



## 8 Rovnice a nerovnice



### Metodický zámer

Cieľom vyučovania rovníc a nerovnic na základnej a strednej škole je predovšetkým prehĺbiť záujem žiaka o matematiku, motivovať ho, rozvíjať jeho schopnosť modelovať reálne situácie v jazyku rovníc, využiť rovnice na precvičovanie rôznych oblastí matematiky, rozvíjať abstraktné pohľady na rovnice, kultivovať logiku a schopnosť dedukcie.

Prvé skúsenosti s riešením rovníc rôznych typov majú už žiaci základnej školy. Rutinné postupy a algoritmy zvládajú celkom dobre. V 1. ročníku (kvinte) gymnázia sa venujú lineárnym a kvadratickým rovniciam a nerovniciam, pri riešení ktorých sú pomerne úspešní. Skúsenosti nám potvrdzujú, že strach a rešpekt vyvolávajú predovšetkým rovnice s absolútnymi hodnotami, iracionálne rovnice a rovnice s parametrom, ktoré sa preberajú v 2.ročníku (sexe) v rámci tematického celku *Funkcie, rovnice a nerovnice II.* Zaradené sú hneď za elementárne funkcie a ich vlastnosti. K najmenej zvládaným témam stredoškolského učiva patria nerovnice; aj napriek tomu, že kompetencie z oblasti riešenia všetkých typov nerovnic sú nevyhnutné pre zvládnutie viacerých oblastí vyššej matematiky (matematickej analýzy).



### Čo by mal študent vedieť - stručný syllabus

- |  |   |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"><li>Nech <math>f, g</math> sú funkcie premennej <math>x</math> definované na <math>A \subset \mathbb{R}</math>, potom úloha: nájsť <math>\forall x \in A</math>, pre ktoré funkcie <math>f(x)</math> a <math>g(x)</math> nadobúdajú rovnaké funkčné hodnoty zapíšeme v tvare <u><math>f(x) = g(x); x \in A</math> a nazveme ju rovnicou s neznámou <math>x</math>.</u></li><li><math>f(x)</math> je <u>ľavá strana rovnice</u>, <math>g(x)</math> <u>pravá strana rovnice</u>.</li><li>množina <math>A</math> sa nazýva <u>definičný obor rovnice</u>.</li><li>číslo <math>x</math>, ktoré vyhovuje danej rovnici sa nazýva <u>koreň</u> alebo <u>riešenie rovnice</u>.</li><li><u>Riešiť rovnicu</u> znamená:</li><li>každý prechod rovnice <math>f_1(x)=g_1(x)</math> s oborom <math>A_1</math> na rovnicu <math>f_2(x)=g_2(x)</math> s oborom riešení <math>A_2</math>, kde <math>A_1 \subset A_2</math> sa nazýva <u>dôsledková úprava rovnice</u> <math>f_1(x)=g_1(x)</math>.</li></ul> | <ul style="list-style-type: none"><li><u>Rovnice s absolútnymi hodnotami:</u> sú rovnice obsahujúce absolútne hodnoty z výrazu s neznámou <math>x</math>;</li><li>Existuje niekoľko metód pre ich riešenie:<ul style="list-style-type: none"><li>a) metóda nulových bodov; (rozbijeme číselnú os na intervaly a v každom z nich riešime danú rovnicu,</li><li>b) grafická metóda,</li><li>c) geometrická metóda.</li></ul></li><li><u>Nerovnica</u><br/>Nech <math>f, g</math> sú funkcie premennej <math>x</math> definované na <math>A \subset \mathbb{R}</math>, potom úloha: nájsť <math>\forall x \in A</math>, pre ktoré funkcie <math>f(x)</math> nadobúda väčších, resp. menších funkčných hodnôt ako funkcia <math>g(x)</math> zapíšeme v tvare:<br/><u><math>f(x) &gt; g(x)</math>; resp. <math>f(x) &lt; g(x), x \in A</math> a nazveme ju nerovnicou s neznámou <math>x</math>.</u></li><li>Pri riešení nerovnice je <u>nutné rozlišovať násobenie nerovnice kladným resp. záporným číslom či</u></li></ul> |
|--|---|

