

13 Goniometrické funkcie



Metodický zámer

Názorná predstava goniometrickej funkcie sa môže opierať o jednotkovú kružnicu, pomocou ktorej sú goniometrické funkcie definované, alebo o graf funkcie. Nedostatky pri riešení goniometrických rovníc a nerovníc ktoré pozorujeme, (žiaci často zabúdajú na periodičnosť funkcií) potvrdzujú, že predstave študenta dominuje jednotková kružnica. Náročnosť pojmu periodicity potvrdzuje nevyhnutnosť budovať tento pojem cez sériu separovaných modelov; konkrétnych príkladov. Toto je však ťažko realizovateľné klasických spôsobom; (tabuľa + krieda alebo ceruzka + papier). Tento problém vyriešime, ak volíme vhodný didaktický softvér a sériu úloh, ktorými žiakov zaujmeme a prinútime, aby sami analyzovali a odhaľovali podstatu pojmov a vzťahov medzi nimi.

S goniometrickými funkciami sa žiaci stretávajú v 2. ročníku gymnázia (sexta) v rámci tematického celku *Funkcie, rovnice a nerovnice II.* Napriek postačujúcej časovej dotácii na toto učivo navrhujeme integrovať aspoň 3 hodiny v počítačovej učebni, zamerané na precvičovanie a fixovanie pojmov. Veľké problémy majú žiaci predovšetkým pri riešení goniometrických rovníc a nerovníc, kde inovatívne postupy s podporou počítačových technológií eliminujú niektoré problémy a nepochopenia.

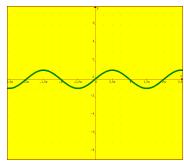
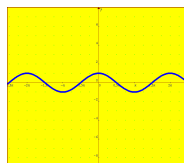
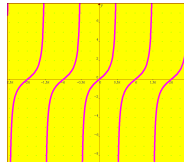
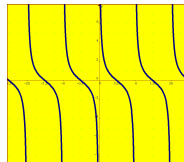
Goniometrické funkcie sa objavujú nielen v matematike, ale aj vo fyzike, biológii či astronómii, pri opisovaní rôznych periodických dejov. Aktivity uvádzané v tejto kapitole majú študentov motivovať a prispieť k neformálnemu chápaniu uvedenej problematiky. Prostredníctvom nich si lepšie osvoja techniku získavania grafov zložených goniometrických funkcií a následne ich používanie pri riešení rozmanitých goniometrických rovníc a nerovníc.



Čo by mal študent vedieť - stručný sylabus

Nech je v pravouhlej sústave súradníc Oxy daná kružnica k s polomerom 1. Ku každému reálnemu číslu x priradíme orientovaný uhol veľkosti x radiánov, ktorý umiestnime v Oxy tak, že jeho vrchol je v začiatku a začiatkové rameno v kladnej poloosi x . Koncové rameno tohto orientovaného uhla pretne jednotkovú kružnicu v bode $A[x_A, y_A]$.

- Funkcia sínus priradí každému reálnemu číslu x druhú súradnicu bodu A: $\sin x = y_A$,
- Funkcia kosínus priradí každému reálnemu číslu x prvú súradnicu bodu A: $\cos x = x_A$,
- Funkcia tangens priradí každému reálnemu číslu x , pre ktoré $\cos x \neq 0$, číslo $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$,
- Funkcia kotangens priradí každému reálnemu číslu x , pre ktoré $\sin x \neq 0$, číslo $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$,

$y = \sin x$		<ul style="list-style-type: none"> • $D(f) = R; H(f) = [-1, 1]$, • nepárna, ohraničená, periodická - základná perióda $p=2\pi$, • rastie na každom z intervalov $\left\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$, • klesá na každom z intervalov $\left\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$
$y = \cos x$		<ul style="list-style-type: none"> • $D(f) = R; H(f) = [-1, 1]$, • párna, ohraničená, periodická - základná perióda $p=2\pi$, • rastie na každom z intervalov $\langle -\pi + 2k\pi; 2k\pi \rangle$, • klesá na každom z intervalov $\langle 2k\pi; \pi + 2k\pi \rangle$
$y = \operatorname{tg} x$		<ul style="list-style-type: none"> • $D(f) = R - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \right\}; H(f) = R$, • nepárna, neohraničená, periodická - najmenšia perióda $p=\pi$ • rastie na každom intervale $\left\langle \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{3\pi}{2} + k\pi \right\rangle$
$y = \operatorname{cotg} x$		<ul style="list-style-type: none"> • $D(f) = R - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{k\pi\}; H(f) = R$, • nepárna, neohraničená, periodická - najmenšia perióda $p=\pi$ • klesá na každom intervale $\langle k\pi; \pi + k\pi \rangle$



