333333,3																																																																																																			
9	9:30	-0,5	408248,3																																																																																																			
10	10:00	0	500000																																																																																																			
11	10:30	0,5	612372,4																																																																																																			
12	11:00	1	750000																																																																																																			
13	11:30	1,5	918558,7																																																																																																			
14	12:00	2	1125000																																																																																																			
15	12:30	2,5	1377838																																																																																																			
16	13:00	3	1687500																																																																																																			
17	13:30	3,5	2066757																																																																																																			
18	14:00	4	2531250																																																																																																			
19	14:30	4,5	3100135																																																																																																			
20	15:00	5	3796875																																																																																																			
21	15:30	5,5	4650203																																																																																																			
22	16:00	6	5695313																																																																																																			
23	16:30	6,5	6975305																																																																																																			
24	17:00	7	8542969																																																																																																			
vytvorenie grafu funkcie	<ul style="list-style-type: none">vyberieme z Menu Sprievodcu grafom, zvolíme typ grafu- stĺpcovýstlačíme "Ďalej",definujeme Rozsah údajovpokračujeme cez Možnosti grafu a Dokončiť																																																																																																					

- Analýza grafu a závery:**
 - a) Matematický model funkčnej závislosti počtu jedincov kolónie $N(t)$ v čase t je daný vzorcom : $N(t) = 500000 \cdot 1,5^t$
 - b) Riešenie tejto časti úlohy nájdeme vo vyššie uvedenej tabuľke.
 - c) O 13:30 mala kolónia približne **2 066 757 jedincov**.
 - d) Hranicu 5 000 000 presiahne kolónia medzi **15:30 a 16:00 hod.**

Obr.11.1: Riešenie príkladu 11.1

PRÍKLAD 11.2

Narysujte vždy do jedného obrázku uvedené grafy funkcií. V úlohách a), b) pri každej skupine funkcií určite $D(f)$, $H(f)$, elementárne vlastnosti týchto funkcií. V úlohe c) použite počítačový program ako následnú autokontrolu samostatne načrtnutých grafov.

a)

- $y = 2^x$
- $y = 10^x$
- $y = 3^x + 2$

b)

- $y = (0,2)^x$
- $y = (1/3)^x$

c) $y = (0,1)^x + 3$

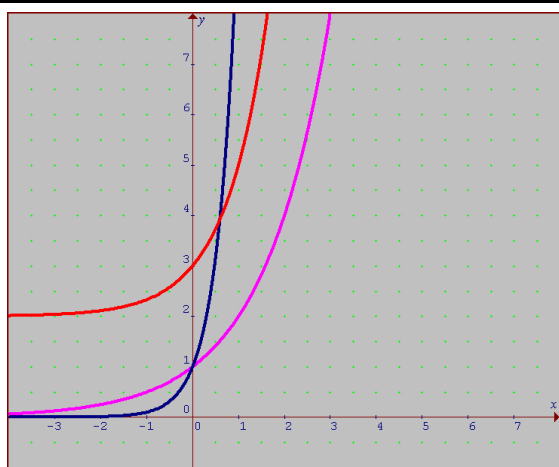
- $y = 3^x$
- $y = 3^{-x}$
- $y = -3^x$
- $y = -3^{-x}$

RIEŠENIE

Použijeme program Graphmatica, aby sme získali tak grafy funkcií, ako aj



tabuľky príslušných funkčných hodnôt pomocou tlačidla. V časti c) sú uvedené veľmi frekventované tvary exponenciálnych funkcií, pri vizualizácii ktorých sa študenti dopúšťajú chýb najčastejšie. Pri ich zostrojovaní využívame už známe pravidlá o transformáciách grafov funkcií.