<ul style="list-style-type: none"> <li>• <u>dôsledkové úpravy</u>, pri ktorých získame ekvivalentnú rovnicu s danou rovnicou, t.j. rovnicu s tým istým definičným oborom sa nazýva <u>ekvivalentná úprava rovnice</u>;</li> </ul>	<p><u>výrazom v:</u>  pre <math>v &gt; 0</math>: <math>f(x) &lt; g(x) \Leftrightarrow v \cdot f(x) &lt; v \cdot g(x)</math>;  <math>f(x) &gt; g(x) \Leftrightarrow v \cdot f(x) &gt; v \cdot g(x)</math>;</p>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <u>Iracionálne rovnice</u>: sú rovnice obsahujúce odmocniny z výrazu s neznámou <math>x</math>. Riešime ich v obore reálnych čísel.</li> <li>• Irac. rovnice riešime tak, že umocníme obe strany rovnice: <u>robíme dôsledkové úpravy, preto nutnou súčasťou riešenia je skúška</u>.</li> <li>• v obore reálnych čísel platí:  <math>a = b \Rightarrow a^2 = b^2</math>  <math>a^2 = b^2 \Rightarrow a = b \text{ alebo } a = -b</math></li> </ul>	<p>pre <math>v &lt; 0</math>: <math>f(x) &lt; g(x) \Leftrightarrow v \cdot f(x) &gt; v \cdot g(x)</math>;  <math>f(x) &gt; g(x) \Leftrightarrow v \cdot f(x) &lt; v \cdot g(x)</math>;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <u>Umocňovať môžeme nerovnicu alebo nerovnosť len medzi nezápornými číslami!</u>  <math>0 \leq a &lt; b \Rightarrow a^2 &lt; b^2</math></li> </ul> <p><u>Upozornenie:</u> pri riešení rovnice či nerovnice je vždy treba stanoviť definičný obor <math>D(f)</math> rovnice(nerovnice)</p>



Prvé skúsenosti s riešením rovníc rôznych typov majú už žiaci základnej školy. Rutinné postupy a algoritmy zvládajú celkom dobre. V 1. ročníku (kvinte) gymnázia sa venujú lineárnym a kvadratickým rovniciam a nerovniciam, pri riešení ktorých sú pomerne úspešní. Skúsenosti nám potvrdzujú, že strach a rešpekt vyvolávajú predovšetkým rovnice s absolútnymi hodnotami, iracionálne rovnice a rovnice s parametrom, ktoré sa preberajú v 2.ročníku (sexe) v rámci tematického celku *Funkcie, rovnice a nerovnice II*. Zaradené sú hneď za elementárne funkcie a ich vlastnosti. Prax nám potvrdzuje, že k najmenej zvládaným témam stredoškolského učiva patria nerovnice; aj napriek tomu, že kompetencie z oblasti riešenia všetkých typov nerovníc sú nevyhnutné pre zvládnutie viacerých oblastí vyššej matematiky (matematickej analýzy).



### **Inovácia vyučovacieho procesu**

V tejto kapitole sa chceme venovať rovniciam, ktoré patria azda k najnáročnejším druhom rovníc preberaným na strednej škole; sú to predovšetkým rovnice s absolútnymi hodnotami, iracionálne rovnice a rovnice s parametrom. Grafické riešenia, ktoré pomocou počítača navrhujeme realizovať, odstránia mnohé nejasnosti a prispievajú k neformálnejšiemu pochopeniu problematiky. Odporúčame postupovať vždy najskôr analytickým spôsobom, neskôr vytvoriť grafický model. Tento slúži v prvom rade ako autokontrola pre študentov, nabádame ich aj k hlbšej analýze a pozorovaniu, ako jednotlivé kroky alebo výsledky výpočtov korešpondujú s grafickými modelmi.

Pri rovniciach v tvare  $f(x) = g(x)$  môžeme postupovať dvoma spôsobmi. Zobrazieme grafy funkcií  $y_1 = f(x)$  a  $y_2 = g(x)$  do jedného obrázku a využijeme didaktický softvér EG na vyhľadanie ich priesečníkov. Druhá možnosť je vytvoriť graf funkcie  $h(x) = f(x) - g(x) = y$  a vyhľadať nulové miesta tejto funkcie. (opäť prízvukujeme študentom súvis medzi riešením rovnice  $h(x) = 0$  a určovaním nulových bodov príslušnej funkcie  $y = h(x)$ ).