Riešené príklady

Príklad 13.1

a) Narysujte do jedného obrázku grafy funkcií:

- $y = \sin(x)$
- $y = \sin(4 \cdot x)$
- $y = \sin(0,5 \cdot x)$

Narysujte do ďalšieho obrázku grafy funkcií

- $y = \cos(x)$
- $y = \cos(6 \cdot x)$
- $y = \cos(0,25 \cdot x)$

Pozorujte grafy funkcií, formulujte tvrdenie týkajúce sa zmeny periódy funkcií typu $y = \cos(k \cdot x)$ v závislosti na parametri k .

b)

Narysujte do jedného obrázku grafy funkcií :

- $y = \cos(x)$
- $y = 4\cos(x)$
- $y = 0,5 \cdot \cos(x)$

Narysujte do ďalšieho obrázku grafy funkcií:

- $y = \sin(x)$
- $y = 3\sin(x)$
- $y = 0,25 \sin(x)$

Pozorujte grafy funkcií a vyslovte závery týkajúce sa zmeny oboru hodnôt funkcií tvaru $y = k \cdot \sin(x)$.

c)

Narysujte grafy funkcií:

- $y = \cos(x) + 2$
- $y = \cos(x) - 5$
- $y = \sin(2x) + 3$
- $y = \sin(0,5x) - 1$

Aké zmeny nastali v prípade grafov funkcií tvaru $y = \cos(x) + k$!

d)

Narysujte grafy funkcií:

- $y = \sin(x)$
- $y = \sin(x+\pi)$
- $y = \sin(x-\pi/4)$
- $y = 2\cos(x+\pi)$

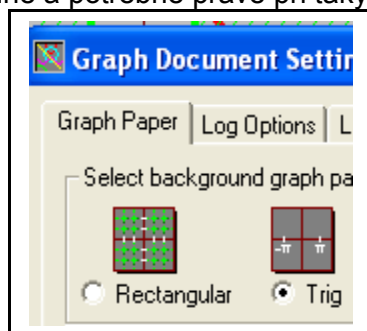
Vyslovte tvrdenie týkajúce sa tvaru grafu funkcií typu $y = \sin(x+a)$!

RIEŠENIE



Pri riešení úloh posluží program Graphmatica s jeho schopnosťou vykresľovať „rodinky funkcií“. Študenti môžu sledovať ako meniaci sa parameter v zápise zloženej funkcie $y = a \cdot \cos(bx+c) + d$ modifikuje jej graf, obor funkčných hodnôt či periódu. Vďaka didaktickému softvéru môžu testovať viaceré prípady, samostatne zovšeobecniť a formulovať závery. Cieľom aktivít je umožniť študentom získať bohatšie skúsenosti a lepšie zručnosti v tejto oblasti prostredníctvom počítačovej techniky.

Pri riešení úloh z oblasti goniometrických funkcií je vhodné formátovať okno programu, v ktorom sú vytvárané grafy postupnosťou príkazov z menu programu v poradí *Option* → *Graph Paper* → *Trig*. Nastavenie zabezpečí, že mierka na osi x je normovaná násobkami čísla π , čo je vhodné a potrebné práve pri takýchto cvičeniach.



Obr.13.1:Nastavenie okna Trig

V rámci spoločného vyhodnotenia zadaných úloh očakávame že študenti sami sformulujú nasledujúce zovšeobecnenia:

Pri grafe funkcií $y = \sin(kx)$ sa mení perióda funkcie podľa vzťahu $T = (2\pi/k)$.

