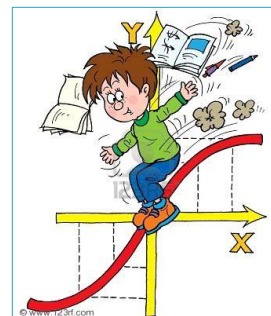




**Katedra matematiky,
FHV ŽU v Žiline**



**Školské stredisko záujmovej činnosti
v Považskej Bystrici**

Letná škola matematiky

Matematika sa počíta

Ždiar

júl 2012

Editor: PaedDr. Lýdia Kontrová, PhD.

*Uvedené podujatie a publikácia bola realizovaná v rámci grantového projektu KEGA
„Informačný vek modifikuje metódy a formy vyučovania matematiky“
(MŠVVaŠ SR KEGA 046 ŽU – 4/2011)*

Úvod

„Matematika je široká nádherná krajina, otvorená pre všetkých, ktorým myslenie prináša skutočnú radosť.“

W.Fuchs

Didaktický seminár *Letná škola matematiky – Matematika sa počíta* sa uskutočnil v rámci riešenia projektu **KEGA 046ŽU - 4/2011** „*Informačný vek modifikuje metódy a formy vyučovania matematiky*“. Cieľom projektu je predovšetkým prezentovať širokej zainteresovanej pedagogickej verejnosti dynamické, konštruktivistické, edukačné stratégie, ktoré využívajú pri vyučovaní školskej matematiky moderné počítačové technológie.

Realizácia projektu prebieha v troch etapách: od zhromažďovania relevantného materiálu a vytvorenia scenárov vyučovacích hodín pre vybrané témy školskej matematiky, cez ich pilotné overovania prostredníctvom otvorených hodín, až po finálny výstup projektu – publikovanie metodického a didaktického materiálu vo forme knižných publikácií.

Didaktický seminár *Letná škola matematiky*, realizovaný v dňoch 10. 7. 2012 – 18. 7. 2012, mal za cieľ prezentovať učiteľom matematiky scenáre vyučovacích hodín koncipované počas realizácie prvej etapy riešenia projektu a tiež následné získanie spätnej väzby od žiakov a študentov, ktorí aktívne participovali pri overovaní efektívnosti navrhnutých vyučovacích hodín.

Semináru sa zúčastnilo 21 učiteľov, ktorí sa v rámci viacerých workshopov hlbšie oboznámili s možnosťami využívania programu GeoGebra pri vyučovaní školskej matematiky. Na *Letnej škole matematiky* participovalo tiež 40 žiakov základných a stredných škôl z okresu Považská Bystrica a Žilina.

Zúčastnení žiaci ZŠ a študenti SŠ prejavili počas *Letnej školy* veľký záujem o predkladané aktivity. Aktívna spoluúčasť na objavovaní matematických pojmov príťažlivou formou, pomocou matematického softvéru GeoGebra, zvýšila ich vnútornú motiváciu a záujem o matematiku, ako vyplynulo z ankety s účastníkmi seminára. Tiež zúčastnení učitelia prejavili odhodlanie do budúcnosti skvalitniť svoju pedagogickú prácu implementovaním predstaveného matematického softvéru pri vyučovaní matematiky.

Predkladaný zborník prináša stručné informácie o uskutočnenom podujatí a metodický materiál, ktorý bol použitý pri realizácii otvorených hodín a workshopov organizovaných v rámci *Letnej školy matematiky*. Metodický materiál vznikol na základe uvádzaných zdrojov. Autorkou niektorých navrhovaných aktivít (Workshop 4 a 5) je jeho zostavovateľka ;PaedDr. Lýdia Kontrová, PhD.

Za organizačný výbor PaedDr. Lýdia Kontrová, PhD.

Program didaktického seminára

- 10.7.2012 **Otvorenie letnej školy. Registrácia účastníkov.**
- 11.7.2012 **Workshop 1: Objavujeme svet GeoGebry.**
- 11.7.2012 **Workshop 2: Prvé konštrukcie v GeoGebre.**
- 12.7.2012 **Workshop 3: GeoGebra nám pomáha porozumieť symetrickým zobrazeniam.**
- 13.7.2012 **Workshop 4: Matematika a svet okolo nás. (S GeoGebrou to ide ľahšie).**
- 14.7.2012 **Workshop 5: Konštruujeme si svoj vlastný kaleidoskop pomocou GeoGebry.**
- 14.7. 2012 **Workshop 6: Práca s obrázkami v programe GeoGebra.**
- 15.7.2012 **Edukačné stratégie vo vyučovaní matematiky s využitím didaktických hier - praktické cvičenie.**(deň plný matematických hier: origami, kocka soma, tangram, Hanojská veža, spoločenská didaktická hra Farmár, hry so zápalkami)
- 16.7.2012 **Workshop 7: Archimedesove mnohosteny veselo i vážne.**
- 17.7.2012 **Okrúhly stôl lektorov zúčastnených na letnej škole – vyhodnotenie výsledkov podujatia.**
18. 7. 2012 **Záver podujatia**

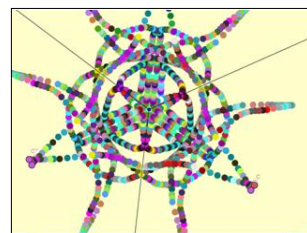
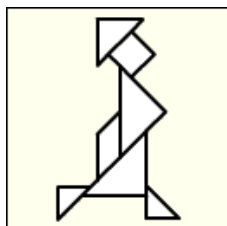
Organizačný výbor

PaedDr. Lýdia Kontrová, PhD. - predseda

RNDr. Zuzana Malacká, PhD.

Mgr. Viera Kuncová

Ing. Ivan Šuly



Workshop 1. Objavujeme svet GeoGebry

V rámci prvého workshopu, realizovaného dňa 11.7.2012 sa účastníci seminára zoznámili s pracovným prostredím programu GeoGebra a so základnými možnosťami jej využitia pri vyučovaní matematiky. Počas výkladu lektora aktívne participovali pri overovaní funkčnosti jednotlivých nástrojov programu na jednoduchých príkladoch.

GeoGebra je voľne šíriteľný matematický softvér, ktorý môžeme využívať v edukačnom procese od základných škôl až po univerzity. Spája v sebe geometriu, algebru a matematickú analýzu. GeoGebra ponúka pedagógom prostredie na tvorbu interaktívnych materiálov, pričom pre tieto materiály je charakteristické, že ku každému vyjadreniu v algebrickom okne programu je jednoznačne priradený jeden objekt v geometrickom okne a opačne.


1.1 Inštalovanie a spustenie softvéru

Softvér GeoGebra môžeme inštalovať nasledujúcim spôsobom:

- pri využití možnosti WebStart – inštalácia a štart GeoGebry na našom počítači; môžeme program využívať aj v režime offline (inštaláčny súbory pre žiakov, ktorí nemajú pripojenie na internet, sú k dispozícii na stránke <http://www.geogebra.org/cms/cs/installers>),
- ak využijeme možnosť AppletStart, otvorí sa v našom internetovom prehliadači plne funkčný aplet GeoGebry a do počítača sa nič nenainštaluje.

Podmienkou funkčnosti programu GeoGebra je mať v prehliadači alebo počítači nainštalovanú podporu prostredia Java.

Softvér GeoGebra spustíme jednou z nasledujúcich možností:

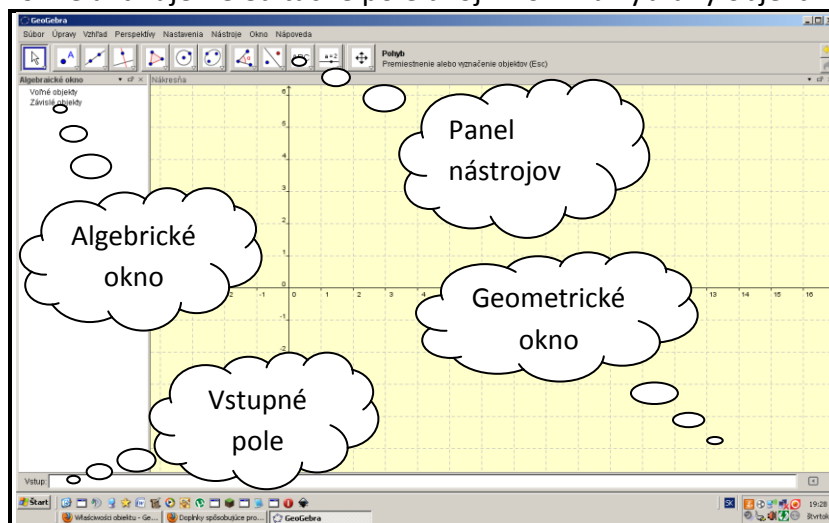
- dvojitým kliknutím na ikonu programu umiestnenú na ploche počítača ,
- postupnosťou príkazov Štart → Programy → GeoGebra.

1.2 Pracovné prostredie programu GeoGebra

Po spustení softvéru sa na monitore počítača objaví hlavné pracovné okno programu (obr. 1). V uvedenom prostredí môžeme konštruovať objekty dvoma spôsobmi:

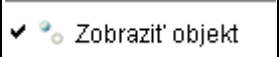
- pomocou *Panelu nástrojov*,
- pomocou *Vstupného poľa* - zadávaním príkazov do príkazového riadka.

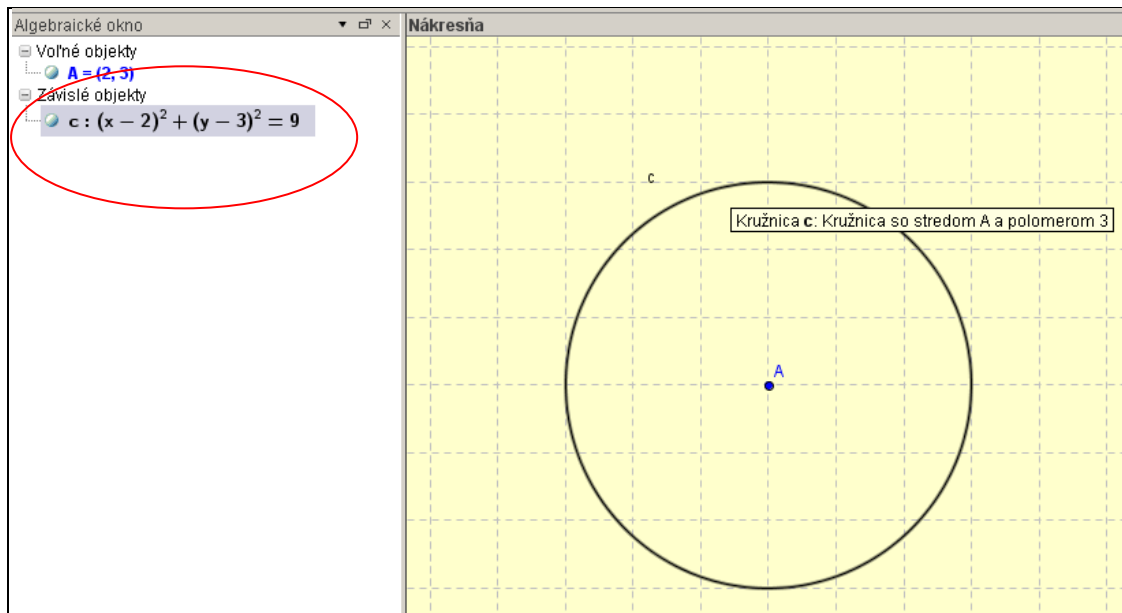
V algebrickom okne aktivujeme editačné pole dvojklikom na vybraný objekt.