## Riešené príklady

### PRÍKLAD 8.1

Graficky a tiež analyticky riešte rovnice a nerovnice s absolútnymi hodnotami:

- $|x+1| + |x-2| = |x+3| + 6$
- $|x^2-3x+2| + |x^2-5x+4| = 2$
- $|x+5| - |x-1| > |x+2|$

### RIEŠENIE



Pri riešení úloh, vďaka dataprojektoru a počítaču, môžeme so študentmi analyzovať všetky kroky algebraického riešenia a poodhaliť podstatu a zmysel postupu na grafických modeloch.

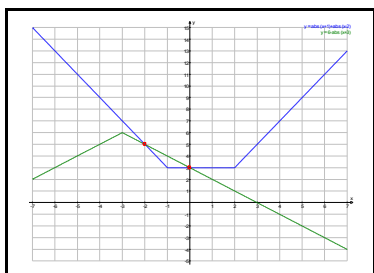
Algoritmus riešenia nerovnic s absolútnymi hodnotami má 5 základných krokov:

- rozdelenie číselnej osi na intervaly nulovými bodmi výrazov v absolútnej hodnote,
- odstránenie absolútnych hodnôt v závislosti na znamienkach výrazov vo zvolenom intervale,
- riešenie rovnice (nerovnice) na každom z intervalov,
- určenie prieniku medzi oboma podmienkami - (práve na tomto mieste riešiteľského postupu sa žiaci dopúšťajú chýb najčastejšie),
- vyhodnotenie riešenia úlohy zjednotením parciálnych výsledkov.

Každý krok „overujeme“ a „demonštrujeme“; pre počítač je to časovo nenáročné a ľahko realizovateľné.

#### 1.spôsob:

- $|x+1| + |x-2| = |x+3| + 6$



$$y_1 = \text{abs}(x+1) + \text{abs}(x-2) \text{ and } y_2 = 6 - \text{abs}(x+3)$$

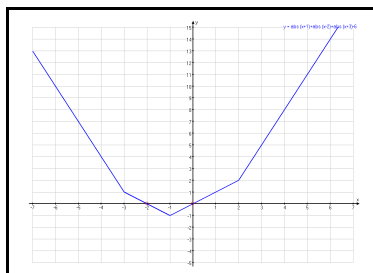
**Intersection:  $y = 5$  for  $x = -2$**

**Intersection:  $y = 3$  for  $x = 0$**

- **Riešenie:  $P = \{-2; 0\}$**

- $|x^2-3x+2| + |x^2-5x+4| = 2$

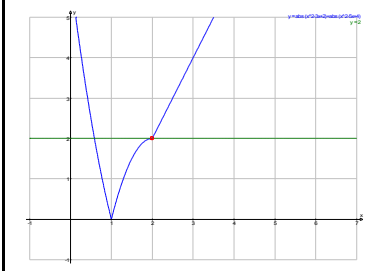

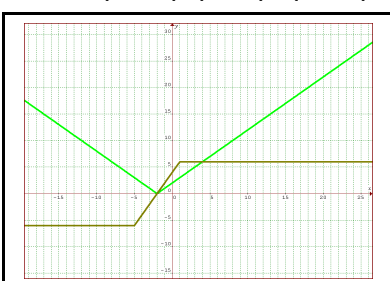
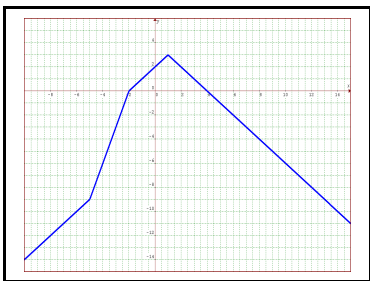
#### 2.spôsob:



$$y = \text{abs}(x+1) + \text{abs}(x-2) + \text{abs}(x+3) - 6 \quad \text{Root: } x = -2$$

$$y = \text{abs}(x+1) + \text{abs}(x-2) + \text{abs}(x+3) - 6 \quad \text{Root: } x = 0$$

