

9 Transformácie grafov funkcií



Metodický zámer

Pri zostrojovaní grafov funkcií nemusíme vždy postupovať klasickým spôsobom, značiac do súradnicového systému body $[x, f(x)]$. Graf môžeme zostrojiť aj modifikáciou grafu známej, elementárnej (jednoduchšej) funkcie, ak poznáme potrebné pravidlá. Tento spôsob je rýchly, preveruje a podporuje neformálnosť vedomostí študentov týkajúcich sa vlastností grafov funkcií. Cieľom prezentovaného praktického cvičenia je odhaliť zákonitosti, ktoré pri transformácii grafov funkcií platia. Využívame pri ňom také matematické činnosti ako analógiu, pozorovanie a zovšeobecnenie. Pri poznávaní týchto pravidiel nám pomôže počítač a program Equation Grapher (EG), ktorý farebne špecifikuje grafy jednotlivých funkcií. Existujú aj didaktické softvéry, ktoré zobrazia priamo množinu funkcií istého typu (napr.: $y = \sqrt{(x+a)}$). Tento postup je prilož priamočiary a nedáva priestor študentom pátrať a objavovať.

Študent po zrealizovaní uvedenej aktivity pozná pravidlá, ktoré usmerňujú transformácie grafov funkcií, pre zložitejší predpis funkcie vie, akú postupnosť zobrazení (transformácií) grafu elementárnej funkcie musí realizovať za účelom jeho získania, dokáže zapísať vzorec novovzniknutej funkcie, ak pozná predpis základnej funkcie a graf novovytvorenej funkcie.

Cvičenie zaradíme do vyučovania v 1. ročníku (kvinte) gymnázia v rámci tematického celku *Funkcie, rovnice a nerovnice I*, alebo tiež v druhom ročníku (sexta) pri téme *Funkcie, rovnice a nerovnice II*, kedy sa preberajú všetky typy elementárnych funkcií. Modifikované úlohy môžeme začleniť do vyučovania matematiky podľa potreby aj pri preberaní jednotlivých typov elementárnych funkcií.



Inovácia vyučovacieho procesu

Študenti majú pri týchto aktivitách možnosť vďaka vhodnému didaktickému softvéru EG veľmi dobre sledovať dynamický proces "premeny" grafov jednoduchých (elementárnych funkcií) na grafy funkcií zložitejších. Prvá etapa práce je zameraná na odhalenie "deviatich pravidiel transformácií grafov funkcií". Na konkrétnych úlohách každá dvojica študentov pozoruje a zovšeobecňuje informácie získané vďaka kresliču grafov. Vhodné je pripraviť si niekoľko analogických sérií úloh. Uvádzame jednu z nich.



Riešené príklady

PRÍKLAD 9.1

Do jedného súradnicového systému zakreslite vždy jednu skupinu grafov funkcií:

a)

- $y = \log(x)$

- $y = \log(x-1)$
- $y = \log(x+3)$

b)

- $y = \sqrt{x}$
- $y = \sqrt{x} + 4$
- $y = \sqrt{x} + 1$
- $y = \sqrt{x} - 1$

c)

- $y = (x+1)^2 + 1$
- $y = -((x+1)^2 + 1)$
- $y = \sqrt{x-4} + 2$
- $y = -(\sqrt{x-4} + 2)$

d)

- $y = 1/(x+2) - 3$
- $y = (x-4)^2 + 2$
- $y = (x+3)^2 - 2$

e) V tomto prípade sledujte aká zmena nastane, ak funkciu $f(x)$ modifikujeme na tvar $f(-x)$,

- $f(x)$ a $-f(-x)$. Spomeňte si na vlastnosti grafov párných a nepárných funkcií. Aký vplyv má

táto vlastnosť na získané výsledky?