Obr. 1. Pracovné prostredie programu GeoGebra

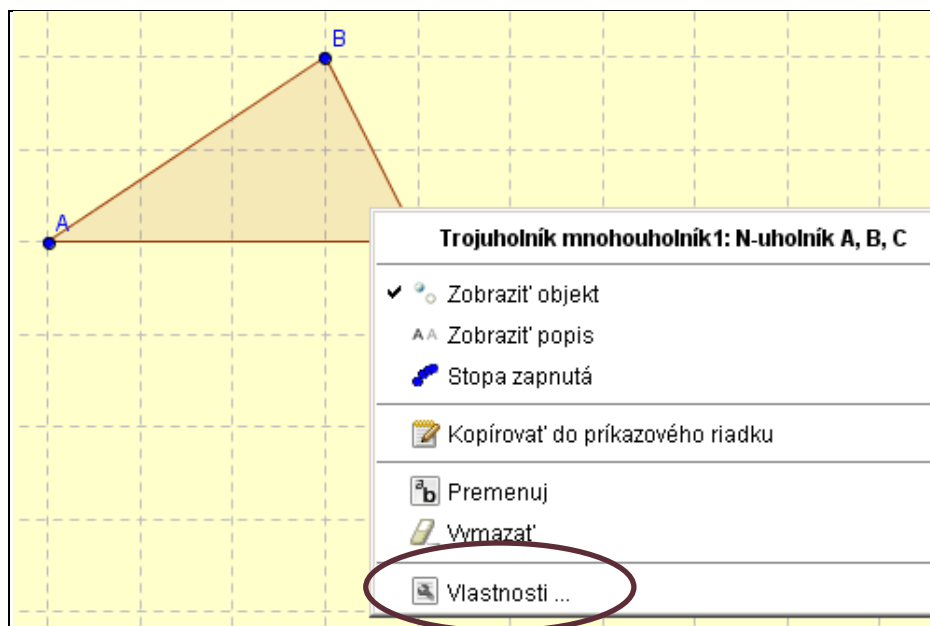
Na spôsobe zadávania objektov vo všeobecnosti nezáleží. Objekt je vždy zobrazený v geometrickom okne (nákrešni) a zapísaný do algebraického okna. Na obrázku 2 vidíme situácia po zadaní kružnice c s polomerom $r = 3\text{cm}$. Objekty v geometrickom okne môžeme

skrýť, ak v kontextovom menu aktivujeme (deaktivujeme) položku . Algebraické okno môžeme zatvoriť. V algebraickom okne aktivujeme editačné pole dvojklikom na vybraný objekt. Pri prechádzaní myšou ponad objekt v geometrickom, prípadne algebraickom okne sa zobrazí jeho popis (obr. 2).

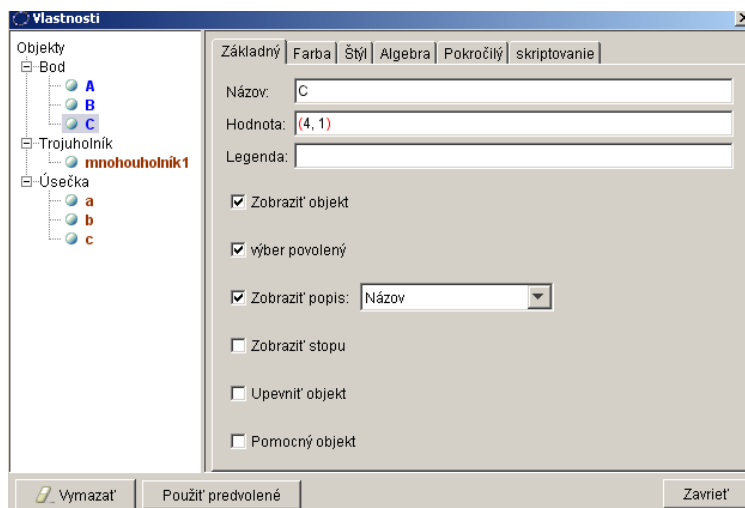


Obr. 2. Popis objektu pri prechádzaní myšou ponad objekt


Po kliknutí na objekt pravým tlačidlom myši sa zobrazí *Kontextová ponuka* prislúchajúca k danému objektu (obr.3). Pri voľbe položky *Vlastnosti* otvoríme dialógové okno s možnosťou meniť *názov objektu, farbu, veľkosť, hrúbku čiary, štýl a výplň objektu* (obr. 4).

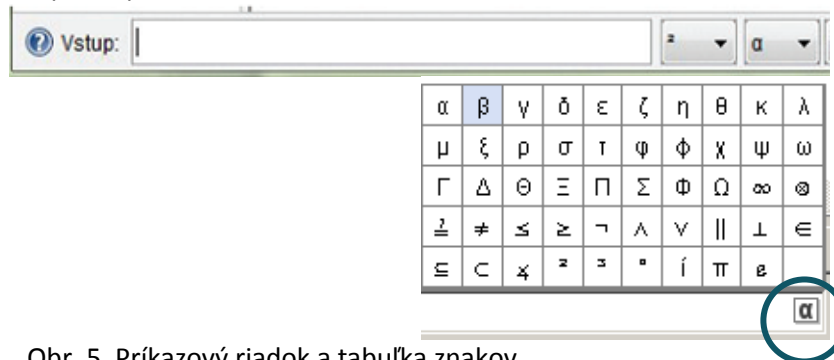


Obr. 3. Rozbalená Kontextová ponuka


Obr. 4. Rozbalená položka *Vlastnosti*

1.3 Príkazový riadok

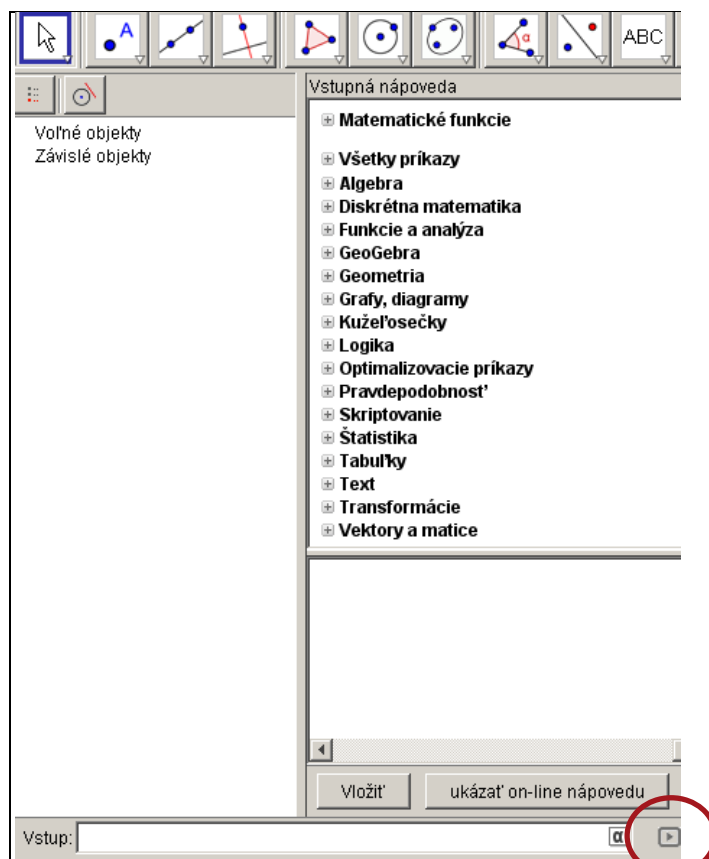
V prostredí programu GeoGebra môžeme objekty konštruovať pomocou *Panelu nástrojov* ale tiež zadávaním príkazov do *Príkazového riadku*, ktorý je umiestnený v spodnej časti hlavného okna programu s označením *Vstup*. Pomocou priameho vstupu môžeme realizovať numerické výpočty, riešiť rovnice a nerovnice, upravovať algebrické výrazy, atď. Pri zadávaní potrebných príkazov a funkcií môžeme využiť tabuľku symbolov, ktorá sa zobrazí po kliknutí na znak  (obr.5).



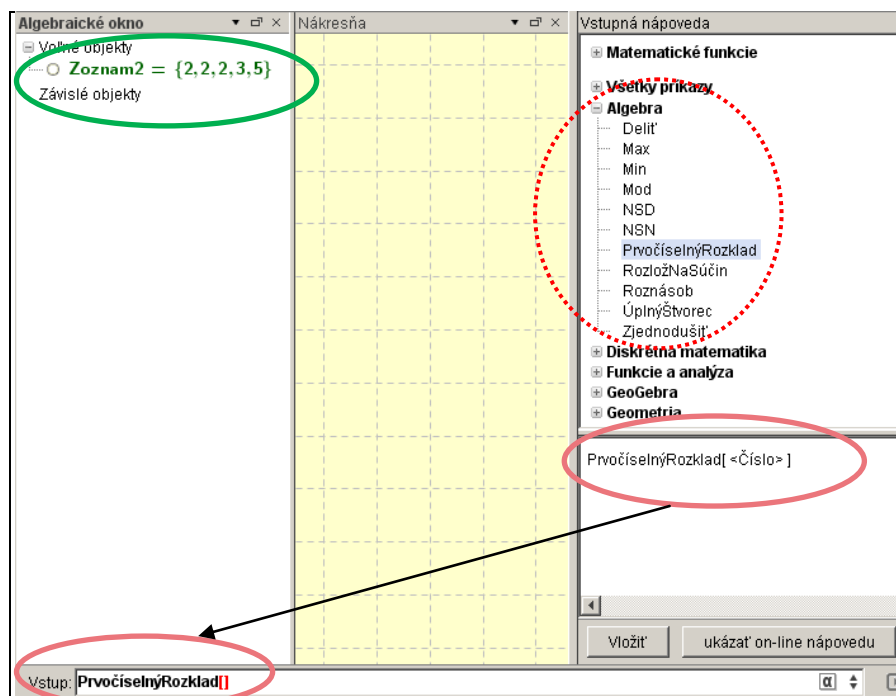
Obr. 5. Príkazový riadok a tabuľka znakov

Program GeoGebra umožňuje využívať veľkú škálu príkazov a matematických funkcií, prístupných prostredníctvom *Vstupnej nápovedy*, ktorá sa aktivuje stlačením tlačidla  na spodnej časti hlavného okna programu (obr.6). Kliknutím sa každá z položiek rozbalí a následným kliknutím na vybraný príkaz získame jeho popis. (Napríklad v prípade rozkladu čísla na prvočinitele získame popis **PrvočíselnýRozklad[<Číslo>]**. Ak využijeme dvojklik ľavým tlačidlom myši na vybraný príkaz (funkciu), táto sa nám vloží priamo do vstupného poľa a po následnom dosadení za premenné a stlačení tlačidla *Enter* získame požadovaný výsledok.

Na obrázku 7 je znázornený postup pri určovaní rozkladu čísla 120 na prvočinitele s použitím takejto následnosti krokov:
Vstupná nápoveda → *Algebra* → *PrvočíselnýRozklad[]* → *PrvočíselnýRozklad [120]* → *Enter*.
 Výsledok sa zobrazí v algebrickom okne programu ako $Zoznam2 = \{2,2,2,3,5\}$.



Obr. 6. Vstupná nápoveda



Obr. 7. Použitie vstupnej nápovedy pri riešení príkladu

1.4 Panel nástrojov

Najjednoduchšie konštruovanie objektov v programe GeoGebra je prostredníctvom *Panelu nástrojov*, ktorý pozostáva z 11 ikoniek nástrojov (obr. 8). Názov aktívneho nástroja sa zvýrazní na pravej strane panela nástrojov (obr. 8), aktívny nástroj je zvýraznený modrým olemovaním. Na prehľadné označenie skupín nástrojov, ktoré budeme v ďalšom texte popisovať, použijeme označenie číslami od 1 po 11.




Obr. 8. Panel nástrojov

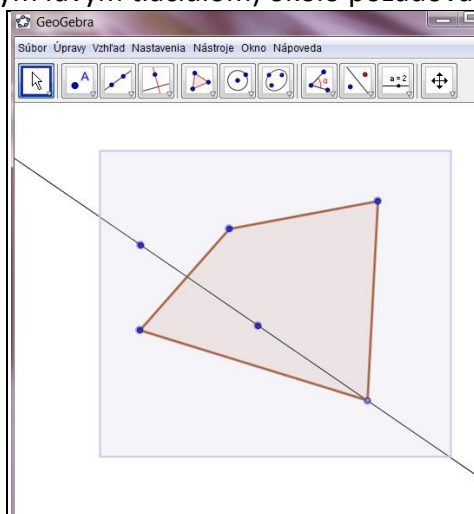
Každý nástroj na *Panelu nástrojov* obsahuje v pravom dolnom rohu malý trojuholníček. Po jeho potvrdení sa rozbalí ponuka ďalších nástrojov z príslušnej skupiny. Na obrázku 9 vidíme rozbalený nástroj 1 – *Pohyb* (*Premiestnenie alebo vyznačenie objektov*).