Záver:

- funkčné hodnoty sú kladné čísla,
- definičný obor je množina reálnych čísel,
- funkcie nemajú žiadne nulové body,
- všetky funkcie sú rastúce pre $a > 1$; (čím väčšie a tým prudší rast),
- funkcie sú ohraničené zdola,
- funkcie sú prosté

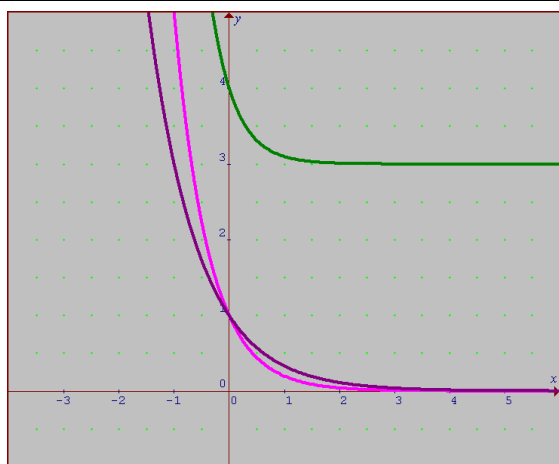
Equation(s):

$y = 2^{**}x$ (1)

$y = 10^{**}x$ (2)

$y = 3^{**}x+2$ (3)

x	y	y2	y3
-3,5	0,0884	0,0003	2,0214
-3,0	0,125	0,001	2,037
-2,5	0,1768	0,0032	2,0642
-2,0	0,25	0,01	2,1111
-1,5	0,3536	0,0316	2,1925
-1,0	0,5	0,1	2,3333
-0,5	0,7071	0,31	2,5774
0	1,0	1,0	3,0
0,5	1,4142	3,1623	3,7321
1,0	2,0	10,0	5,0
1,5	2,8284	31,62	7,19
2,0	4,0	100,0	11,0
2,5	5,6569	316,2	17,58
3,0	8,0	1000,0	29,0
3,5	11,3137	3162,2	48,7654
4,0	16,0	10^4	83,0
4,5	22,62	3,1x10^4	142,29
5,0	32,0	10^5	245,0
5,5	45,25	3,1x10^5	422,88
6,0	64,0	10^6	731,0
6,5	90,50	3,1x10^6	1264,66
7,0	128,0	10^7	2189,0



Equation(s):

$y=(0,2)^{**}x$ (1)

$y=(1/3)^{**}x$ (2)

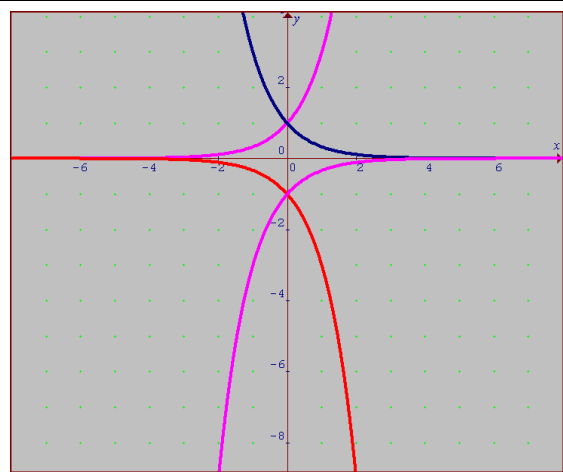
$y=(1/10)^{**}x+3$ (3)

x	y	y2	y3
-3,5	279,50	46,54	3165,27
-3,0	125,0	27,0	1003,0
-2,5	55,17	15,58	319,22
-2,0	25,0	9,0	103,0
-1,5	11,18	5,19	34,62
-1,0	5,0	3,0	13,0
-0,5	2,2361	1,7321	6,162
0	1,0	1,0	4,0
0,5	0,4472	0,5774	3,3162
1,0	0,2	0,3333	3,1
1,5	0,0894	0,1925	3,0316
2,0	0,04	0,1111	3,01
2,5	0,0179	0,0642	3,003

Záverý:

- všetky funkčné hodnoty sú kladné čísla,
- definičný obor je množina R ,
- exponenciálne funkcie pre $0 < a < 1$ sú klesajúce,
- funkcie sú ohraničené zdola,
- funkcie sú prosté.

