

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

16 Nekonečný geometrický rad



Metodický zámer

Posledným pojmom, preberaným na SŠ v rámci tematického celku *Funkcie, rovnice a nerovnice III* je problematika nekonečných geometrických radov. Študenti by mali získať zručnosti typu: *Rozlíšiť konvergentný a divergentný geometrický rad, vedieť určiť súčet geometrického radu pre $|q| < 1$, riešiť slovné úlohy z praxe z tejto oblasti.* Predkladáme dva motivujúce príklady, pri riešení vďaka MS Excelu poukážeme na významné odlišnosti medzi konvergentným a divergentným geometrickým radom.



Čo by mal študent vedieť - stručný syllabus

- Ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nekonečná postupnosť, tak formálny výraz $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ nazývame nekonečným radom a čísla a_1, a_2, a_3, \dots nazývame členmi radu.
- Ak $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ je rad, tak definujeme ešte postupnosť $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$, kde $s_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k$. Túto postupnosť voláme postupnosťou čiastočných súčtov radu $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$.
- Ak postupnosť $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje, tak hovoríme, že rad $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ konverguje a číslo
$$S = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k$$
 nazývame súčtom radu $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$. Označujeme: $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Ak postupnosť $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ nekonverguje, hovoríme, že rad $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ diverguje.
- V prípade geometrického radu s kvocientom q , pre postupnosť $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ jeho čiastočných súčtov platí: $s_k = a_1 \cdot \frac{q^k - 1}{q - 1}$. Táto postupnosť pre $|q| < 1$ konverguje k číslu
$$s = \frac{a_1}{1 - q}$$
.
- Pre $a_1 = 0$ konverguje k nule a pre $|q| > 1$ rad diverguje.

PRÍKLAD 16.1

Po kmeni stromu lezie priamo hore húsenica. Je zrejme veľmi unavená, lebo za 1 minútu prejde len 5 dm, za druhú minútu 2,5 dm, za ďalšiu 1,25 dm... atď. Vzdialenosť k prvému chrumkavému listu je 2 metre. Kedy k nemu unavená húsenica dorazí? Dorazí k nemu vôbec niekedy?

RIEŠENIE

- Zostavíme tabuľku, ktorá má v prvom stĺpci poradové číslo člena postupnosti, ($A_2 = 1, A_3 = A_2+1, \dots$), v druhom hodnotu n -tého člena postupnosti $B_2 = 5, B_3 = B_2 \cdot 0,5$;
- prekopírujeme do ostatných buniek stĺpca B
- V treťom stĺpci vypočítame čiastočné súčty S_1, S_2, \dots, S_k podľa vzťahu $C_2 = 5, C_3 = C_2 + B_3$;
- Prekopírujeme do buniek C4 - C21.
- V bunke B22 vykonáme sumáciu k -členov postupnosti ($k=20$) =SUMA(B2:B21).

Záver:
Z tabuľky vidíme, že kým sa členy postupnosti blížia s narastajúcim n k nule, súčasne súčet k členov postupnosti neprekročí hodnotu 10 dm pre žiaden čiastočný súčet S_k členov tejto postupnosti. Limita čiastočných súčtov $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = 10$. Keďže vzdialenosť k najbližšiemu listu je 20dm, **húsenica takýmto spôsobom nikdy nedorazí k vytúženému listu.**

čas (min)	dráha (dm)	čiast. súčty S_k
1	5,00000	5
2	2,50000	7,5
3	1,25000	8,75
4	0,62500	9,375
5	0,31250	9,6875
6	0,15625	9,84375
7	0,07813	9,921875
8	0,03906	9,960938
9	0,01953	9,980469
10	0,00977	9,990234
11	0,00488	9,995117
12	0,00244	9,997559
13	0,00122	9,998779
14	0,00061	9,999390
15	0,00031	9,999695
16	0,00015	9,999849
17	0,00008	9,999924
18	0,00004	9,999962
19	0,00002	9,999981
20	0,00001	9,999998
21	0,00000	9,999999
prejdená dráha húsenice		10,00000 dm

Obr. 16.1. Riešenie príkladu 16.1 v Exceli

PRÍKLAD 16.2

Perzký šach Shehram bol taký nadšený novou hrou, ktorú podľa neho pomenovali šachy, že sľúbil jej tvorcovi odmenu. Vtipný peržan Sessa Ebn Daher si zvolil takúto odmenu: *polož na prvé políčko šachovnice 1 zrnko pšenice, na ďalšie dve zrnká a na každé nasledujúce dvojnásobok predchádzajúceho počtu*. Koľko pšenice si odnesie múdry muž?

RIEŠENIE

Matematickým modelom úlohy je geometrická postupnosť s prvým členom $a_1 = 1$ a $q = 2$, pričom máme za úlohu zistiť súčet jej k členov (v našom prípade $k=64$). Ukazuje sa, že pri sčítovaní prvých 64 členov dostávame obrovské číslo; $S = 1,84467 \cdot 10^{19}$. Sčítovanie nekonečného počtu členov takejto postupnosti vedie k nekonečnému súčtu - geometrický rad diverguje.



Zmyslom týchto dvoch úloh je ukázať rozdiel medzi súčtom nekonečného geometrického radu s kvocientom $|q| < 1$ a tiež radom s kvocientom $|q| > 1$ (toto je úloha druhého typu), intuícia študentom napovie, že kým v príklade 16.1 je súčet nekonečného počtu členov konečný, a teda *rad konverguje*, v prípade sčítovania nekonečného počtu členov postupnosti z príkladu 16.2 zaručene nedospejeme ku konečnému súčtu - súčet neobmedzene narastá, *rad je divergentný*.

Diskusia a heuristická debata k obom úlohám nás privedie k viacerým novým pojmom ako je nekonečný rad, súčet nekonečného radu, čiastočný súčet nekonečného radu, limita postupnosti čiastočných súčtov, konvergencia a divergencia radu; to všetko na veľmi konkrétnych modeloch, čo dáva predpoklady pre dobré porozumenie danej problematiky. Pri vytváraní tabuľky sa študenti doslova „dotýkajú“ týchto pojmov a uvedomujú si lepšie ich význam. Umožníme im to vďaka numerickej simulácii problému programom Excel (získané tabuľky môžu modifikovať a tak overovať výsledky aj pre väčšie hodnoty „ k “), *simulovať limitný prechod*, čo by bez počítača bolo veľmi obtiažné.

Môžu teda veľmi dobre registrovať, že nekonečný počet sčítancov nie vždy znamená aj nekonečný súčet. Tento súčet môže byť aj konečný; v prípade tzv. konvergentného číselného radu.