Obr. 9. Rozbalená skupina nástrojov 1 – *Pohyb*


1.4.1 Nástroje skupiny 1 - *Pohyb*

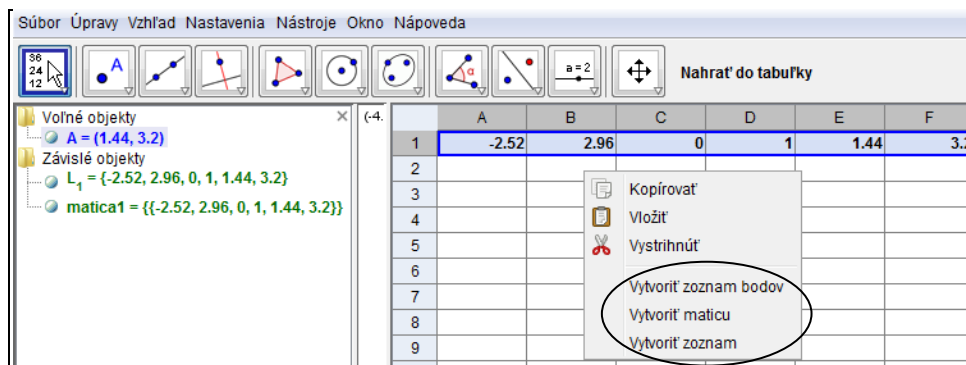
Pomocou nástroja  *Pohyb* vyberáme objekt, ktorý následne presúvame myškou, prípadne pomocou smerových kláves. Vybraný objekt môžeme pomocou klávesy *Delete* odstrániť. Viac objektov vyberáme (odstraňujeme) vytvorením aktívneho rámčeka (pohybom myšky so stlačeným ľavým tlačidlom) okolo požadovaných objektov (obr. 10).



Obr.10. Odstraňovanie viacerých objektov vytvorením aktívneho rámčeka

Nástroj  *Otočiť okolo bodu* nám umožňuje otáčať vybraný voľný bod okolo vopred zvoleného stredu.

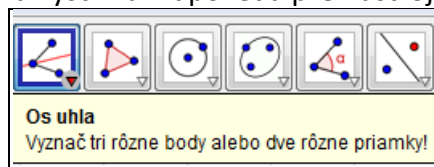
Nástroj  *Nahrať do tabuľky* umožňuje zaznamenať zmenu súradníc bodu, ktorý premiestňujeme v súradnicovom systéme. Po vybratí nástroja potvrdíme bod, následne ho uchopíme pravým tlačidlom myši a po premiestnení znova potvrdíme. Súradnice sa zapíšu do tabuľky, ktorú aktivujeme zaškrtnutím položky *Tabuľka* v menu *Vzhľad*. Zo zapísaných súradníc môžeme vytvoriť *Zoznam* alebo *Maticu* (pravé tlačidlo myši na vyznačenú oblasť), ktoré sa zobrazia v algebraickom okne ako závislé objekty, napr. L_1 alebo *matica1* (obr.11).



Obr.11. Použitie príkazu *Nahrať do tabuľky*

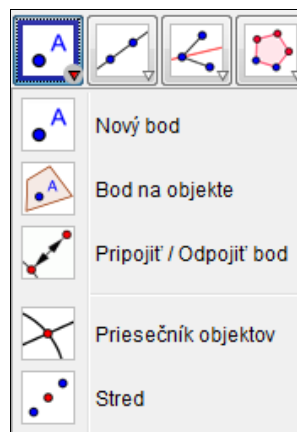
1.4.2 Nástroje skupiny 2 - Body

Pri vytváraní nových objektov prostredníctvom panelu nástrojov väčšinou pracujeme tak, že si vybereme rysovací nástroj a následne klikneme myšou na plochu (*Nákresňu*). Dobrou pomôckou je nápoveda, ktorá sa zobrazí v momente, keď sa myškou priblížime k vybranému nástroju. Na obrázku 12 vidíme ako sa vybraný nástroj podsvieti modrým rámčekom a objaví sa stručná a výstižná nápoveda pre nástroj *Os uhla*.




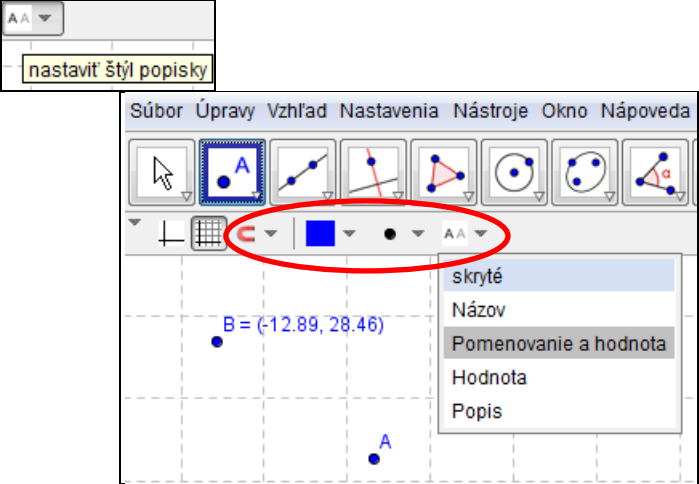

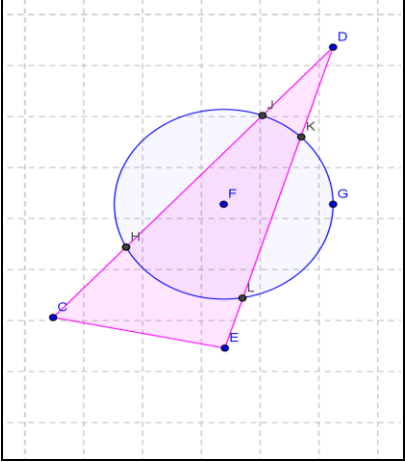

Obr.12. Nápoveda

Druhú skupinu nástrojov zastrešuje nástroj *Nový bod*. Po jeho rozbalení dostávame nasledujúce nástroje (obr.13).


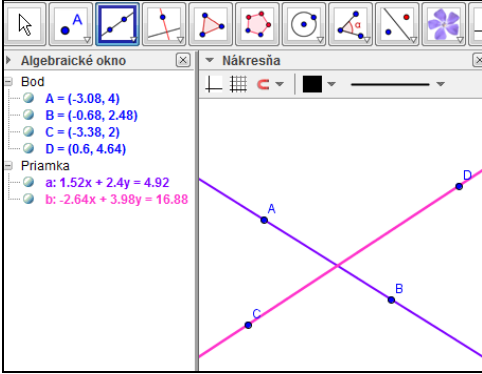

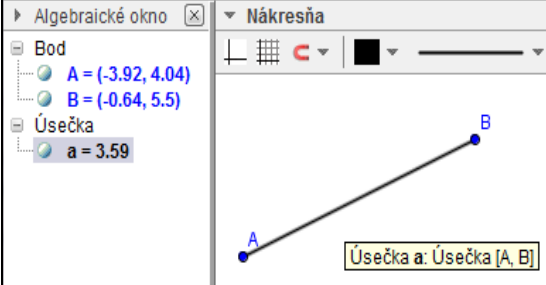





Obr.13. Nástroje skupiny 2

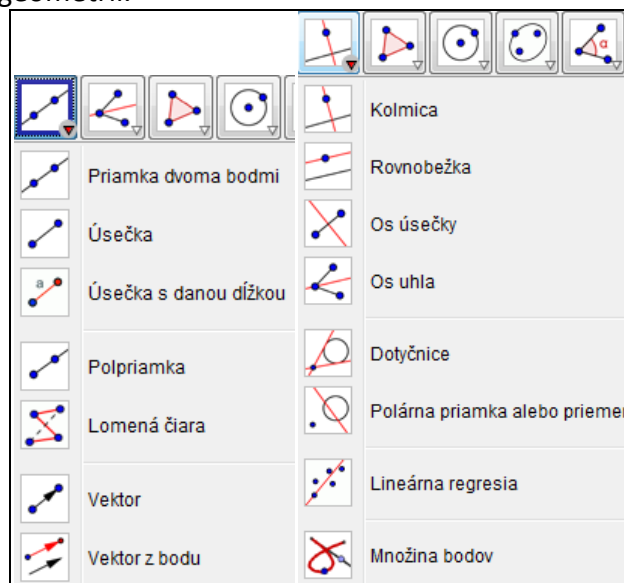
Bližšie popíšeme tie z nich, ktoré najvic využijeme pri realizácii našich ďalších aktivít.

Názov		Popis
<p>Nový bod</p>		<p>Nástroj <i>Nový bod</i> vytvorí nový bod na nákresni v mieste kliknutia ľavým tlačidlom myši. V algebraickom okne sa zobrazia súradnice bodu A. Implicitne sú body označované veľkými písmenami abecedy, bodkou a majú modrú farbu. Nastaviť štýl bodu a popisky môžeme prostredníctvom rýchleho prístupu cez lištu nástrojov</p>  <p>Obr.14. Nastavenie štýlu popisky bodu A</p>
<p>Priesečník dvoch objektov</p>		<p>Nástrojom <i>Priesečník objektov</i> konštruujeme priesečníky objektov dvoma spôsobmi:</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ kliknutím na dva objekty, ➤ kliknutím na spoločný bod objektov. <p>Priesečníky objektov sú implicitne označované čiernou farbou (obr. 15).</p>  <p>Obr.15. Určovanie priesečníkov viacerých objektov</p>
<p>Stred</p>		<p>Nástrojom <i>Stred</i> (kliknutím na príslušné útvary) zostrojíme:</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ stred dvoch bodov, ➤ stred úsečky, ➤ stred kuželosečky.

1.4.3 Nástroje skupiny 3 - Priamky a úsečky

Názov		Popis
<p>Priamka dvoma bodmi</p>		<p>Po vybraní nástroja <i>Priamka dvoma bodmi</i> klikneme na dve rôzne miesta nákresne. Rovnica danej priamky sa zobrazí v algebraickom okne (obr.16).</p>  <p>Obr. 16. Priamka daná dvoma bodmi</p>
<p>Úsečka</p>		<p>Úsečku zostrojíme po aktivovaní nástroja <i>Úsečka</i> potvrdením dvoch bodov. Po priblížení kurzora k úsečke zobrazíme základné údaje o danom objekte. V algebraickom okne v časti <i>Závislé objekty</i> sa zobrazí informácia o pomenovaní a dĺžke úsečky (obr. 17).</p>  <p>Obr.17. Úsečka daná dvoma bodmi</p>
<p>Úsečka danej dĺžky z bodu</p>		<p>Po aktivovaní nástroja <i>Úsečka danej dĺžky z bodu</i> vyznačíme na nákresni bod a do otvoreného dialógového okna zadáme dĺžku úsečky (pri zápise desatinného čísla používame desatinnú bodku). Celú úsečku premiestňujeme zmenou polohy krajného bodu, ktorý sme na nákresňu umiestnili ako prvý. Premiestňovaním druhého krajného bodu úsečku otáčame.</p>
<p>Lomená čiara</p>		<p>Po aktivovaní nástroja <i>Lomená čiara</i> vyznačíme postupne na nákresni všetky body lomenej čiary a potom ešte raz prvý bod. V algebraickom okne sa zobrazí informácia o pomenovaní a dĺžke lomenej čiary.</p>
<p>Vektor</p>		<p>Pri aktivovanom nástroji <i>Vektor</i> umiestňujeme na nákresňu jeho počiatkový a koncový bod. V algebraickom okne sa zobrazí informácia o súradniciach koncových bodov a o závislom objekte – vektore.</p>

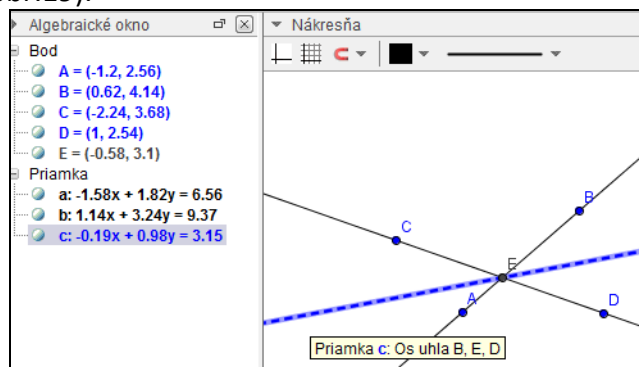
Na obrázku 18 sú rozbalené kompletne ponuky nástrojov 3 a 4, určených na rysovanie priamok, úsečiek a ďalších užitočných priamok, ktoré využívame pri riešení konštrukčných úloh v geometrii.