3,0	0,008	0,037	3,001
3,5	0,0036	0,0214	3,0003
4,0	0,0016	0,0123	3,0001
4,5	0,0007	0,0071	3,0
5,0	0,0003	0,0041	3,0

**Záverý:**

- graf funkcie $y = 3^{-x}$ je obrazom grafu funkcie $y = 3^x$ v osovej súmernosti podľa osi x ,
- graf funkcie $y = -3^x$ je obrazom grafu funkcie $y = 3^x$ v osovej súmernosti podľa osi y ,
- graf funkcie $y = -3^x$ je obrazom grafu funkcie $y = 3^x$ v osovej súmernosti podľa osi y

Equation(s):

$y = 3^{**x} \quad (1)$

$y = 3^{**(-x)} \quad (2)$

$y = -(3^{**x}) \quad (3)$

x	y	y2	y3
-7,0	0,0005	2187,0	-0,0005
-6,0	0,0014	729,0	-0,0014
-5,0	0,0041	243,0	-0,0041
-4,0	0,0123	81,0	-0,0123
-3,0	0,037	27,0	-0,037
-2,0	0,1111	9,0	-0,1111
-1,0	0,3333	3,0	-0,3333
0	1,0	1,0	-1,0
1,0	3,0	0,3333	-3,0
2,0	9,0	0,1111	-9,0
3,0	27,0	0,037	-27,0
4,0	81,0	0,0123	-81,0
5,0	243,0	0,0041	-243,0
6,0	729,0	0,0014	-729,0
7,0	2187,0	0,0005	-2187,0

Obr.11.2: Riešenie príkladu.11.2 programom Graphmatica

PRÍKLAD 11.3

Istá spoločnosť zaregistrovala, že po skončení reklamnej kampane začína klesať odbyť jej produktov, pričom rýchlosť poklesu predaja je taká, že množstvo predaných výrobkov S x dní po skončení reklamnej kampane vyjadruje funkcia:

$$S = 2000(2^{-0,1x})$$

Zostrojte graf tejto funkcie a rozhodnite:

- Koľko približne výrobkov predá spoločnosť 10 dní po skončení reklamnej kampane?
- Koľko výrobkov sa predáva 80 dní po skončení kampane?
- Kedy musí spoločnosť spustiť novú reklamnú kampaň, ak nechce aby jej predaj klesol pod hranicu 500 výrobkov?

RIEŠENIE

Pri riešení využijeme opäť tabuľkový procesor Excel. Tabuľka a graf poskytnú vyčerpávajúcu odpoveď na všetky položené otázky.

činnosť	zápis v Exceli	reprezentácia na obrazovke
---------	----------------	----------------------------

vytvorenie tabuľky hodnôt	<ul style="list-style-type: none">do stĺpca A; buniek A2:A20 vložíme hodnoty argumentu x (počet dní) funkcie,do stĺpca B; bunky B2 vložíme funkčnú hodnotu v tvare: $= 2000*POWER(2;-0,1*A2)$prekopírujeme do buniek B3:B20,	<table><tr><th>x- počet dní</th><th>S(x) počet výrobkov</th></tr><tr><td>0</td><td>2000</td></tr><tr><td>5</td><td>1414,214</td></tr><tr><td>10</td><td>1000</td></tr><tr><td>15</td><td>707,1068</td></tr><tr><td>20</td><td>500</td></tr><tr><td>25</td><td>353,5534</td></tr><tr><td>30</td><td>250</td></tr><tr><td>35</td><td>176,7767</td></tr><tr><td>40</td><td>125</td></tr><tr><td>45</td><td>88,38835</td></tr><tr><td>50</td><td>62,5</td></tr><tr><td>55</td><td>44,19417</td></tr><tr><td>60</td><td>31,25</td></tr><tr><td>65</td><td>22,09709</td></tr><tr><td>70</td><td>15,625</td></tr><tr><td>75</td><td>11,04854</td></tr><tr><td>80</td><td>7,8125</td></tr></table>	x- počet dní	S(x) počet výrobkov	0	2000	5	1414,214	10	1000	15	707,1068	20	500	25	353,5534	30	250	35	176,7767	40	125	45	88,38835	50	62,5	55	44,19417	60	31,25	65	22,09709	70	15,625	75	11,04854	80	7,8125
x- počet dní	S(x) počet výrobkov																																					
0	2000																																					
5	1414,214																																					
10	1000																																					
15	707,1068																																					
20	500																																					
25	353,5534																																					
30	250																																					
35	176,7767																																					
40	125																																					
45	88,38835																																					
50	62,5																																					
55	44,19417																																					
60	31,25																																					
65	22,09709																																					
70	15,625																																					
75	11,04854																																					
80	7,8125																																					
vytvorenie grafu funkcie S(x)																																						
<ul style="list-style-type: none">Závery a interpretácia grafu: Získaný graf a tabuľka naznačujú: a) po desiatich dňoch predá spoločnosť 1000 výrobkov, b) 80 dní po skončení kampane sa predáva približne 7 výrobkov denne, c) novú kampaň musí spoločnosť spustiť po 20 dňoch, vtedy totiž predaj dosahuje 500 výrobkov																																						