- $y = x^3 - x^2 + 1$
- $y = -(x^3 - x^2 + 1)$
- $y = ((-x^3) - (-x)^2 + 1)$
- $y = -((-x^3) - (-x)^2 + 1)$

f)

- $y = \sin(x)$
- $y = 5\sin(x)$
- $y = 0,2\sin(x)$
- $y = 10\sin(x)$
- $y = 0,1\sin(x)$

g)

- $y = \cos(3x)$
- $y = \cos(13x)$
- $y = \cos(0,5x)$

h)

- $y = |x^2 - 3|$
- $y = |\log(x-4)|$
- $y = |3x - 2|$

g)

- $y = (|x| - 3)^2 - 2$
- $y = |x|^3 + |x| - 4$
- $y = \lg(|x|)$

V každej sérii funkcií najskôr rozhodnite o akú všeobecnú transformáciu sa jedná (napr.: $f(x) \rightarrow f(x+a)$; posunutie argumentu)

Sledujte, ako sa táto zmena prejaví na grafoch modifikovaných funkcií voči grafu základnej funkcie $y = f(x)$. Akú závislosť medzi grafmi registrujete?

RIEŠENIE

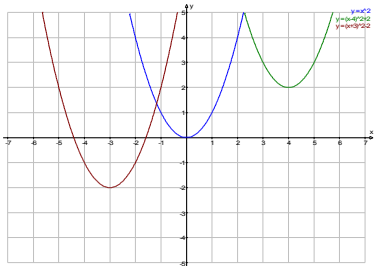
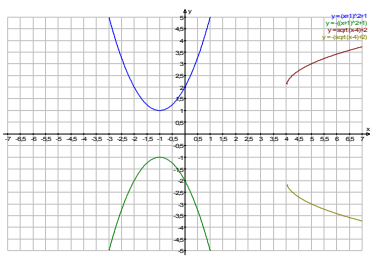
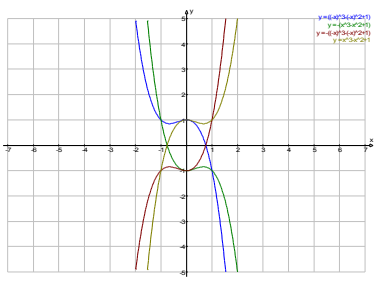
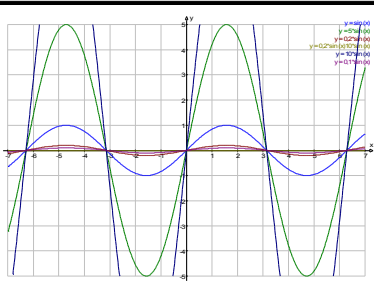
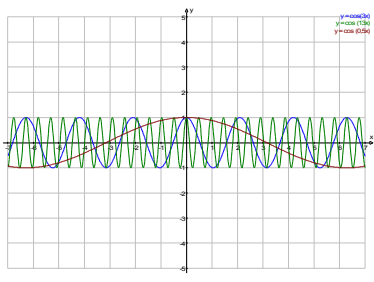


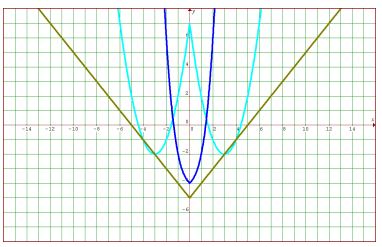
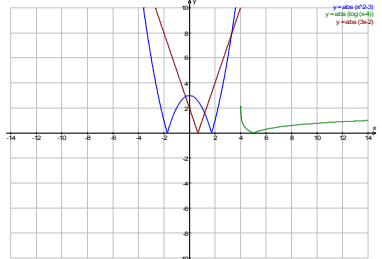
Úlohou študentov je v kresliči grafov zadané problémy vizualizovať, následne analyzovať a získané závery zapísať do tabuľky. Vyučujúci počas hodiny sleduje predovšetkým správny syntax pri zapisovaní funkcií do combo boxu v EG (tu vznikajú najčastejšie problémy). Každá dvojica si zvolí svojho lídra, ktorý po uplynutí stanoveného času prezentuje výsledky pred triedou.

Uvádzame prehľad získaných grafov a zovšeobecnení, ktoré sú riešením tejto aktivity. Výpovedná hodnota našich obrázkov sa nevyrovná tej, s ktorou pracujú študenti. Vďaka EG a jeho výborným schopnostiam sú grafy jednotlivých funkcií farebne rozlíšené, študenti môžu presne zistiť napríklad priesečníky grafov so súradnicovými osami, využijúc trasovanie funkcií môžu overiť o aký typ zhodného zobrazenia sa jedná a tak dospieť k správny záverom.