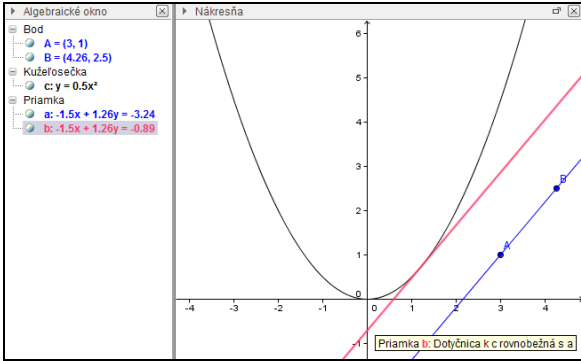

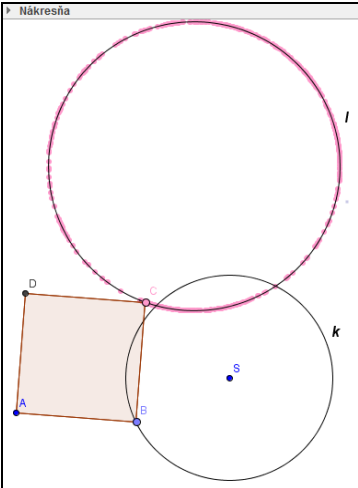
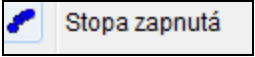
Obr.18. Nástroje skupiny 3 a 4

1.4.4 Nástroje skupiny 4 - Ďalšie užitočné priamky

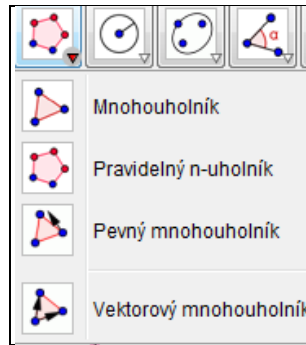
Názov		Popis
Kolmica		Potvrdením bodu A a priamky p zostrojíme pomocou nástroja <i>Kolmica</i> priamku prechádzajúcu bodom A kolmú na priamku p .
Rovnobežka		Potvrdením bodu A a priamky p zostrojíme pomocou nástroja <i>Rovnobežka</i> priamku prechádzajúcu bodom A rovnobežne s priamkou p .
Os úsečky		Os úsečky zostrojíme pomocou nástroja <i>Os úsečky</i> po potvrdení úsečky, prípadne jej krajných bodov.
Os uhla		Potvrdením dvoch priamok (úsečiek, polpriamok) pri aktívnom nástroji <i>Os uhla</i> zobrazíme osi uhlov tvorené týmito priamkami (úsečkami, polpriamkami). Potvrdením troch bodov, (vrchol uhla a body na ramenách uhla) zobrazíme os ostrého uhla. V algebraickom okne programu sa ukáže rovnica príslušnej osi uhla (obr.19).



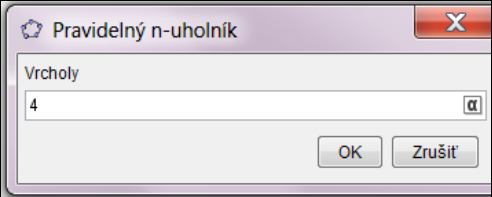
Obr. 19. Konštrukcia osi uhla

<p>Dotyčnica</p>		<p>Nástrojom <i>Dotyčnica</i> zostrojíme dotyčnicu ku kružnici, kužeľosečke, prípadne funkcii. Klikneme buď:</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ na bod a kužeľosečku (prípadne funkciu), ➤ priamku a kužeľosečku (funkciu) – v tomto prípade sa zobrazí dotyčnica rovnobežná s danou priamkou (obr.20).  <p>Obr.20. Dotyčnica rovnobežná s danou priamkou</p>
<p>Množina bodov</p>		<p>Geometrické miesto bodov daných vlastností zostrojíme po aktivovaní nástroja <i>Množina bodov</i> potvrdením bodu umiestneného na útvere (bod sa po útvere voľne pohybuje) a bodu, ktorý je na ňom závislý.</p> <p>Na obrázku 21 vidíme riešenie úlohy: <i>Určte množinu vrcholov C všetkých štvorcov ABCD, ktoré majú spoločný vrchol A a vrchol B leží na danej kružnici k.</i> Vybrali sme nástroj <i>Množina bodov</i> a potvrdili bod B a následne bod C, ktorý je na ňom závislý. Výsledkom je kružnica <i>l</i>.</p>  <p>Obr. 21. Geometrické miesto bodov</p> <p>Pri riešení úloh tohto typu môžeme využiť aj nástroj</p>  <p>Ak v <i>Kontextovej ponuke</i> k bodu C zvolíme možnosť <i>Stopa zapnutá</i> a následne posúvame bod B po kružnici <i>k</i>, potom bod C, závislý na bode B, zanecháva postupne „stopy“ (zobrazuje sa trasa pohybu objektu), ktoré vytvoria kružnicu <i>l</i>.</p>

1.4.5 Nástroje skupiny 5 - Mnohouholníky

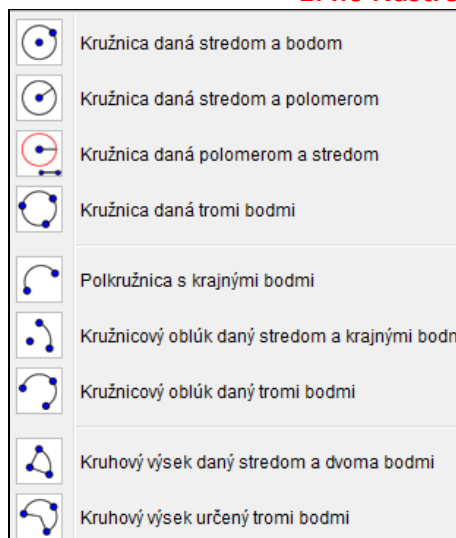


Obr.22. Všetky nástroje skupiny 5

Názov		Popis
N - uholník		Po aktivovaní nástroja <i>N – uholník</i> umiestnime na plochu nákrse najmeň tri body. <i>N – uholník</i> uzavrieme opätovným kliknutím na prvý vrchol. Pomenovanie objektu a jeho obsah sú zapísané v algebrickom okne.
Pravidelný n - uholník		Pravidelný <i>n – uholník</i> zostrojíme po aktivovaní príslušného nástroja umiestnením dvoch susedných vrcholov na plochu nákrse a zadaním počtu vrcholov do dialógového okna (obr.23). 
Pevný n - uholník		Postupne vyznačíme vrcholy mnohouholníka a potom klikneme ešte raz na prvý vrchol; alebo stačí kliknúť na zostrojený mnohouholník, aby sa stal pevnou kópiou. Pevný mnohouholník pohybujeme po nákrse uchopením za jeho v poradí prvý vyznačený vrchol a otáčame ho uchopením za jeho v poradí druhý vyznačený vrchol.







Obr.23. Dialógové okno – pravidelný 4 - uholník

1.4.6 Nástroje skupiny 6 - Kružnica, kruh



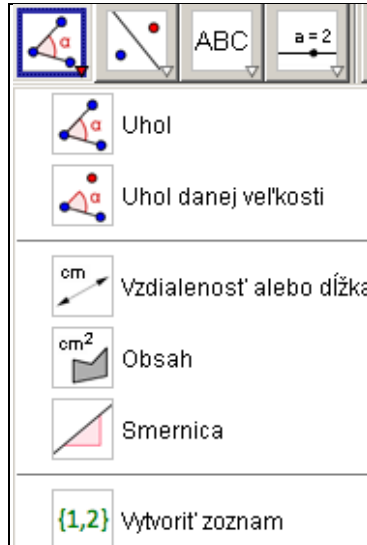
Obr.24. Nástroje skupiny 5 – Kružnica, kruh

Široká ponuka nástrojov tejto skupiny sa využíva veľmi jednoducho prostredníctvom nápovedy. Uvedieme preto bližší popis iba niektorých z nich.


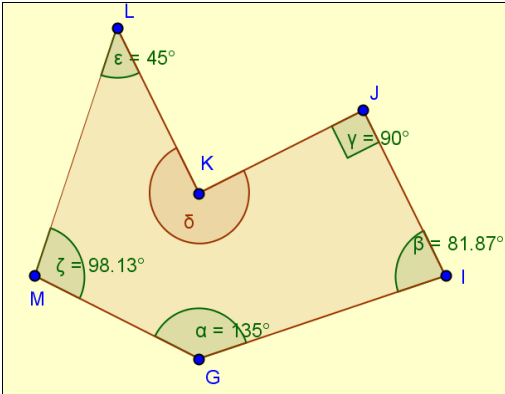
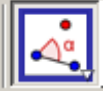
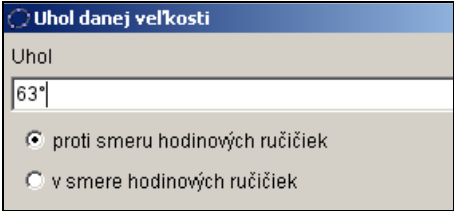
Názov		Popis
Kružnica daná stredom a bodom		Po aktivovaní nástroja Kružnica daná stredom a bodom umiestnime na plochu nákrse stred kružnice a bod, ktorým má kružnica prechádzať.
Kružnica daná stredom a polomerom		<p>Pomocou nástroja Kružnica daná stredom a polomerom zostrojíme kružnicu, ktorej polomer zapisujeme po umiestnení stredu kružnice do dialógového okna (obr.25).</p> <div data-bbox="676 602 1299 804" data-label="Image"> </div> <p>Obr. 25. Dialógové okno pre zadávanie polomeru kružnice</p> <p>Polomer takto zostrojenej kružnice nemôžeme meniť v geometrickom okne, ale iba prostredníctvom Kontextového menu danej kružnice cez <i>Vlastnosti</i> → <i>Základný</i> → <i>Definícia</i> (obr.26).</p> <div data-bbox="628 1001 1347 1453" data-label="Image"> </div> <p>Obr.26. Definovanie vlastností zadanej kružnice</p>
Kružnica daná tromi bodmi		Kružnicu môžeme zostrojiť aj pomocou nástroja <i>Kružnica daná tromi bodmi</i> umiestnením troch bodov na nákrseňu.
Kružnicový oblúk daný tromi bodmi		Umietnením troch bodov do nákrse pomocou nástroja <i>Kružnicový oblúk daný tromi bodmi</i> zostrojíme uvedený objekt, pričom prvý a tretí bod sú krajnými bodmi oblúka a druhý leží na kružnicovom oblúku.
Kruhový výsek určený tromi bodmi		Kruhový výsek môžeme zostrojiť pomocou nástroja <i>Kruhový výsek určený tromi bodmi</i> umiestnením troch bodov na odvodovú kružnicu.
Kruhový výsek daný stredom a dvomi bodmi		Pri aktivovaní nástroja <i>Kruhový výsek daný stredom a dvomi bodmi</i> umiestňujeme do nákrse najprv stred a potom jeden krajný bod kruhového výseku, ďalší bod nemusí ležať na oblúku.