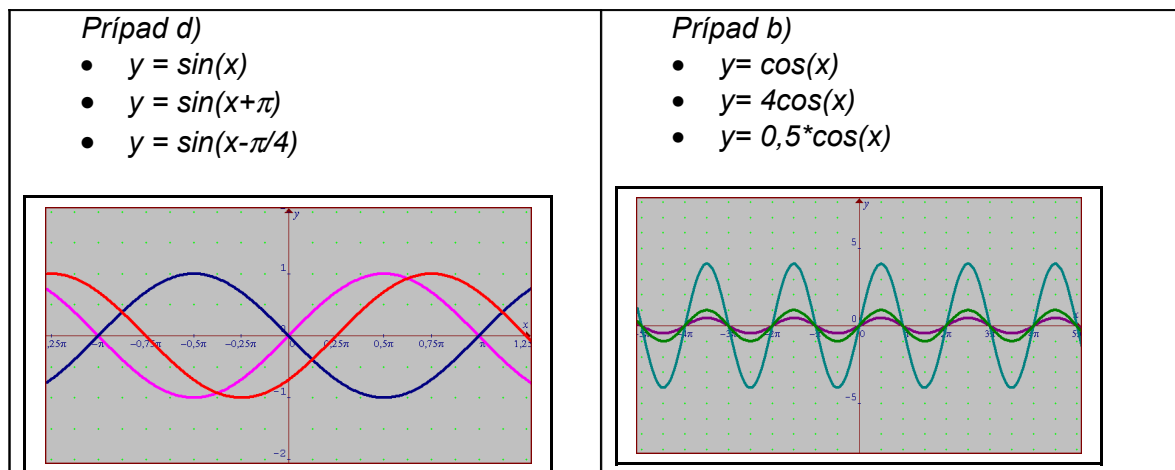
Pri grafe funkcií $y = \sin(x) + a$ je obor funkčných hodnôt: $H(f) = \langle -1+a, 1+a \rangle$.

Pri grafe funkcií $y = b \cdot \sin(x)$ obor funkčných hodnôt $H(f) = \langle -b, b \rangle$.

Pri grafe funkcie $y = \sin(x+a)$ sa posúvajú nulové body funkcie v závislosti na jej type; pre funkciu $\sin(x)$ to budú body tvaru $x_0 = (k\pi - a)$.

V rámci heuristickej besedy diskutujeme o ďalších vlastnostiach jednotlivých funkcií (maximálne, minimálne hodnoty, nulové body, ohraničnosť ...).

Vedomosti získané pri tomto cvičení sú výbornou pomôckou a súčasne propedeutikou úspešnému zvládnutiu goniometrických rovníc a nerovníc. Uvádžeme grafickú interpretáciu dvoch zmienených aktivít; zvyšné získame analogicky.



Obr.13.2. Grafy goniometrických funkcií

PRÍKLAD 13.2

Narysujte grafy funkcií:

a)

- $y = \sin(2x)$
- $y = -\sin(2x)$
- $y = \sin(-2x)$
- $y = -\sin(-2x)$

b)

- $y = \cos(2x)$
- $y = -\cos(2x)$
- $y = \cos(-2x)$
- $y = -\cos(-2x)$

Odpovedzte postupne na otázky:

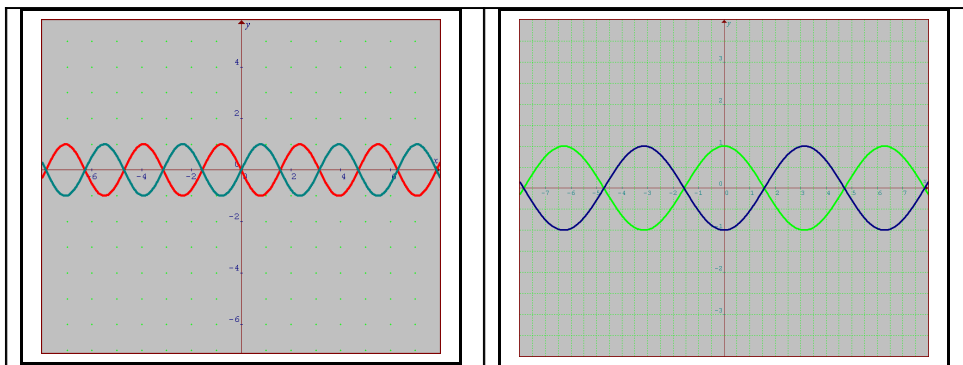
Je graf funkcie $y = \sin(x)$ symetrický? Akú súmernosť pozorujete?

Ako sa zmení graf funkcie $y = \sin(-2x)$ vzhľadom na graf funkcie $y = \sin(2x)$?