- **Riešenie:  $P = \{-2; 0\}$**

 <p> <math>y_1 = \text{abs}(x^2 - 3x + 2) + \text{abs}(x^2 - 5x + 4)</math> and <math>y_2 = 2</math>  <b>Intersection: <math>y = 2</math> for <math>x = 2</math></b>  <b>Intersection: <math>y = 2</math> for <math>x = 0,5857864376</math></b> </p> <ul style="list-style-type: none"> <li><b>Riešenie: <math>P = \{2; 0.5857\}</math></b></li> </ul>	 <p> <math>y = \text{abs}(x^2 - 3x + 2) + \text{abs}(x^2 - 5x + 4) - 2</math>  <b>Root: <math>x = 1,999999438</math></b>  <b>Root: <math>x = 0,5857864376</math></b> </p> <ul style="list-style-type: none"> <li><b>Riešenie: <math>P = \{2; 0.5857\}</math></b></li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li><b><math> x+5  -  x-1  &gt;  x+2 </math></b></li> </ul>  <p> <math>y_1 = \text{abs}(x+5) - \text{abs}(x-1); y_2 = \text{abs}(x+2)</math> </p> <ul style="list-style-type: none"> <li><b>Riešenie: Interval <math>(-2; 4)</math> nakoľko platí:</b>  <math>\forall x \in (-2; 4)</math> je <math>y_1 &gt; y_2</math></li> </ul>	 <p> <math>y = \text{abs}(x+5) - \text{abs}(x-1) - \text{abs}(x+2);</math> </p> <ul style="list-style-type: none"> <li><b>Riešenie: Interval <math>(-2; 4)</math>; nakoľko platí:</b>  <math>\forall x \in (-2; 4)</math> je <math>y &gt; 0</math></li> </ul>

Obr.8.1: Rovnice s absolútnymi hodnotami - riešenie programom EG

## PRÍKLAD 8.2

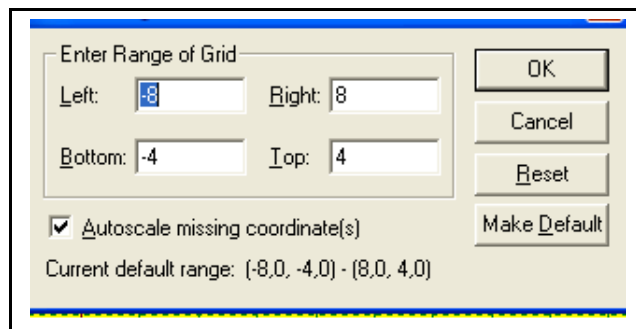
Graficky a tiež analyticky riešte iracionálne rovnice a nerovnice:

- $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} = \sqrt{2x+3}$
- $\sqrt[3]{24+x} + \sqrt{12-x} = 6$
- $2x - 5\sqrt{x-3} \geq 0$
- $\sqrt{\frac{3x-1}{x-2}} \geq 2 \wedge \frac{1}{x} < 1$

## RIEŠENIE

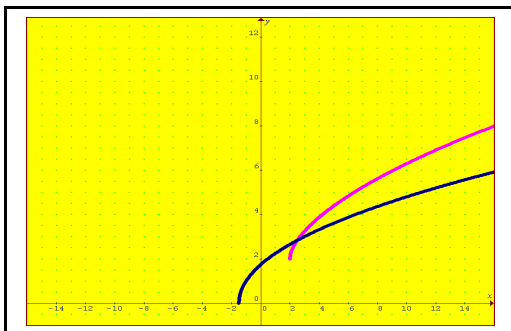
Grafické modely, ktoré získame didaktickým softvérom Graphmatica slúžia opäť ako autokontrola predovšetkým definičných oborov jednotlivých rovníc. Počas riešenia iracionálnych rovníc a nerovnic sa často využívajú dôsledkové úpravy a preto skúška správnosti je nevyhnutnou súčasťou riešenia. Pri úlohách tohto typu je tiež vhodné aplikovať vedomosti o grafoch a vlastnostiach iracionálnych funkcií. Študenti získajú konkrétnu predstavu o definičnom obore a obore hodnôt parciálnych funkcií, ktoré vstupujú do riešiteľského procesu. Konfrontujú svoje výsledky s grafickým modelom. Pri

ich získavani je často potrebné a vhodné modifikovať rozsahy na osiach x a y, aby sme dostali žiadaný model. (použijeme klávesovú skratku CTRL+R)