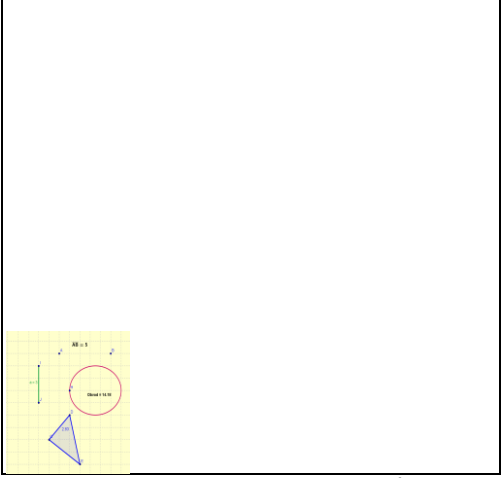

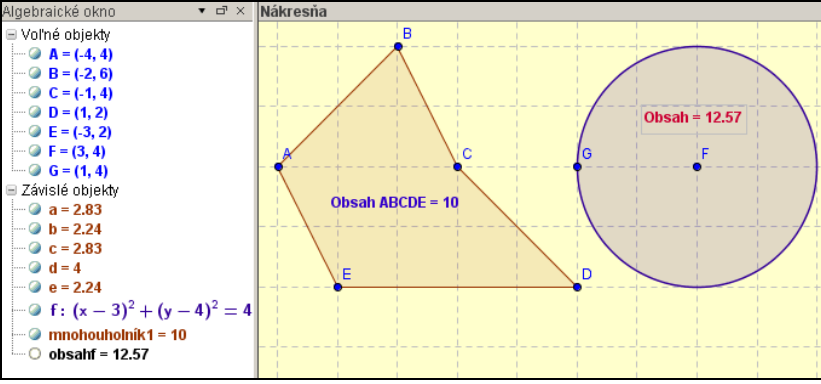

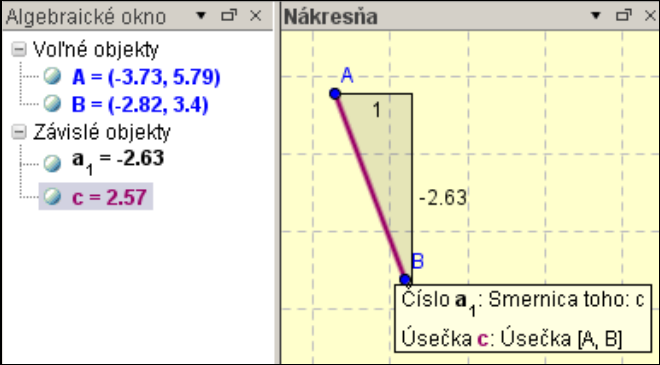
1.4.7 Nástroje skupiny 8 - Uhly, vzdialenosti, obsahy

Nástroje tejto skupiny (obr.27), využijeme predovšetkým pri zostrojovaní uhlov danej veľkosti, určovaní obsahov, obvodov, dĺžok alebo vzdialeností geometrických útvarov.



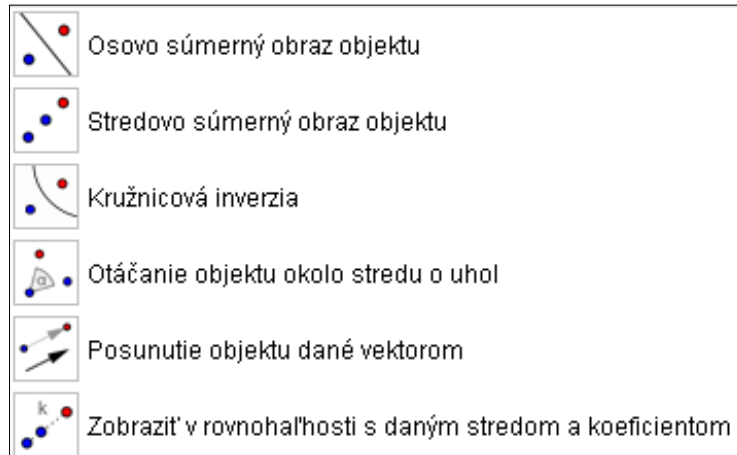
Obr.27. Nástroje skupiny 8

Názov		Popis
Uhol		<p>Uhol zostrojíme rovnomenným nástrojom umiestnením troch rôznych bodov do nákrrese, prípadne potvrdením dvoch rôznych priamok. Ak po aktivovaní nástroja <i>Uhol</i> potvrdíme mnohoúhelník, zobrazíme jeho vnútorné uhly (obr.28).</p>  <p>Obr. 28. Zobrazenie vnútorných uhlov šesťuholníka GIJKLM.</p>
Uhol danej veľkosti		<p>Pri aktivovaní nástroja <i>Uhol danej veľkosti</i> umiestnime do nákrrese najprv bod na ramene uhla a vrchol uhla, potom v dialógovom okne zadáme veľkosť uhla a jeho orientáciu (obr.29).</p>  <p>Obr.29. Uhol danej veľkosti</p>

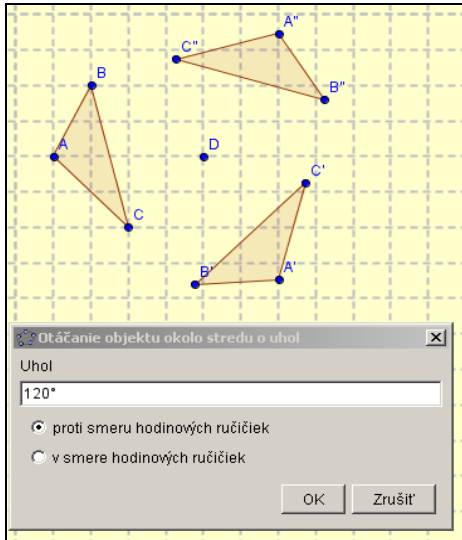
<p>Vzdialenosť alebo dĺžka</p>		<p>Po aktivovaní nástroja <i>Vzdialenosť</i> alebo <i>dĺžka</i> vyznačíme dva body, prípadne úsečku, mnohoúholník alebo kužeľosečku (obr.30).</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>Obr.30. Vzďialenosť alebo dĺžka</p>
<p>Obsah</p>		<p>Informáciu o obsahu zobrazíme aktivovaním nástroja <i>Obsah</i> a aktivovaním mnohoúholníka, kružnice alebo elipsy. V geometrickom okne sa zobrazí text a hodnota obsahu príslušného mnohoúholníka. V algebraickom okne tiež registrujeme tento údaj v tvare „<i>mnohouholník1 = hodnota</i>“, respektíve „<i>obsahf = hodnota</i>“ (obr. 31).</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>Obr. 31. Obsah mnohoúholníka</p>
<p>Smernica</p>		<p>Pomocou nástroja <i>Smernica</i> môžeme po potvrdení priamky, polpriamky alebo úsečky zobraziť hodnotu strmosti daného objektu (obr.32).</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>Obr. 32. Smernica úsečky AB</p>

1.4.8 Nástroje skupiny 9 - Geometrické transformácie


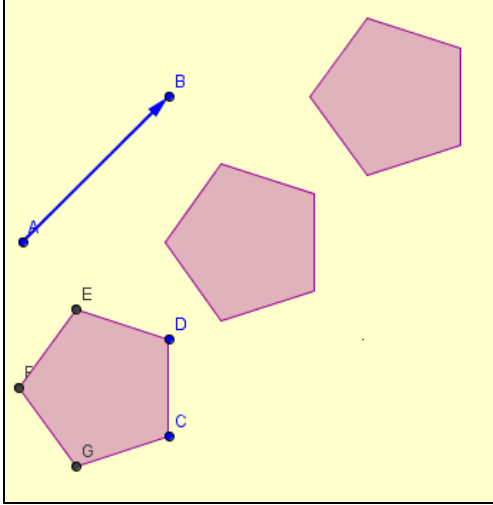
GeoGebra ponúka v tejto skupine (obr.33) nástroje na konštrukciu objektov pomocou podobných a zhodných zobrazení. Časť uvedených nástrojov môžeme tiež využiť pri riešení konštrukčných úloh.



Obr. 33. Nástroje skupiny 9

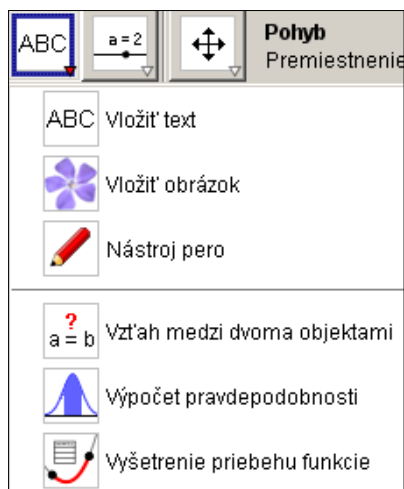
Názov		Popis
Osovo súmerný obraz objektu		<i>Osovo súmerne združený obraz objektu</i> zobrazíme aktivovaním objektu a osi súmernosti.
Stredovo súmerný obraz		Po aktivovaní nástroja <i>Stredovo súmerný obraz objektu</i> najprv aktivujeme objekt, ktorého obraz chceme v stredovej súmernosti zostrojiť, potom klikneme na stred súmernosti.
Kružnicová inverzia		Ak potrebujeme zobraziť obraz bodu v kružnicovej inverzii, aktivujeme príslušný nástroj, bod a určujúcu kružnicu.
Otáčanie objektu okolo stredu o uhol		Potvrdením objektu a stredu otáčania pri aktivovanom nástroji <i>Otáčanie objektu okolo stredu o uhol</i> zobrazíme dialógové okno, v ktorom zadáme hodnotu uhlu otáčania a jeho smer (obr. 34). <div style="text-align: center;">  </div>

Obr. 34. Otočenie trojuholníka ABC okolo stredu D o uhol 120°


<p>Posunutie objektu dané vektorom</p>		<p>Pri konštrukcii objektu pomocou nástroja <i>Posunutie objektu dané vektorom</i> aktivujeme najskôr daný objekt a následne vektor posunutia (obr. 35).</p>  <p>Obr. 35. Posunutie pravidelného päťuholníka BCDEF v smere vektora AB</p>
---	---	---

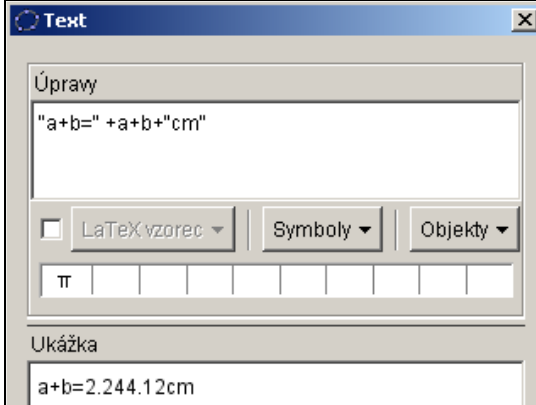
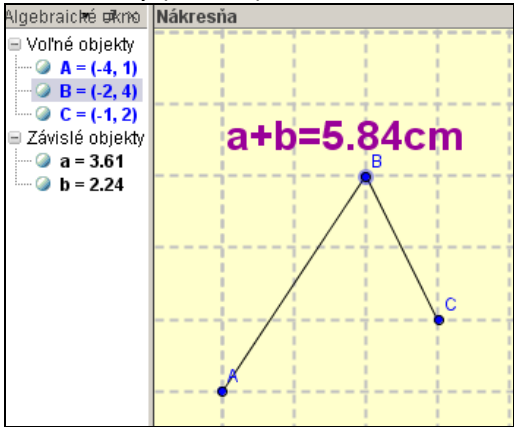

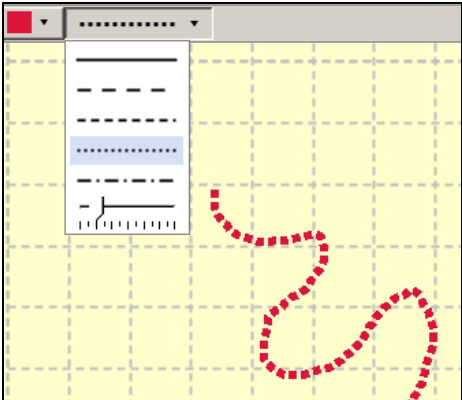
1.4.9 Nástroje skupiny 10 - Geometrické transformácie

V tejto skupine nájdeme ďalšie užitočné nástroje, ktoré umožňujú realizovať viaceré špeciálne činnosti ako sú: textový popis konštrukcie, vkladanie obrázkov, zisťovanie vzťahu medzi dvoma objektmi, či vyšetovanie priebehu funkcie (obr. 36). Funkciu nástroja *Vložiť obrázok* podrobne rozoberieme pri realizácii aktivity 10.