Obr.11.3: Riešenie príkladu 11.3 v Exceli

PRÍKLAD 11.4

Na dlhej ulici máme banku číslo 1, banku číslo 2,...banku číslo k , až po banku číslo 365. V banke číslo k pripisujú úroky k -krát ročne a to vždy vo výške jednej k -tiny aktuálneho vkladu.

- V ktorej banke budeme mať po roku najviac peňazí?
- Budeme mať v niektorej banke po roku viac ako 3 - násobok vkladu?

RIEŠENIE



Cieľom tejto aktivity je dynamickým spôsobom pomocou procesoru Excel vygenerovať číslo e – známe ako Eulerovo číslo. Vďaka počítaču elegantne a rýchlo poodhalíme študentom, odkiaľ sa táto tak frekventovaná matematická konštanta vzala. Najskôr treba vytvoriť matematický model úlohy:

Ak na začiatku vložíme do k -tej banky z korún tak po roku v nej budeme mať

$z \cdot (1 + 1/k)^k$ korún. Na vypočítanie čísla $f(k) = (1 + 1/k)^k$ použijeme tabuľkový procesor Excel. Číslo $f(k)$ totiž vyjadruje pomer vkladu na konci roku k výške vkladu na začiatku roku. Úloha je tiež výbornou predprípravou pre pochopenie pojmu konvergenencie. Vďaka tabuľke vytvorenej v Exceli študenti môžu veľmi dobre pozorovať, ako sa pre $k \rightarrow \infty$ hodnota $f(k)$ uštaluje na istom čísle, ktorým je Eulerova konštanta e . Popri π a i je e jednou z najvýznamnejších matematických konštánt. Je tiež základom prirodzeného logaritmu \ln .

- Do stĺpca A vložíme postupne čísla 1 až 365 (využijeme funkciu Rady).
- Do stĺpca B; do bunky B1 vložíme $f(k)$ v tvare: **=POWER((1+1/A1); A1).**
- Prekopírujeme do buniek B2:B365.
- Uvádzame začiatok a koniec získanej tabuľky hodnôt

1	2
2	2,25
3	2,37037
4	2,441406
5	2,48832
6	2,521626
7	2,5465
8	2,565785
9	2,581175

Záver:

Z tabuľky vyplýva:

- čím má banka vyššie číslo; teda čím častejšie pripisuje úroky, tým je pre vkladateľa výhodnejšia,
- keďže $f(365) < 3$ tak aj $f(k) < 3$ pre všetky $k \in < 0; 365 >$,
- *hodnota $f(k)$ sa postupne uštaluje, blíži sa k akejsi hraničnej hodnote,*
- ak by sme pokračovali vo výpočte ďalej a zobrali by sme do úvahy ďalšie k , dostali by sme hodnotu, ku ktorej $f(k)$ konverguje a ktorou je číslo **$e \approx 2,71828...$**

356	2,714474
357	2,714484
358	2,714495
359	2,714506
360	2,714516
361	2,714526
362	2,714537
363	2,714547
364	2,714557
365	2,714567

Obr.11.4: Odkiaľ sa vzalo číslo e ?