Obr.8.2: Okno Grid range

- $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} = \sqrt{2x+3}$

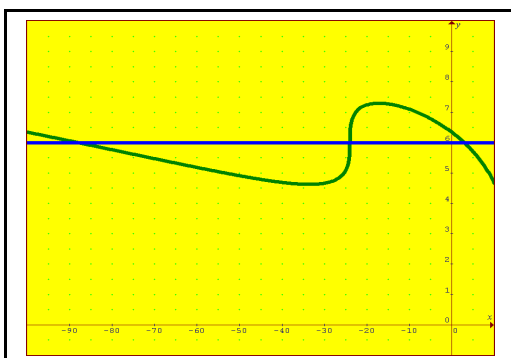


Find Intersection:

$$y = \sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}; \quad y = \sqrt{2x+3}$$

x	y
2,5	2,8284

- $\sqrt[3]{24+x} + \sqrt{12-x} = 6$



Find Intersection:

$$y = 6; \quad y = (24+x)^{1/3} + \sqrt{12-x}$$

x	y
-88,0	6,0
3,0	6,0
-24	6,0

- **Riešenie:**

$$\begin{aligned} \sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} &= \sqrt{2x+3} \\ x+2 + 2\sqrt{x^2-4} + x-2 &= 2x+3 \\ 2\sqrt{x^2-4} &= 3 \\ 4(x^2-4) &= 9 \\ 4x^2 - 25 &= 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \vee x = -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

Vyhovuje iba koreň  $x = 5/2$ ,

$$P = \{5/2\}$$

naoko  $D(f) = (-\infty, 2)$

- **Riešenie:**

Označme  $\sqrt[3]{24+x} = a \wedge \sqrt{12-x} = b$ ; dostaneme tri rovnice s tromi neznámymi

$$a + b = 6 \wedge \sqrt[3]{24+x} = a \wedge \sqrt{12-x} = b$$

$$a + b = 6 \wedge 24 + x = a^3 \wedge 12 - x = b^2;$$

odtiaľ:  $b = 6 - a \wedge 36 = a^3 + b^3$ ;

$$36 = a^3 + (6 - a)^3$$

$$a(a+4)(a-3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$a = 0 \vee a = 3 \vee a = -4$$

Platí teda:  $x = -24 \vee x = -88 \vee x = 3$ ;

$$P = \{-24, -88, 3\}$$

- $2x - 5\sqrt{x} - 3 \geq 0$

Find Critical Points:

$$y = 2x - 5\sqrt{x} - 3$$

Type  $x$

Zero  $9,0$



• **Riešenie:**

Zavedieme substitúciu:

$$\sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2;$$

$$\text{Dostávame. } 2t^2 - 5t - 3 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(t-3)(t+0,5) \geq 0 \Leftrightarrow$$

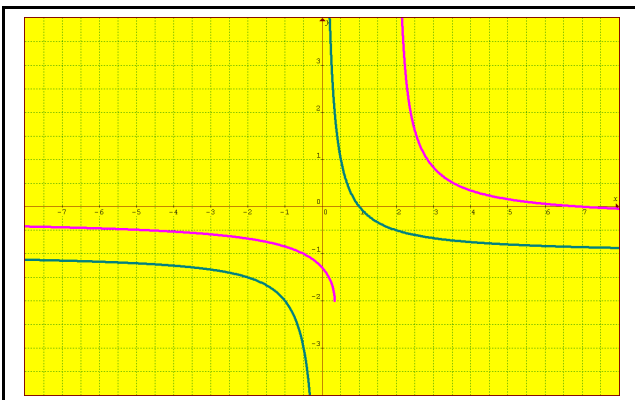
$t > 3$  a zároveň  $t \geq -0,5$  alebo

$t < 3$  a zároveň  $t \leq -0,5$ ;

Vzhľadom na  $D(f)$  nerovnice vyhovuje iba interval:

$P = (-\infty; 9]$ ; čo potvrdzuje aj grafické riešenie

- $\sqrt{\frac{3x-1}{x-2}} - 2 \wedge \frac{1}{x} < 1$



$$y = \sqrt{\frac{3x-1}{x-2}} - 2$$

Type  $x$

• **Riešenie:**

Grafický model v mnohom uľahčí riešenie; "pripomenie" študentom všetky podmienky, ktoré treba zobrať do úvahy;

$$x \neq 2; x \neq 0$$

$$\frac{3x-1}{x-2} \geq 0 \wedge \frac{3x-1}{x-2} \geq 4 \wedge \frac{1-x}{x} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{3x-1}{x-2} \geq 0 \wedge \frac{7-x}{x-2} \geq 0 \wedge \frac{1-x}{x} < 0 \Leftrightarrow$$

$$P = (2; 7)$$

<b>Zero 7,0</b>	
-----------------	--

Ob.8.3: Iracionálne rovnice a nerovnice riešené programom Graphmatica



Rovnice s parametrom patria k neštandardným úlohám. Pri ich riešení často nestačí len „napodobovanie“ riešiteľského postupu použitého pri podobných úlohách. Najväčším problémom býva porozumenie samotnej podstaty parametra. Jedna z metód, ako priblížiť žiakom funkciu parametra spočíva vo viacnásobnej konkretizácii a vytvorení grafických modelov, ktoré umožnia žiakom objaviť funkciu a zmysel parametra.