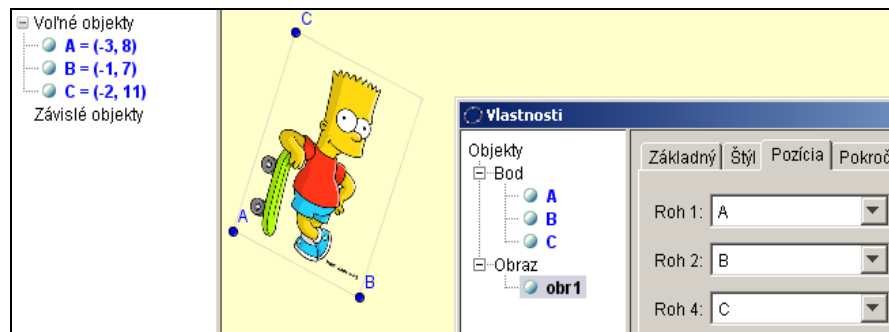
Obr. 36. Nástroje skupiny 10.

<i>Názov</i>		<i>Popis</i>
Vložiť text		<p>Kliknutím na nákrresňu pri aktivovanom nástroji <i>Vložiť text</i> sa objaví dialógové okno <i>Text</i>, prostredníctvom ktorého vkladáme požadované informácie (obr. 37). Využiť tiež môžeme popis v jazyku <i>LaTeX</i>, ktorý umožňuje zobrazenie matematických textov na profesionálnej úrovni.</p>

		 <p>Obr. 37. Dialógové okno Text</p> <p><i>Ukážka 1.</i> Ak chceme pri zmene dĺžok úsečiek a, b zaznamenať ako sa mení číselná hodnota prislúchajúca ich súčtu $a + b$, text zadáme do dialógového okna v tvare "a + b = " + a + b + "cm".</p> <p>Znaky, ktoré v zadanom texte oddelíme úvodzovkami sa zobrazia nezmenené. Premenným, ktoré sú umiestnené medzi znakmi + sa priradia aktuálne hodnoty (obr.37).</p>  <p>Obr. 37. Popis konštrukcie</p> <p>Uvedený text upravujeme v dialógovom okne <i>Vlastnosti</i> → <i>Text</i>. Polohu textu na nákrēsni môžeme upevniť cez <i>Vlastnosti</i> → <i>Základný</i> → <i>Upevniť objekt</i>.</p>
<p>Pero</p> 		<p>Aktivovaním nástroja <i>Pero</i> pri zvolenej farbe a štýle čiary vkladáme na nákrēsňu ľubovoľné tvary (obr. 38).</p>  <p>Obr. 38. Využitie nástroja <i>Pero</i></p>

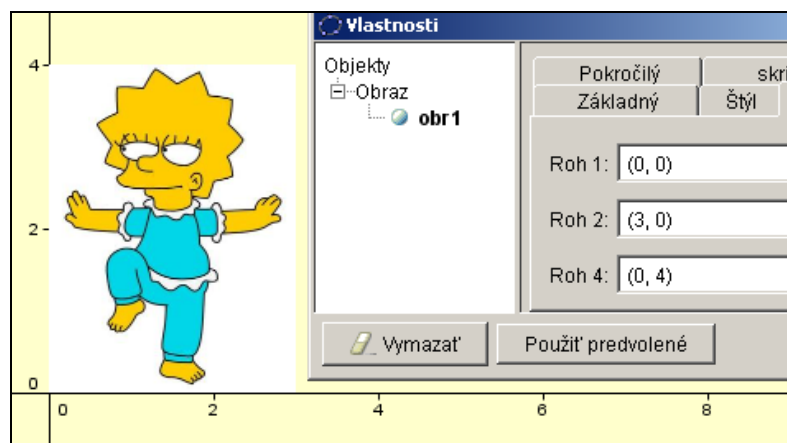
**Vložiť
obrázok**

Obrázok vkladáme pri aktivovaní nástroja *Vložiť obrázok* a kliknutí na pracovnú plochu. Obrázok, s ktorým chceme pracovať musíme mať už uložený v počítači. Obrázky môžeme spriehľadniť cez: *Vlastnosti* → *Štýl* → *Výplň*. Poloha obrázku môže byť absolútna (vzhľadom na nákresňu) alebo relatívna. Rohy obrázku môžeme prispôbiť polohe troch bodov v nákresni. Zmenou ich polohy obrázok zmenšujeme, zväčšujeme, otáčame...



Obr. 39. Absolútna poloha obrázku

Umiestnenie obrázku môže byť tiež relatívne (viazané k súradnicovému systému). V tomto prípade nastavíme najskôr pozíciu ľavého dolného rohu obrázku (Roh 1), následne pozíciu pravého dolného rohu obrázku (Roh 2) a nakoniec, keď sú nastavené predchádzajúce dva body, nastavíme pozíciu ľavého dolného rohu (Roh 4) obrázku cez *Vlastnosti* → *Štýl*. S takto umiestneným obrázkom môžeme realizovať mnoho ďalších matematických aktivít (výpočty obsahov, dĺžok, uhlov,...).



Obr. 40. Relatívna poloha obrázku

Vložený obrázok môžeme nastaviť ako *Pozadie*. Obrázok pozadia leží spoza súradnicovými osami a už nie je možné ho vybrať a posúvať po nákresni pomocou myši.

Priehľadnosť obrázku sa dá nastaviť s posuvníkom *Výplň* medzi 0% až 100%.

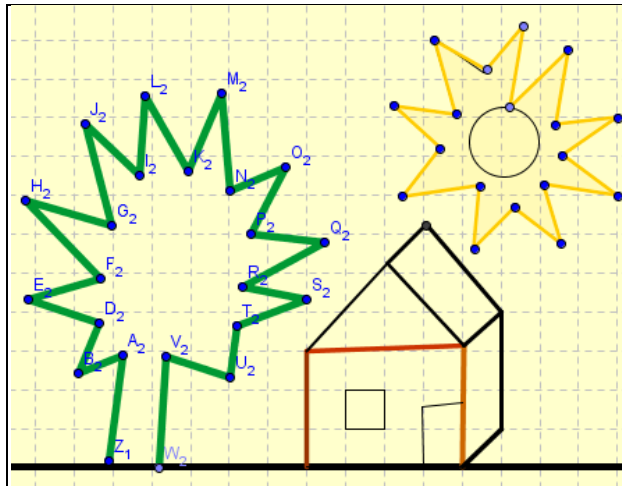
Workshop 2. Rysovanie obrázkov, geometrických útvarov a ďalších objektov v programe GeoGebra



Cieľ aktivity 1. Naučiť sa ovládať prostredie programu GeoGebra a konštruovať v ňom jednoduché objekty. Zvládnuť modifikovanie vlastností týchto objektov.

Inštrukcie k riešeniu.

Konštruovanie objektov začíname výberom položky *Perspektívy* → *Geometria* z *Hlavného menu programu*. Následne sa môžeme rozhodnúť, či budeme pracovať s nákresňou pokrytou mriežkou alebo bez nej. Nástroj *Mriežka* vyberáme po rozbalení položky *Vzhľad*. Pomocou myšky a vhodných nástrojov programu konštruujú študenti v geometrickom okne (nákresni) rôzne objekty a geometrické útvary, ako napríklad: domčeky, plôtik, strom, slniečko (obr. 41).



Obr. 41. Ukážka práce študenta pri realizácii aktivity 1

Pri realizovaní uvedenej aktivity používajú študenti predovšetkým tieto nástroje:

Nový bod	Pero	Úsečku daná dvoma bodmi	Priamku daná dvoma bodmi
Pohyb	Lomená čiara	Posunutie nákresne	Mnohouholník
Zobraziť/skryť pomenovanie	Zobraziť/skryť objekt	Zmaž objekt	Kružnica



Pri tejto aktivite upozorníme študentov aj na nasledovné javy

- Ak sa ukazovateľ myšky nachádza dostatočne blízko pri objekte, objekt sa vtedy podsvieti a ukazovateľ myšky mení tvar z krížika na šípku. Kliknutie myšou v tomto momente spôsobí označenie objektu.
- Ak chceme vytvoriť bod, ležiaci na objekte, musíme si všímať tmavšie podsvietenie vyznačeného bodu (medzi závislými objektmi) v algebrickom okne. Takto vyznačený bod môžeme použitím tlačidla *Presuň* posúvať (trasovať) po objekte.
- Ak sa pri konštrukcii pomýlime, môžeme sa opraviť výberom akcie *Späť* cez *Hlavné*



menu → *Úpravy* →

- Pri podsvietenom objekte po kliknutí pravým tlačidlom myšky rozbalíme *Kontextovú ponuku* a voľbou položky *Vlastnosti* upravujeme farbu, štýl a ďalšie parametre tohto objektu.
- Pomenovanie geometrických útvarov môžeme zobrazit' alebo skryt', prípadne zmenit'.
- Objekty na nákrese môžeme ľubovoľne premiestňovať.
- Nákrešňu môžeme podľa potreby posúvať.



Cieľ aktivity 2. Pri oboznamovaní sa s pojmom obsah rovinných útvarov

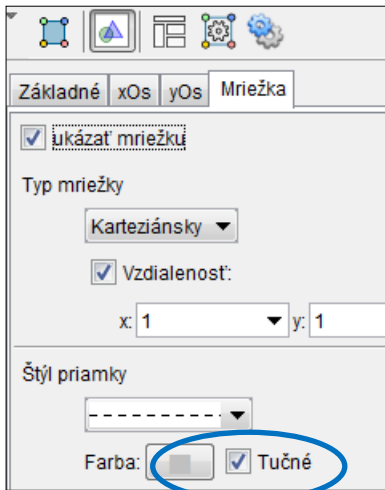
určujeme v rámci tejto aktivity obsahy útvarov vytvorených programom GeoGebra dvoma spôsobmi: najskôr ako počet jednotkových štvorcov, na ktoré môžeme rovinný útvar bezo zvyšku a bez prekryvania sa rozdelit', a následne overíme výsledky použitím nástroja *Obsah*.

Inštrukcie k riešeniu.

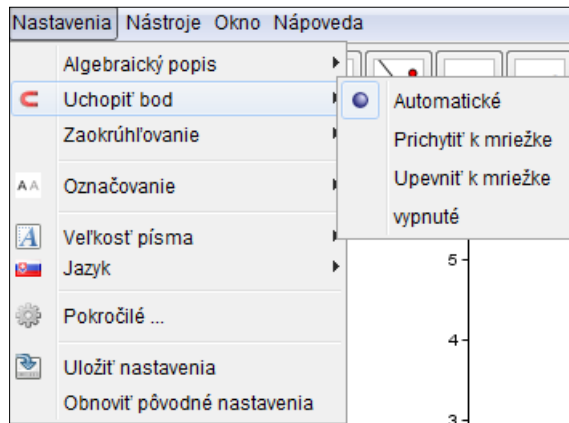
Pred začatím práce upravíme nastavenie bodov vzhľadom k mriežke. Softvér GeoGebra umožňuje presúvať objekty v geometrickom okne na ľubovoľné miesto nákrese, alebo tiež premiestňovanie bodov len v uzloch mriežky.

Pri konštrukcii n - uholníkov využívame vlastnosti mriežky a režim premiestňovania (prípadne umiestňovania) bodov iba v uzloch súradnicovej mriežky (obr. 42). Postupujeme cez *Hlavné menu* → *Nastavenia* → *Uchopiť bod* → *Upevniť k mriežke*.

Dôležité je tiež nastaviť na nákrese dobre viditeľnú mriežku cez jednotlivé rovinné útvary. Toto dosiahneme ak použijeme postupne *Hlavné menu* → *Nastavenia* → *Pokročilé* → *Nákrešňa* → *Mriežka* (obr. 43).