Aký je vzťah grafov funkcií $y = \sin(-2x)$ a $y = -\sin(-2x)$? Zdôvodnite! Analogicky postupujte v b)

RIEŠENIE

Cieľom cvičenia je demonštrácia a fixácia pojmov párna a nepárna funkcia, charakteristika grafov takýchto funkcií. Napriek tomu, že študenti do combo boxu zadávajú 4 funkčné predpisy získavajú iba dva grafy. Na zdôvodnenie tohto faktu využívajú definíciu párnosti a nepárnosti funkcií.



Obr.13.3: Párne a nepárne funkcie

PRÍKLAD 13.3

Do jedného obrázku zakreslite grafy funkcií :

a)

- $y = \cos(x)$
- $y = -\cos(x)$
- $y = \sin(x - (\pi/2))$
- $y = \sin(x + (\pi/2))$

Doplňte rovnosť:

$$\sin(x + \pi/2) =$$

$$\sin(x - \pi/2) =$$

b)

- $y = \sin(x)$
- $y = -\sin(x)$
- $y = \cos(x - (\pi/2))$
- $y = \cos(x + (\pi/2))$

Doplňte rovnosť:

$$\cos(x + \pi/2) =$$

$$\cos(x - \pi/2) =$$

RIEŠENIE

Overenie vzájomných vzťahov medzi funkciami $y = \sin(x)$ a $y = \cos(x)$ je vhodným cvičením, ktoré zdôrazňuje spätosť medzi nimi. Úlohu riešime aj analyticky, pričom využívame súčtové goniometrické vzorce.

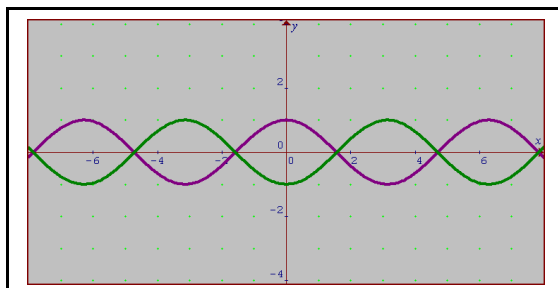
Študenti v procese riešenia získavajú iba dva grafy funkcií, čo ich privádza k záveru:

$$\cos(x + \pi/2) = -\sin(x)$$

$$\cos(x - \pi/2) = \sin(x)$$

$$\sin(x + \pi/2) = \cos(x)$$

$$\sin(x - \pi/2) = -\cos(x)$$



Obr.13.4: Vzájomné vzťahy funkcií $y = \sin x$ a $y = \cos x$

PRÍKLAD 13.4

Na základe poznatkov získaných v príklade 13.1 načrtnite grafy funkcií:

a) $y = 3\sin(x - \pi/2) + 1$

b) $y = 2\cos(2x + \pi) - 2$

Výsledky overte pomocou programu Graphmatica

RIEŠENIE

Úloha veľmi dobre preverí vedomosti o transformáciách grafov funkcií získané v predchádzajúcich aktivitách. Predovšetkým treba prediskutovať so študentmi prioritu jednotlivých modifikácií základného grafu. Prípad b) spôsobuje väčšie ťažkosti, je potrebné usmernenie týkajúce sa poradia jednotlivých transformácií: $y = \cos(x)$

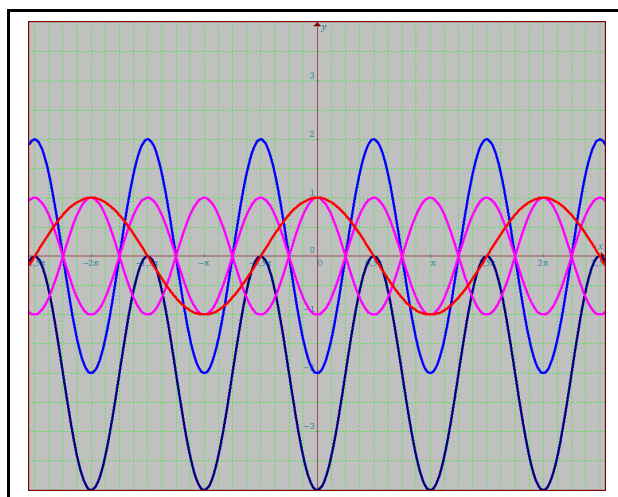
$y = \cos(x + \pi/2)$ posun v smere osi x o $(-\pi/2)$

$y = \cos(2(x + \pi/2))$zmena periódy funkcie z $p=2\pi$ na $p=\pi$

$y = 2 \cdot \cos(2(x + \pi/2))$zmena oboru funkčných hodnôt $H(f) = \langle -2, 2 \rangle$

$y = 2\cos(2(x + \pi/2)) - 2$...zmena oboru funkčných hodnôt $H(f) = \langle -4, 0 \rangle$

Je vhodné postupné vkladanie funkcií, ktoré umožní študentom sledovať proces zmeny základného grafu. Výsledný graf funkcie $y = 2\cos(2x + \pi) - 2$ je tmavomodrej farby.