Úlohy, ktoré navrhujeme riešiť sú zamerané na elimináciu problémov žiakov správne rozhodnúť o počte riešení rovnice. Toto je problematické miesto v procese riešenia u mnohých žiakov, vyžaduje dobré a neformálne porozumenie problematiky. Grafické modely získané programom Graphmatica umožnia lepšiu percepciu súvislostí a hlbšie preniknutie do podstaty riešiteľských postupov, vďaka čomu študenti menej imitujú učiteľa a sú úspešnejší.

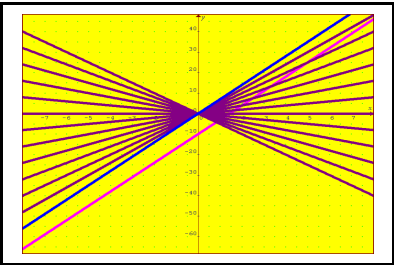
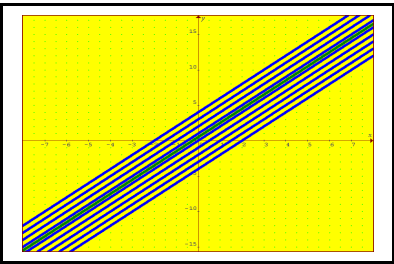
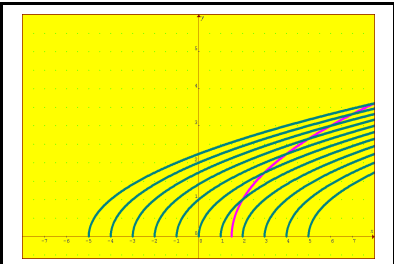
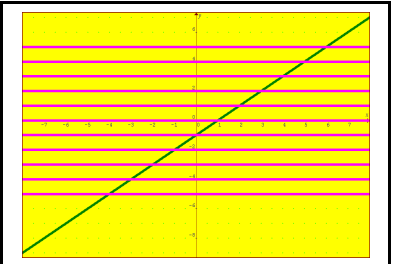
### PRÍKLAD 8.3

Pre ktoré hodnoty parametra  $c$  nemajú rovnice riešenie:

- $7x - 3 = 7 - cx$
- $c + 2x = (1 + 4x)/2$
- $\sqrt{2x - 3} = \sqrt{x + c}$
- $\frac{x^2 - x}{x} = x + c$