Obr. 42. Nastavenie viditeľnej mriežky

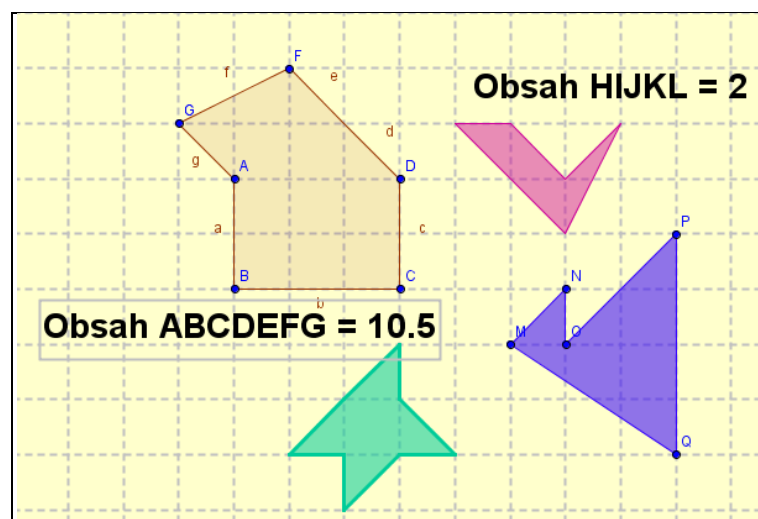


Obr. 43. Upevnenie bodov k uzlom mriežky

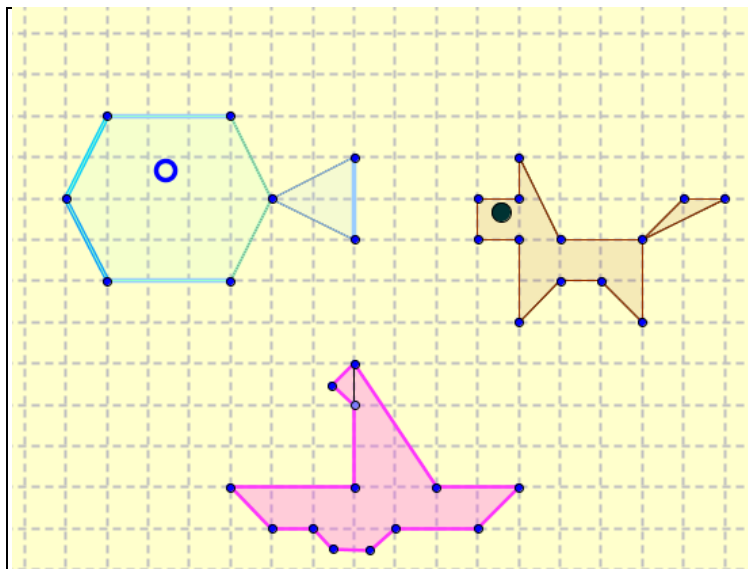
Pri realizovaní aktivity použili študenti postupne tieto nástroje:

 Nový bod	 Mnohouholník	 Úsečku daná dvoma bodmi	 Lomená čiara
 Obsah	 Vzdialenosť	 Posunutie nákrse	 Pohyb

Okrem určovania obsahov mnohoúholníkov môžeme vyzvať študentov, aby vypočítali tiež ich obvod a výsledky si overili v algebrickom okne programu GeoGebra. Uvádzame dve ukážky práce žiakov pri realizácii aktivity 2 (obr. 44 – 45).



Obr. 44. Obsahy mnohoúholníkov – ukážka práce žiaka



Obr. 45. Obsahy mnohoúhelníkov - ukážka práce žiaka



Cieľ aktivity 3. Študenti počas tejto aktivity najskôr vytvoria jednotlivé puzzle diely skladačky známej ako Tangram a následne z vytvorených geometrických obrazcov skladajú ďalšie tvary.

Motivačná poznámka.

Pred dávnymi časmi, v dobách, keď naša krajina bola ešte zarastená hlbokými hustými lesmi a vládli v nej vlci, medvede a zubry, rozkvitla hlboko vnútri Ázie mocná Čínska ríša. Na jej čele stál cisár Ju. Bol to človek z prostého sedliackeho rodu a vodcovské postavenie si získal usilovnosťou a vynaliezavosťou. Svoje schopnosti využil na to, aby spútal dravé vody rieky Jang-c'-tiang. Keď zavŕšil šesťdesiaty rok práce na regulácii rieky, odobral sa konečne na odpočinok. Rád vysedával v besiedke medzi jazmínovými krikmi a počúval rozprávanie počestných, ktorí zavítali do kráľovského paláca z ďalekých krajín.

Jedného dňa prišiel k bráne starý dedinčan. Jemný prach pokrývajúci jeho nohy svedčil o dlhom putovaní a šaty nezvyčajného strihu hovorili, že prichádza odkiaľsi zo vzdialeného kúta ríše. „Uved“ ma k jasnému cisárovi, “ požiadal cudzinec stráž. „Nesiem mu neobyčajný dar.“

„Akýže dar môže prinášať cisárovi otrhaný chudák? “ pomyslel si vojak a uškrnul sa. Muž však stále naliehal a tak ho strážca ohlásil v paláci.

Cudzinec sa vládcovi hlboko poklonil a povedal: „Dopočul som sa, že sa výborne vyznáte v mnohých technických vedách. Priniesol som vám sedem nefritových doštičiek. Zaženú dlhú chvíľu a dobre pobavia.“ Potom vytiahol z kapsy dva veľké, jeden stredný a dva malé trojuholníky, štvorec a rovnobežník.

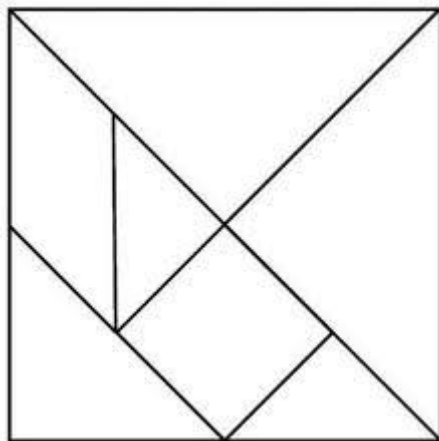
„Skúsený staviteľ z týchto siedmich doštičiek ľahko zostaví veľký štvorec. Za krátky čas vyrieši aj inú otázku: ako zo všetkých tvarov zostaviť dva menšie, úplne rovnaké štvorce.“

Starec na chvíľu zmlkol a potom pokračoval: „Keď tieto úlohy splníte, Jasnosť, naučím vás inú hru, ktorú budete môcť hrať v osamelých hodinách celé roky. “ Cisár naozaj po krátkom

premýšľaní zostavil jeden veľký a potom i dva menšie štvorce. Neznámy dodržal sľub a zasvätil ho do tajomstva hry, ktorú dnes pozná celý svet pod menom **Tangram**.

Inštrukcie k riešeniu.

Počas aktivity vyrobia študenti puzzle pre hru Tangram podľa predlohy na obrázku 46.



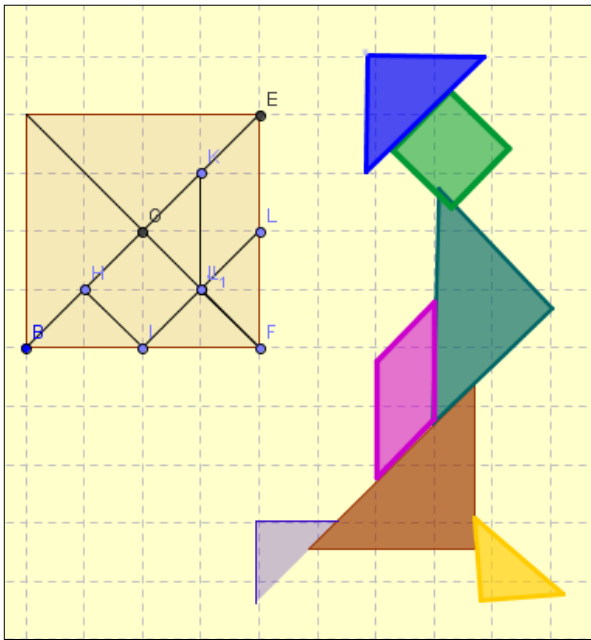
Obr. 46. Puzzle Tangram

Konštrukciu jednotlivých elementov Tangramu môžeme realizovať dvoma spôsobmi:

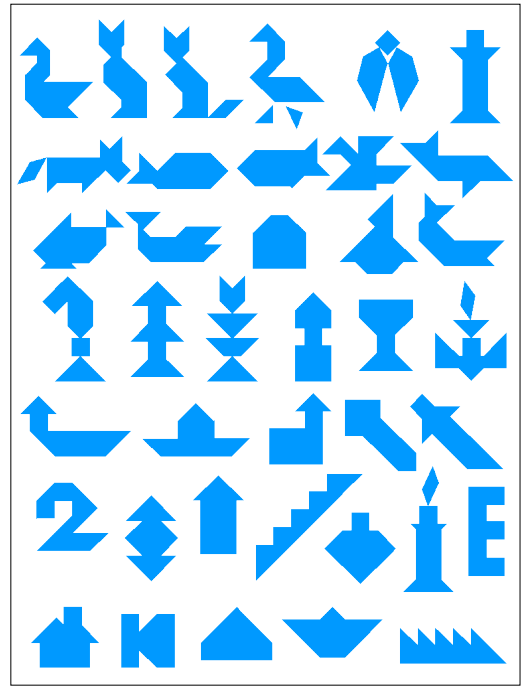
- Využijeme **nastavenie mriežky** na nákresni programu, konštrukciu mnohoúhelníkov začneme vytvorením štvorca so stranou a (vhodné je voliť veľkosť strany a párne číslo), určíme postupne stredy strán štvorca a vyznačíme podľa obrázku dva veľké rovnoramenné trojuholníky (so základňou a), dva malé rovnoramenné trojuholníky so základňou $a/2$ a jeden stredný rovnoramenný trojuholník s dĺžkou ramena $a/2$. Následne konštruujeme ešte malý štvorec a rovnobežník, ktorých dĺžky strán vypočítame z Pythagorovej vety.
- Náročnejší variant aktivity 3 je konštrukcia fragmentov Tangramu v nákresni programu GeoGebra **bez nastavenia mriežky**. Zvolíme veľkosť strany základného štvorca (napríklad $a = 6$ cm). Študenti najskôr vypočítajú veľkosti strán geometrických útvarov ktoré tvoria Tangram, pričom pri výpočte vychádzajú predovšetkým z Pythagorovej vety a z vlastností rovnoramenných a pravouhlých trojuholníkov. Tieto následne konštruujú buď prostredníctvom *Priameho vstupu* alebo Geometrického okna programu GeoGebra.



V oboch prípadoch používame pri konštrukcii mnohoúhelníkov nástroj **Pevný mnohoúhelník**. Pevný mnohoúhelník pohybujeme po nákresni uchopením za jeho v poradí prvý vyznačený vrchol a otáčame ho uchopením za jeho v poradí druhý vyznačený vrchol. Vytvorené mnohoúhelníky môžeme tiež farebne odlíšiť a rozmiestniť ich na nákresňu. Ďalšou časťou tejto aktivity je skladanie zaujímavých figúr z fragmentov Tangramu. Na obrázku 47 je ukážka práce študenta, ktorý zložil z jednotlivých dielov Tangramu na nákresni programu GeoGebra postavu. Nápady pre skladanie ďalších figúr ponúka obrázok 48.



Obr.47. Ukážka práce študenta









Obr. 48. Čo môžete zložiť z Tangramu?



Cieľ aktivity 4. Konštrukcia kružnice opísanej trojuholníku ABC v programe GeoGebra dvoma spôsobmi: prostredníctvom priameho vstupu a geometrického okna (nákrse).

Inštrukcie k riešeniu.

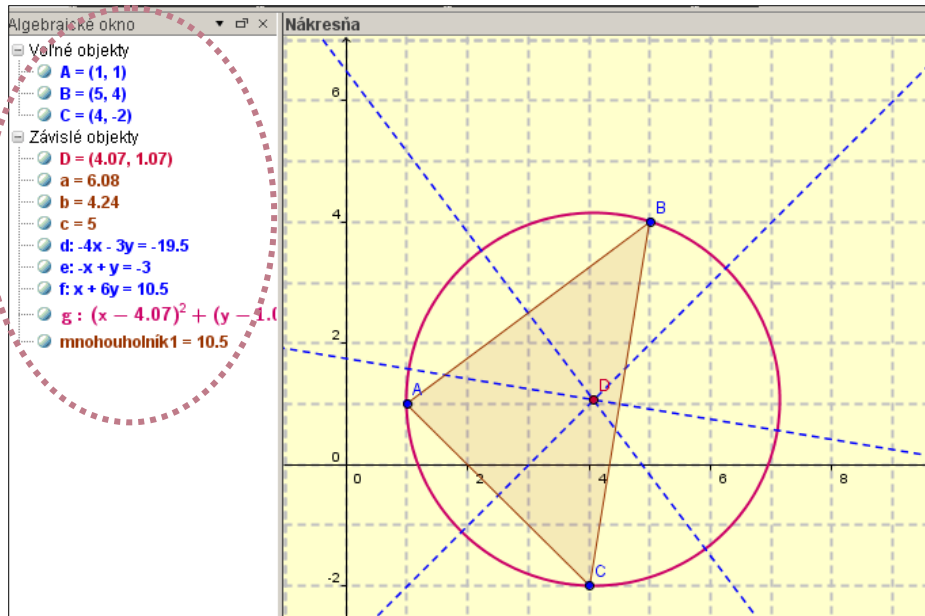
Najskôr realizujeme konštrukciu kružnice opísanej trojuholníku ABC pomocou myšky prostredníctvom nástrojov:

		
Mnohouholník	Os úsečky	Priesečník dvoch objektov
		
Kružnica daná stredom a bodom	Pohyb	Úsečka

Postup konštrukcie

- Zostrojte na nákrse ľubovoľný trojuholník ABC.
- Zostrojte osi strán trojuholníka ABC.
- Vyznačte bod D – priesečník dvoch osí strán trojuholníka. Poznámka: Nástroj priesečník dvoch objektov nemôže byť použitý pre tri priamky.
- Narysujte kružnicu k so stredom v bode D, prechádzajúcu ľubovoľným vrcholom trojuholníka ABC.