Obr.13.5: Graf funkcie $y = 2\cos(2x + \pi) - 2$

PRÍKLAD 13.5

Napíšte predpis funkcie tvaru $y = a \cdot \sin(b \cdot x) + c$, ktorá nadobúda maximálnu hodnotu 6, minimálnu hodnotu 2 a perióda je $p = \pi/3$. Výsledky overte graficky!

RIEŠENIE

Teraz umožníme študentom riešiť dve úlohy opačného typu. Poznáme niektoré vlastnosti funkcie a je treba určiť jej predpis. Využívajúc poznatky získané v príklade 4.13.1 postupne odkrývajú aké hodnoty musia nadobúdať parametre a , b , c , d , aby funkcia mala požadované vlastnosti. Využíjúc trasovanie funkcie overíme platnosť jednotlivých podmienok.

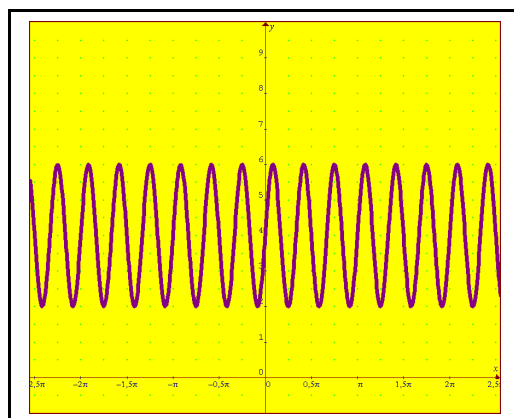
Ak $p = \pi/3$, potom platí, $b = 2\pi/(p/3) \Rightarrow b = 6$

Nakoľko medzi minimálnou a maximálnou hodnotou danej funkcie je rozpätie 4 musí byť hodnota $a = 2$.

Maximálna hodnota je 6 a minimálna 2, teda je zrejмый posun základnej funkcie o 4 dieliky.

Tvar funkcie je teda: $y = 2\sin(6x) + 4$.

Grafické overenie:



Obr.13.6: Graf funkcie $y = 2\sin(6x) + 4$.



Príklady 13.6 a 13.7 majú tiež motivačný charakter. Poukazujú na univerzálne využitie goniometrických funkcií a ich výskyt v praktickom živote. Príklad 13.7 prezentuje známy matematický model periodického cyklu, ktorý charakterizuje zmeny počtu predátorov a ich koristi na istom území. Bol študovaný a matematicky opísaný A.J. Lotkom. Funkcie, ktoré tento dej popisujú sú nazvané: *Lotka – Volterra predator – prey model*. (model vzájomných zmien počtu predátorov a ich koristi na istom území)

PRÍKLAD 13.6

Hĺbka oceánu sa na istom mieste mení počas dňa periodicky; s periódou 24hodín, v rozpätí od 10m po 18m a môžeme ju vyjadriť pomocou funkcie *sinus*. Akú časť dňa je hĺbka oceánu väčšia ako 16 metrov?

Graficky znázorníte!

RIEŠENIE

Funkciu hľadáme v tvare $y = a \cdot \sin(k \cdot x) + b$.

Pre periódu funkcie $y = \sin(x)$ platí vzťah: $p = 2\pi/k$

$$24k = 2\pi$$

$$k = \pi/12$$

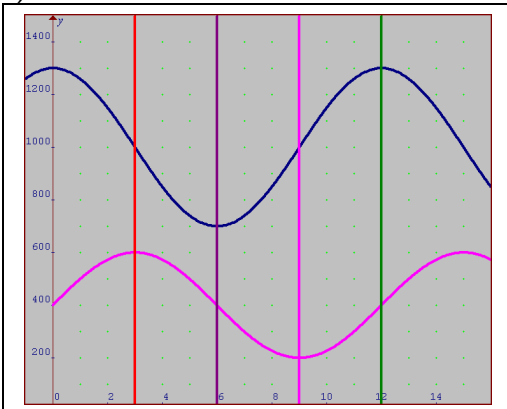
Z ďalších vlastností dostávame:

$$y = 4\sin((\pi/12) x) + 14$$

Záver:

Z grafu je možné ľahko zistiť, že **hĺbka oceánu je väčšia ako 16 metrov v čase od druhej do desiatej hodiny, čo tvorí jednu tretinu dňa.** (využilo sa trasovanie funkcie a tabuľka jej hodnôt na zisťovanie potrebných údajov).

b)



• **Záver:**

Populácia predátorov dosahuje svoje maximum pre $t = 3$; $f(3) = 600$

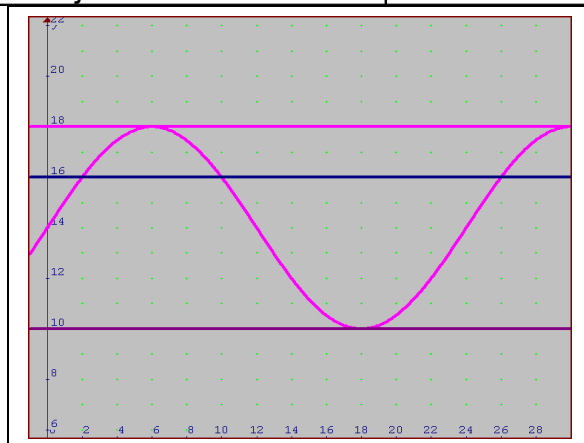
Pomocou trasovania funkcií je možné získať veľa informácie o zmenách veľkosti jednej aj druhej populácie a ich koreláciách, čo môže byť obsahom spoločnej diskusie.

a) Equation(s):

$$y = 400 + 200 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot x\right) \quad (1)$$

$$y = 1000 + 300 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot x\right) \quad (2)$$

x	y	y2
0	400,0	1300,0
1,0	500,0	1259,8076
2,0	573,2051	1150,0
3,0	600,0	1000,0
4,0	573,2051	850,0
5,0	500,0	740,1924
6,0	400,0	700,0
7,0	300,0	740,1924
8,0	226,7949	850,0
9,0	200,0	1000,0
10,0	226,7949	1150,0
11,0	300,0	1259,8076
12,0	400,0	1300,0



Obr.13.7: Zmena hĺbky oceánu

PRÍKLAD 13.7

Predpokladajme, že periodickú zmenu počtu jedincov istej populácie predátorov na danom území popisuje funkčná závislosť:

$$f(t) = 400 + 200 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

Počet jedincov, ktorí sú korisťou pre týchto predátorov sa mení podľa vzťahu:

$$g(t) = 1000 + 300 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right), \text{ kde } t \text{ je čas v rokoch.}$$

- Zostavte tabuľku funkčných hodnôt jednotlivých populácií pre $t=0$ až $t=12$.
- Grafy oboch funkcií zakreslite do toho istého súradnicového systému.
- Určte pre akú hodnotu t dosahuje populácia predátorov svoje maximum

Obr.13.8: Riešenie príkladu 13.7 programom Graphmatica



Prax nás presviedča, že študenti majú veľké problémy so zapamätaním si dôležitých goniometrických vzorcov. Nasledujúce cvičenie môže pomôcť práve pri odbúravaní tohto deficitu. Aktivity sú zamerané na overovanie platnosti niektorých známych goniometrických vzorcov.