PRÍKLAD 11.5

Riešte graficky sústavu rovníc:

a)

$$y = 0,5^x + 4$$

$$y + 4x = 6$$

b)

$$y = 3 \cdot e^{5x}$$

$$3x + y - 1 = 0$$

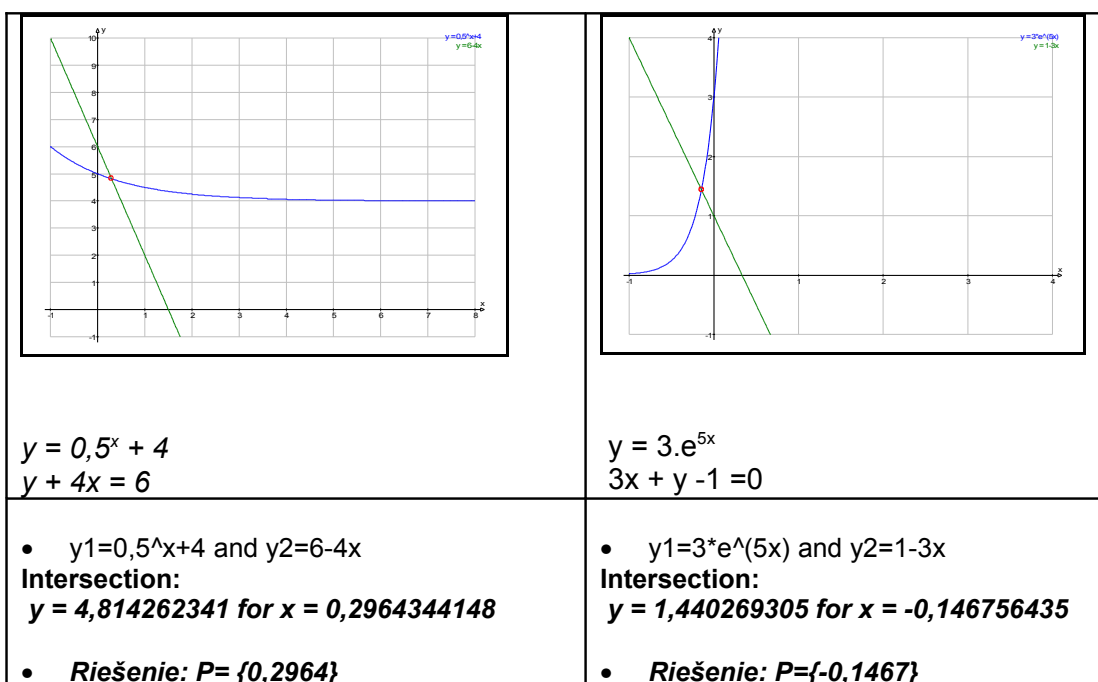
RIEŠENIE



Vhodný didaktický softvér je výbornou pomocou pri riešení rôznych typov sústav nelineárnych rovníc. Tam, kde zlyhávajú klasické metódy riešenia, otvára sa priestor pre numerické alebo grafické prístupy. Takéto úlohy nie sú samoučelné. Umožňujú pripomenúť a oživiť vedomosti študentov o grafoch rôznych funkcií, s ktorými už v minulosti pracovali. Pri riešení nelineárnych sústav rovníc využijeme počítačový program EG a jeho schopnosť vyhľadať, označiť a vyčíslit priesečník grafov dvoch



funkcií, ktorú aktivujeme tlačidlom na paneli nástrojov.



Obr.11.5: Grafické riešenie sústav nelineárnych rovníc programom EG



Cieľom všetkých uvedených aktivít bolo poukázať na možnosti vyučovať nastolenú tému pútavejšie a efektívnejšie vďaka využitiu počítačových technológií. Metóda "learning by doing", pri ktorej si študenti s príspevím počítača sami konštruujú svoje poznanie a tak získavajú neformálne a dobre aplikovateľné vedomosti je pri vyučovaní exponenciálnych a logaritmických funkcií veľkým prínosom. Umožní im vďaka vizualizácii a nazvime to pomocou *pracovnej terapie* "dotknúť sa týchto pojmov" a odbúrať tak strach, ktorý v nich často vyvolávajú.