### RIEŠENIE

• $7x - 3 = 7 - cx$	<b>Riešenie:</b>
---------------------	------------------

	$7x-3 = 7-cx$ $7x+cx = 10$ $x(7+c) = 10$ $x = 10/(7+c) \Rightarrow$ <p><b>ak <math>c = -7</math> rovnica nemá riešenie</b></p> <p>Geometrická interpretácia:</p> <p><math>y_1 = 7x-10</math> (priamka - ružovou farbou)</p> <p><math>y_2 = -cx</math> c: -7,4,1 (zväzok priamok fialovej farby prechádzajúci bodom [0,0])</p> <p><math>y_3 = 7x</math>; <b>c= -7</b> (priamka vykreslená modrou farbou, je rovnobežná s <math>y_1</math>)</p>
<p>• <math>c+2x=(1+4x)/2</math></p> 	<p><b>Riešenie:</b></p> $c+2x=(1+4x)/2$ $2c+4x=1+4x$ $2c=1; \text{ ak } c=1/2 \text{ potom existuje nekonečne veľa riešení,}$ <p><b>ak <math>c \neq 1/2</math> rovnica nemá riešenie</b></p> <p>Geometrická interpretácia:</p> <p><math>y_1 = c+2x</math>; c: -3,3,1 (rovnobežné priamky)</p> <p><math>y_2 = (1+4x)/2</math> priamka rovnobežná s <math>y_1</math></p>
<p>• <math>\sqrt{2x-3} = \sqrt{x+c}</math></p> 	<p><b>Riešenie:</b></p> $\sqrt{2x-3} = \sqrt{x+c}$ $2x-3 = x+c$ $x = c+3 \wedge x \geq 3/2 \wedge x \geq -c \Rightarrow c \geq -3/2;$ <p><b>ak <math>c &lt; -3/2</math> rovnica nemá riešenie</b></p> <p>Geometrická interpretácia:</p> <p><math>y_1 = \sqrt{2x-3}</math> (ružová krivka)</p> <p><math>y_2 = \sqrt{x+c}</math> c: -5,7,1 množina modrých kriviek, z ktorých niektoré pretínajú <math>y_1</math> v závislosti od parametra c a iné nie, ak <math>c &lt; -3/2</math></p>
<p>• <math>\frac{x^2-x}{x} = c</math></p> 	<p><b>Riešenie:</b></p> $\frac{x^2-x}{x} = c \Rightarrow \frac{x(x-1)}{x} = c$ $(x-1) = c \Rightarrow x = c+1;$ <p><b>neexistuje také c, pre ktoré by bola množina riešení prázdna; <math>P = \emptyset</math></b></p> <p>Geometrická interpretácia:</p> <p><math>y_1 = \frac{x^2-x}{x}</math> (priamka - modrá farba)</p> <p><math>y_2 = c</math> (množina rovnobežných priamok -ružová)</p> <p>Vždy existuje priesečník priamky <math>y_1</math> s priamkami z množiny <math>y_2=c</math></p>

Obr.8.4:Rovnice s parametrom riešené programom Graphmatica



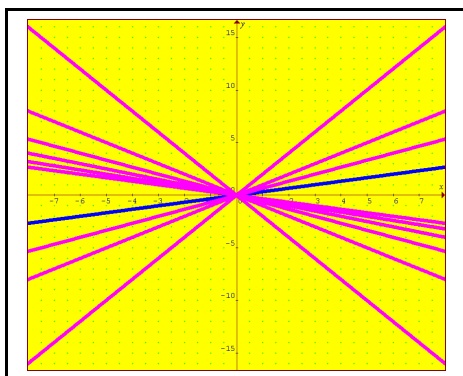
#### PRÍKLAD 8.4

Pre ktoré hodnoty parametra  $a$  majú rovnice nekonečne veľa riešení:

- $\frac{x}{3} = \frac{2x}{a}$
- $ax + 7 = 2(5+x)$

#### RIEŠENIE

- $\frac{x}{3} = \frac{2x}{a}$



**Riešenie:**

$$\frac{x}{3} = \frac{2x}{a} \Rightarrow ax = 6x$$

$$x(a - 6) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ alebo}$$

**ak  $a=6$  potom rovnica má nekonečne veľa riešení**

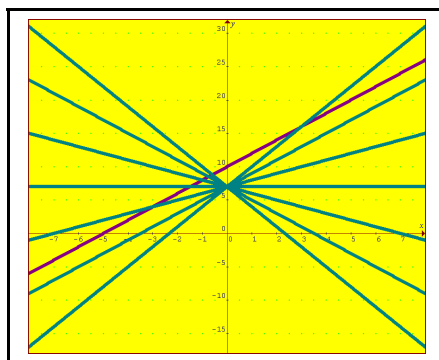
Geometrická interpretácia:

$y_1 = x/3$  (priamka - modrá farba)

$y_2 = 2x/a$  (zväzok priamok - ružová)

Priesečníkom priamok je vždy bod  $[0,0]$  okrem prípadu  $a=6$ ; priamky sú totožné.

- $ax + 7 = 2(5+x)$



**Riešenie:**

$$ax + 7 = 2(5+x) \Rightarrow x(a-2) = 3$$

$$x = 3/(a-2)$$

ak  $a = 2$  potom rovnica nemá riešenie

**neexistuje také  $a$ , aby mala rovnica nekonečne veľa riešení**

Geometrická interpretácia:

$y_1 = ax + 7$  (zväzok priamok v bode  $[0,7]$  - modrá farba)

$y_2 = 2(5+x)$  (červená priamka)

Nemôže nastať prípad, že  $y_1$  bude totožná s  $y_2$  čo je nutná podmienka, aby mala rovnica nekonečne veľa riešení.

Obr.8.5: Riešenie príkladu.8.4 programom Graphmatica