Skúsenosti nám potvrdili, že študenti po zrealizovaní takejto vyučovacej hodiny získavajú množstvo nových kompetencií v oblasti konštrukcie grafov funkcií, čo sa pre nich stáva veľkým prínosom na ďalších hodinách venovaných matematickej analýze.

predpisy funkcií	interpretácia v EG	závery
$y = \log(x)$ $y = \log(x-1)$ $y = \log(x+3)$		<ul style="list-style-type: none"> • Modifikované grafy sú v tvare: $y = f(x-a)$, • $f(x) \rightarrow f(x-a)$ • Posunutie o vektor $[a, 0]$ v smere osi x (translacia) $a > 0$ - posunutie o a jednotiek doprava $a < 0$ - posunutie o a jednotiek doľava
$y = \sqrt{x}$ $y = \sqrt{x} + 4$ $y = \sqrt{x} + 1$ $y = \sqrt{x} - 1$		<ul style="list-style-type: none"> • Modifikované grafy sú v tvare: $y = f(x) + a$ • $f(x) \rightarrow f(x) + a$ • Posunutie o vektor $[0, a]$ v smere osi y (translacia) $a > 0$ - posunutie o a jednotiek nahor $a < 0$ - posunutie o a jednotiek nadol.

$y = 1/(x+2) - 3$ $y = (x-4)^2 + 2$ $y = (x+3)^2 - 2$		<ul style="list-style-type: none"> • Modifikované grafy sú v tvare: $y = f(x-a) + b$ • $f(x) \rightarrow f(x-a) + a$ • Posunutie grafu základnej funkcie o vektor $[a, b]$.
$y = (x+1)^2 + 1$ $y = -((x+1)^2 + 1)$ $y = \sqrt{x-4} + 2$ $y = -(\sqrt{x-4} + 2)$		<ul style="list-style-type: none"> • Modifikované grafy sú v tvare: $y = -f(x)$ • $f(x) \rightarrow -f(x)$ • Graf funkcie $y = -f(x)$ je obrazom grafu $y = f(x)$ v osovej súmernosti podľa osi x.
$y = x^3 - x^2 + 1$ $y = -(x^3 - x^2 + 1)$ $y = ((-x^3) - (-x)^2 + 1)$ $y = -((-x^3) - (-x)^2 + 1)$		<ul style="list-style-type: none"> • Modifikované grafy sú v tvaroch: $f(x) \rightarrow f(-x)$. • Osová súmernosť vzhľadom na os y. • $f(x) \rightarrow -f(-x)$ • Stredová súmernosť podľa počiatku súradnicového systému
$y = \sin(x)$ $y = 5\sin(x)$ $y = 0,2\sin(x)$ $y = 10\sin(x)$ $y = 0,1\sin(x)$		<ul style="list-style-type: none"> • Modifikované grafy sú v tvare: $y = k \cdot f(x)$ • $f(x) \rightarrow k \cdot f(x)$ • Podobné zobrazenie: $k > 1$ - natiahneme graf k-razy pozdĺž osi y, $0 < k < 1$ - stláčame graf k-razy pozdĺž osi y.
$y = \cos(3x)$ $y = \cos(13x)$ $y = \cos(0,5x)$		<ul style="list-style-type: none"> • Modifikované grafy sú v tvare: $y = f(kx)$, • $f(x) \rightarrow f(kx)$ • Podobné zobrazenie: $k > 1$ - stláčame graf k-razy pozdĺž osi x, $0 < k < 1$ - rozťahujeme graf k-razy pozdĺž osi x.

$y = (x - 3)^2 - 2$ $y = x ^3 + x - 4$ $y = x - 5$		<ul style="list-style-type: none"> • Modifikované grafy majú tvar $y = f(x)$ • $f(x) \rightarrow f(x)$ • Osová súmernosť vzhľadom na os y časti grafu zodpovedajúcej kladným argumentom
$y = x^2 - 3 $ $y = \log(x - 4) $ $y = 3x - 2 $		<ul style="list-style-type: none"> • Modifikované grafy majú tvar $y = f(x)$ • $f(x) \rightarrow f(x)$ • Osová súmernosť vzhľadom na os x záporných hodnôt funkcie

Obr.9.1: Transformácie grafov funkcií

PRÍKLAD 9.2

Transformujte grafy elementárnych funkcií $y = |x|$ a $y = x^2$ tak, aby ste postupne získali grafy všetkých nasledujúcich funkcií. Výsledky následne overte použitím programu EG.