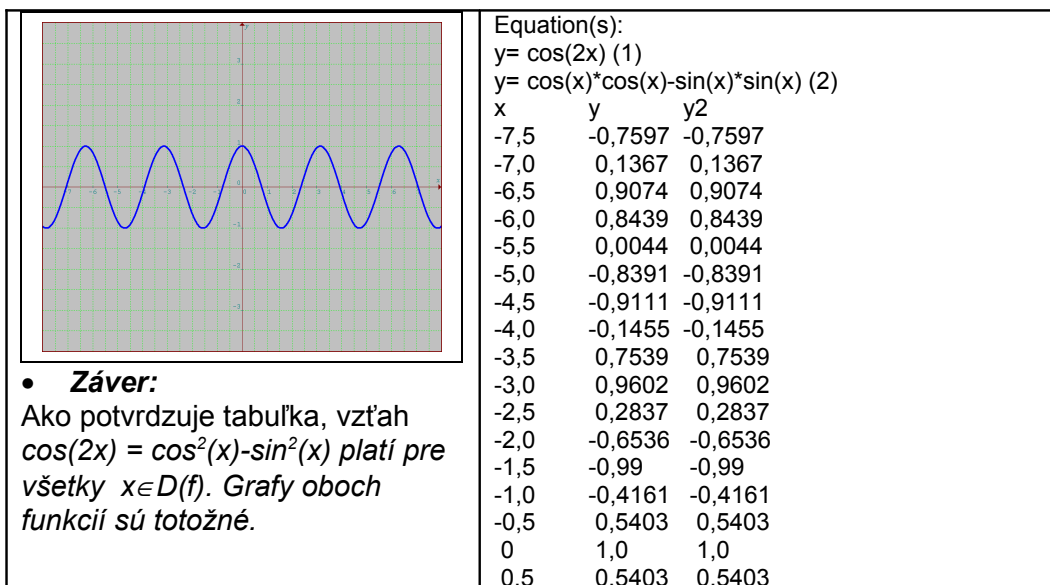
PRÍKLAD 13.8

Overte platnosť goniometrických vzorcov:

- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $2\sin(x) \cdot \cos(x) = \sin(2x)$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
- $\cos^2 x = (1 + \cos(2x))/2$

RIEŠENIE

Postupujeme ako pri grafickom riešení rovníc či nerovníc. Označíme výraz na jednej strane vzorca ako funkciu y_1 a výraz na druhej strane vzorca ako y_2 . Obe funkcie y_1 aj y_2 zakreslíme do jedného obrázku a zistíme pre ktoré hodnoty x nastáva rovnosť. Takýto spôsob overovania platnosti vzorcov má pozitívny vplyv na intenzitu a trvácosť získaných vedomostí. Uvádzame dôkaz tretieho vzťahu – ostatné analogicky.



Obr.13.9: Riešenie príkladu.13.8

PRÍKLAD 13.9

Riešte rovnice:

- $\sin(2x) \cdot \cos(x) = \sin(x)$
- $\sin(x) + \cos(x) = 2$
- $\cos^2(x) - \cos(x) + 1/4 = 0$
- $3\sin(x) + 4\cos(x) = 5$

RIEŠENIE

Pri riešení rovníc postupujeme simultánne; študenti riešia zadania v zošite a paralelne pri tabuli. Následne svoje výsledky overujú v programe EG (prípadne Graphmatica). Vhodné je spoločné fórum s využitím dataprojektoru a grafických modelov.

Rovnice upravia tak, aby ich bolo možné zobrazit' ako dve funkcie do toho istého obrázku, pričom ich úlohou je nájsť priesečník funkcií, ktoré reprezentujú ľavú a pravú stranu rovnice. Špeciálne pri tomto type rovníc, kde kvôli periodicnosti funkcií je množina riešení na \mathbb{R} nekonečná, formálny zápis riešenia pomocou parametrov robí žiakom veľké problémy. Je preto vhodné, aby si na konkrétnych grafických modeloch overili jeho správnosť. Zbavíme ich tak strachu a prílišného rešpektu z riešenia goniometrických rovníc a nerovníc.

Pre prvú z rovníc dostávame:

Analyticky:

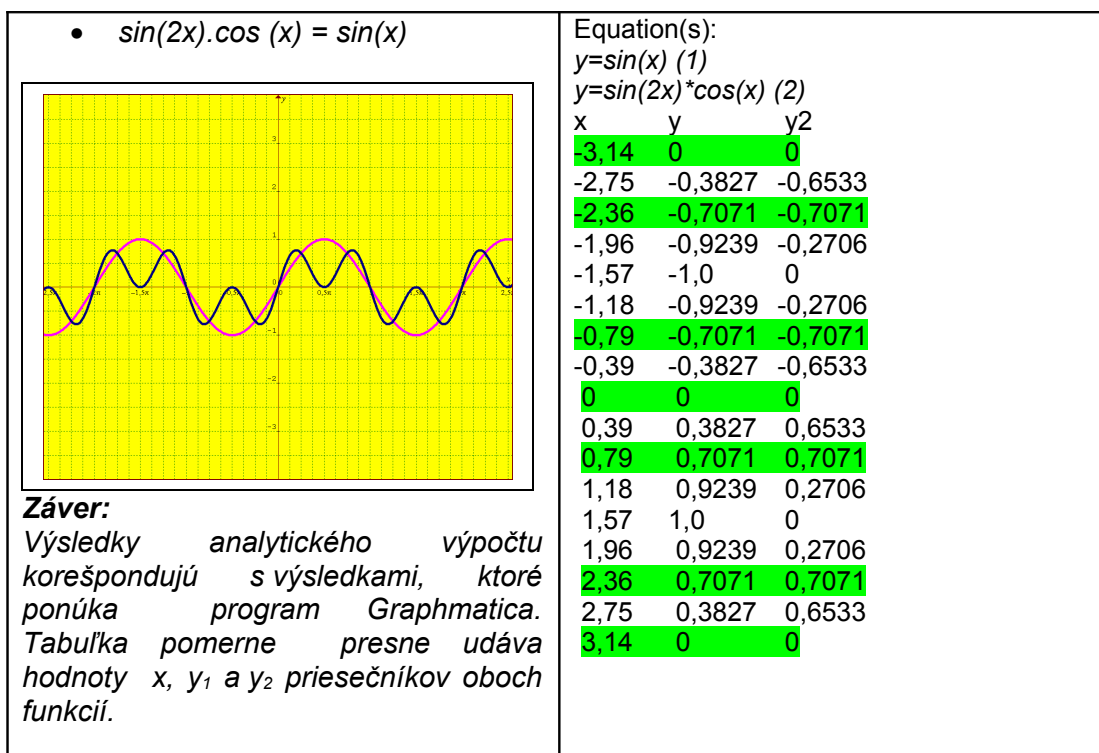
$$\sin(2x) \cdot \cos(x) = \sin(x) \Leftrightarrow 2\sin(x)\cos(x)\cos(x) - \sin(x) = 0$$

$$\sin(x) \cdot (2\cos^2(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sin(x) = 0 \text{ a zároveň } \cos^2(x) = 1/2 \Leftrightarrow |\cos(x)| = \sqrt{2}/2$$

$$x = k \cdot \pi \text{ alebo } x = (2k-1)\pi/4$$

Graficky:



Obr.13.10: Grafické riešenie goniometrickej rovnice $\sin(2x) \cdot \cos(x) = \sin(x)$



Počas realizácie jednotlivých aktivít je vhodné dôsledne dbať na systematičnosť v práci, vyžadovať od študentov kontinuálne zapisovanie získaných výsledkov jednotlivých aktivít do zošita. Po prípade je možné voliť formu pracovných listov, ktoré sú následne hodnotené a kontrolované. Pri riešení goniometrických rovníc a nerovníc študenti často využívajú aj metódu „cesty späť“ alebo „od výsledku k riešeniu“, pričom didaktický softvér slúži ako „šepkár“ či „katalyzátor“ pre vznik vhodného riešiteľského postupu či nápadu. Všetky tieto cesty, pokiaľ vedú k lepšiemu porozumeniu preberanej problematiky sú dovolené a vhodné, umožňujú študentom aktívne participovať na riešení problémov, umožňujú vznik generických modelov.

PRÍKLAD 13.10

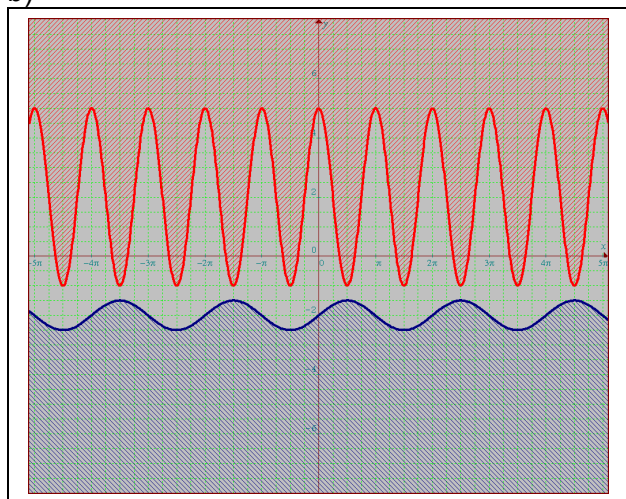
Pomocou systému goniometrických nerovníc popíšte vyšrafovanú časť plochy na obrázku. Po zväčšení obrázku je možné lepšie odčítanie hodnôt jednotlivých premenných, potrebné k správne vyriešeniu úlohy.

a)



Riešenie: $|\sin(x)| < y \wedge -|\cos(2x)| > y$

b)



Riešenie: $0,5\sin(x)-2 > y \wedge 3\cos(2x)+2 < y$