a)

- $y = |x|$
- $y = -|x|$
- $y = -|x| + 2$
- $y = |x + 2|$
- $y = |x + 3| - 4$
- $y = ||x| - 1|$
- $y = |3 - |x - 1||$
- $y = ||x| - 1| + 2$

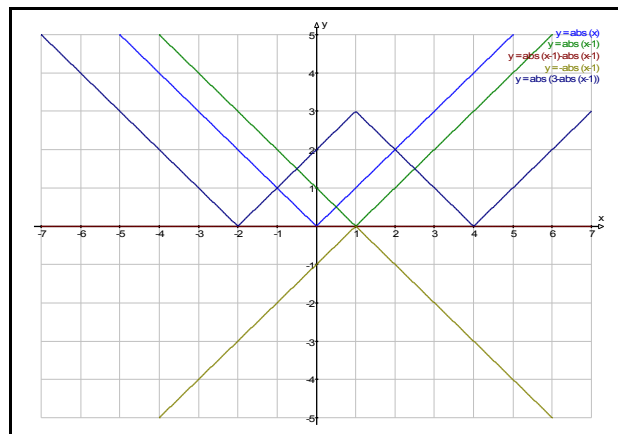
b)

- $y = x^2$
- $y = x^2 + 3$
- $y = x^2 - 2$
- $y = |x^2 - 2|$
- $y = (x - 2)^2$
- $y = (x - 3)^2 - 2$
- $y = |(x - 3)^2 - 2| + 2$

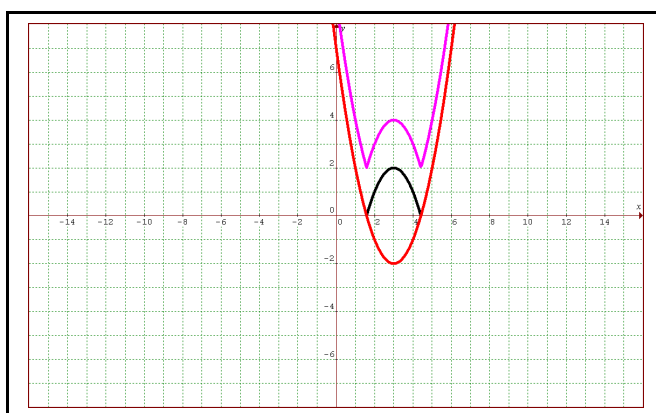
RIEŠENIE

Po predchádzajúcich cvičeniach v skupinách si teraz študenti samostatne precvičujú získané vedomosti na dvoch úlohách podobného typu. Program EG má v tomto prípade autokontrolnú funkciu; slúži ako spätná väzba. Študenti, ako sa ukázalo, sú pozitívne naklonení k počítaču ako svojmu "kontrolórovi". V prípade chybných riešení im totiž počítač umožní bez zbytočného stresu objaviť chybu a dospieť k správne riešeniu.

Študenti postupne získavajú grafy všetkých uvedených funkcií. Môžu veľmi dobre registrovať dynamický proces "premeny" jednoduchého grafu elementárnej funkcie na graf funkcie zložitejšej pričom aplikujú syntézu rôznych transformácií. Uvádzame len niektoré z nich:



Obr.9.2: Graf funkcie $y = \text{abs}(3 - \text{abs}(x-1))$



Obr.9.3: Graf funkcie $y = \text{abs}((x-3)^2 - 2) + 2$

PRÍKLAD 9.3

Je daná funkcia $y = 3|\sqrt{x-3} - 2| + 4$. Zapište postupne všetky transformácie elementárnej funkcie $y = \sqrt{x}$, až kým nedospejete k jej predpisu. Výsledok overte pomocou programu EG.

RIEŠENIE

Úloha má opačný charakter. Práve riešenie príkladov tohto typu je z metodického hľadiska najprínosnejšie. Študenti dokážu identifikovať z akej elementárnej funkcie a postupnosťou ktorých transformácií dospejú ku grafom zložitejších funkcií.

$$y = \sqrt{x}$$

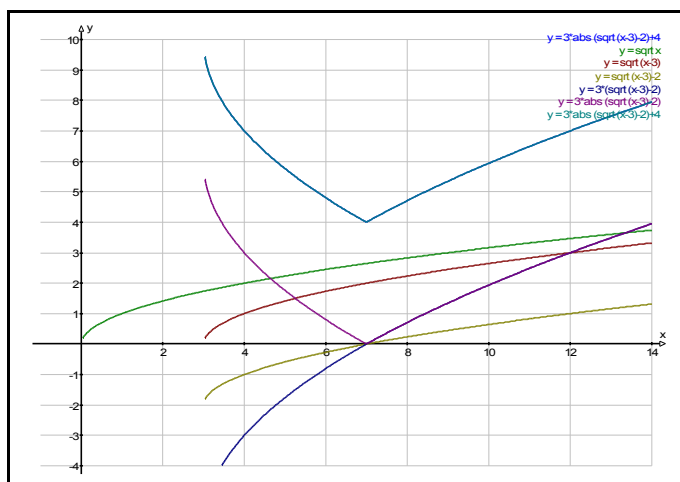
$$y = \sqrt{x-3} \quad \dots\dots\dots \text{posun o 3 jednotky doprava v smere osi } x$$

$$y = \sqrt{x-3} - 2 \quad \dots\dots\dots \text{posun o 2 jednotky nadol v smere osi } y$$

$$y = |\sqrt{x-3} - 2| \quad \dots\dots\dots \text{osová súmernosť záporných funkčných hodnôt vzhľadom na os } x$$

$$y = 3 \cdot |\sqrt{x-3} - 2| \quad \dots\dots\dots \text{natahnutie grafu 3-razy pozdĺž osi } y$$

$$y = 3 \cdot |\sqrt{x-3} - 2| + 4 \quad \dots\dots\dots \text{posun grafu o 4 jednotky nahor v smere osi } y$$

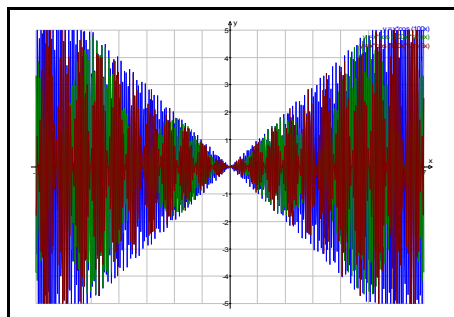


Obr.9.4: Vytváranie grafu funkcie $y = 3|\sqrt{x-3} - 2| + 4$ programom EG

PRÍKLAD 9.4

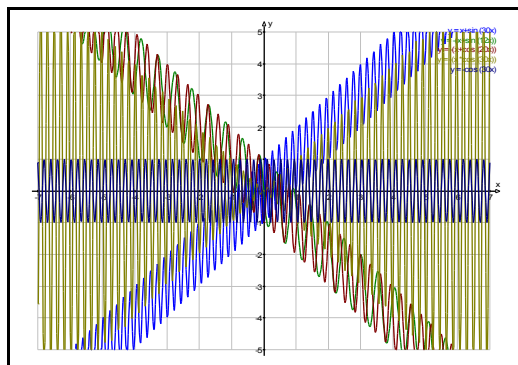
Pomocou programu EG sa pousilujte získať čo najzaujímavejšie grafy funkcií. Využite nato transformácie grafov a syntézu viacerých transformácií grafov elementárnych funkcií. Na úvod sa inšpirujte napríklad predpisom funkcie:

- $y = x \cdot \sin(20x) \cos(15x)$



RIEŠENIE

Cieľom aktivity je povzbudiť študentov, aby sa pokúsili získať nezvyčajné a pozoruhodné grafy funkcií prostredníctvom počítačového programu EG. Táto úloha všetkých veľmi zaujala. Možno pôsobí trochu "nematematicky". Bolo však interesantné pozorovať, ako kým pri prvých pokusoch študenti len typovali tvar funkcie „naslepo“, postupne sa pri získavaní grafov stále viac snažili aplikovať vedomosti o "premene" funkcií z predchádzajúcich cvičení. Uvádzame ešte jeden zo získaných grafov. (graf bol získaný syntézou grafov funkcií $y = x \cos(20x) \sin(10x)$, $y = x + \sin(20x)$, $y = -x + \cos(20x)$)



Obr. 9.5: Graf funkcí $y = x\cos(20x)\sin(10x)$, $y = x + \sin(20x)$, $y = -x + \cos(20x)$