- Urobte skúšku správnosti tým spôsobom, že skontrolujete priesečníky kružnice k s vrcholmi trojuholníka ABC.
- Sledujte voľné a závislé objekty zobrazené v algebrickom okne; prostredníctvom algebrického okna získavate informácie o: dĺžkach strán trojuholníka ABC, obsahu trojuholníka ABC, súradniciach stredu D kružnice opísanej trojuholníku ABC, rovniciach priamok, ktoré sú osami strán trojuholníka ABC, o rovnici kružnice opísanej trojuholníku ABC.



Obr. 49. Kružnica opísaná trojuholníku ABC

Postup konštrukcie následne realizujeme prostredníctvom *Vstupného poľa* (príkazového riadku). Postupne vložíme do príkazového riadku nasledujúce príkazy, pričom po každom príkaze použijeme tlačidlo *Enter*.

- $A = (1, 1)$
- $B = (5, 4)$
- $C = (4, -2)$
- $\text{Mn} \text{ohouholník}[A, B, C]$
- $O_1 = \text{OsÚsečky}[A, B]$
- $O_2 = \text{OsÚsečky}[B, C]$
- $O_3 = \text{OsÚsečky}[A, C]$
- $S = \text{Priesečník}[O_1, O_2]$
- $\text{Kružnica}[S, A]$.

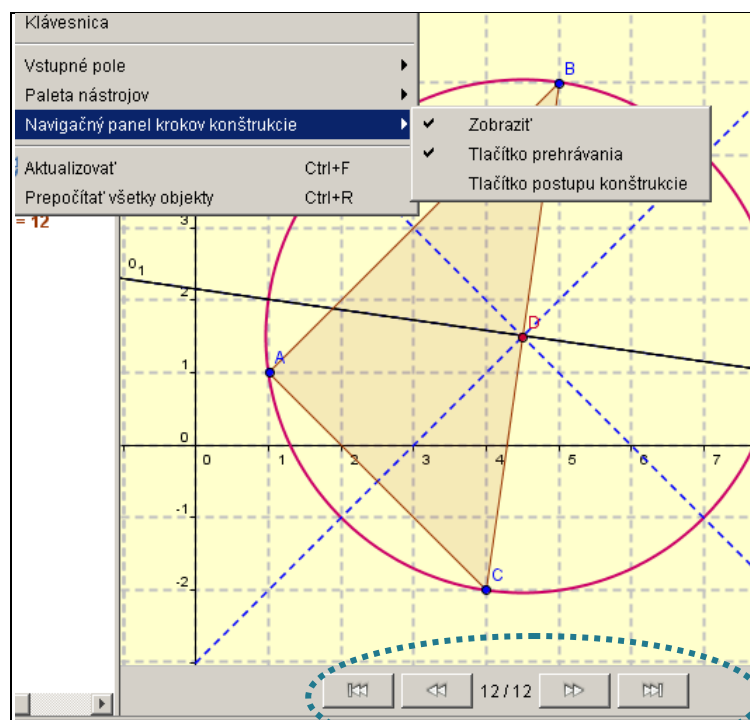


Pri uvádzanej aktivite upozorníme študentov aj na tieto fakty

Zmeňte polohu vrcholov trojuholníka ABC a skúste odpovedať na nasledujúce otázky:

- ✓ Môže stred kružnice opísanej trojuholníku ABC ležať mimo plochy trojuholníka ABC? Ak áno, zdôvodnite, kedy takáto situácia nastane.
- ✓ Môže nastať situácia, že stred kružnice opísanej trojuholníku ABC leží na obode trojuholníka ABC?
- ✓ Skúste zdôvodniť, prečo využívame pri hľadaní stredu kružnice opísanej trojuholníku ABC práve osi strán trojuholníka?

Aktivujte prehrávanie konštrukcie cez *Vzhľad* → *Navigačný panel krokov konštrukcie* → *Zobraziť* → *Tlačidlo prehrávania konštrukcie* (obr. 50).



Obr. 50. Nastavenie prehrávania konštrukcie

Workshop 3. GeoGebra pomáha porozumieť symetrickým zobrazeniam

Tretí workshop realizovaný počas *Letnej školy matematiky* mal za cieľ precvičiť inovatívnym netradičným spôsobom, s podporou programu GeoGebra symetrické zobrazenia v rovine. Študenti participovali na štyroch aktivitách zameraných na precvičovanie stredovej a osovej súmernosti, otáčania a posúvania geometrických útvarov.







Cieľ aktivity 5. Na jednoduchom príklade si žiaci vyskúšajú vytváranie obrazov geometrických objektov s využitím osovej súmernosti.

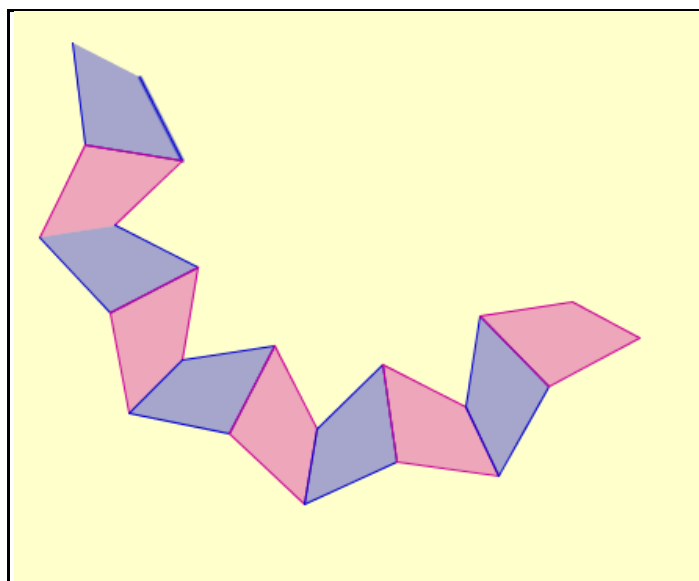
Inštrukcie k riešeniu.

- Nástrojom *Mnohouholník* zostrojte ľubovoľný štvoruholník ABCD.
- Zostrojte obraz štvoruholníka ABCD v osovej súmernosti podľa niektorej jeho strany.

- Túto činnosť niekoľkokrát opakujte, vytvorte ďalšie obrazy štvoruholníka ABCD tak, aby ste dostali reťaz zloženú zo štvoruholníkov.
- Pohybujte vrcholmi vzoru (štvoruholníka ABCD) a pozorujte zmeny. Utvorte nejaký zaujímavý tvar a uložte ho (obr. 51).

Počas aktivity používajú žiaci tieto nástroje:

			
Mnohouholník	Priamka daná dvoma bodmi	Osovo súmerný obraz objektu	Pohyb



Obr. 51. Ukážka práce žiaka – reťaz štvoruholníkov

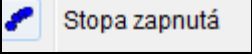


Cieľ aktivity 6. V prírode existuje mnoho príkladov na symetriu. V telesách, kvetoch či živočíchoch vieme nájsť osovú symetriu, bodovú symetriu, môžu byť symetrické v otáčaní o určité uhly alebo pri posúvaní v smere vektora. Symetrické, hoci nie úplne, sú aj naše telá a tváre. V tejto aktivite využijeme niektoré funkcie programu GeoGebra (*Vkladanie obrázkov, Trasovanie bodu*) ako nástroje na skúmanie vlastností symetrických zobrazení.

Počas tejto aktivity študenti vyhľadajú a vyberú prostredníctvom internetu obrázok ľubovoľnej prírodniny (kvetov, živočíchov,...), na ktorom budú následne overovať vlastnosti osovej a stredovej súmernosti.

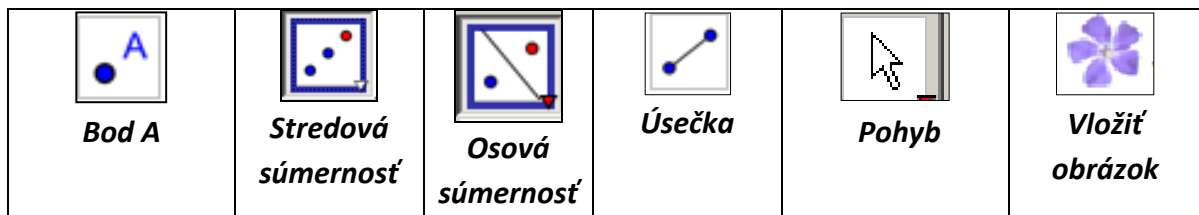
Inštrukcie k riešeniu.

- Otvorte nový súbor GeoGebry.
- Skryte *Algebrické okno* a *Mriežku*.
- Vložte ľubovoľný obrázok na nákrasňu programu. *Obrázok, ktorý chceme použiť je potrebné mať v počítači v niektorom z formátov jpg, gif.*

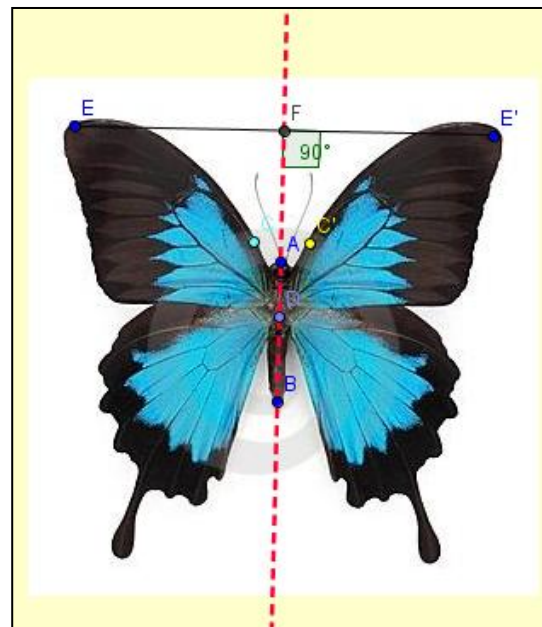
- Umiestnite vybraný obrázok (kvietok) ako obrázok *Pozadia*.
- Zvoľte stred súmernosti S a ľubovoľný bod A .
- Zobrazte bod A v stredovej súmernosti podľa stred S , a určte jeho obraz A' . Upravte vlastnosti bodov cez *Kontextové menu*.
- Narysujte úsečku AA' a určte jej stred.
- Zakliknite funkciu *Stopa zapnutá*  pre body A a A' .
- Posúvajte bod A po nákrese a sledujte ako sa mení poloha bodu A' , úsečky AA' a stred úsečky AA' (obr. 52).
- Analogicky postupujte aj pri overovaní osovej súmernosti motýľa (obr. 53).

V druhej časti aktivity využijeme relatívne umiestnenie obrázku (viazané k súradnicovému systému) (obr. 54). Nastavíme najskôr pozíciu ľavého dolného rohu obrázku (Roh 1), následne pozíciu pravého dolného rohu obrázku (Roh 2) a keď sú nastavené predchádzajúce dva body, nastavíme pozíciu ľavého horného rohu (Roh 4) obrázku cez *Vlastnosti* → *Štýl*. S takto umiestneným obrázkom realizujeme overovanie vlastností zhodných symetrických zobrazení.

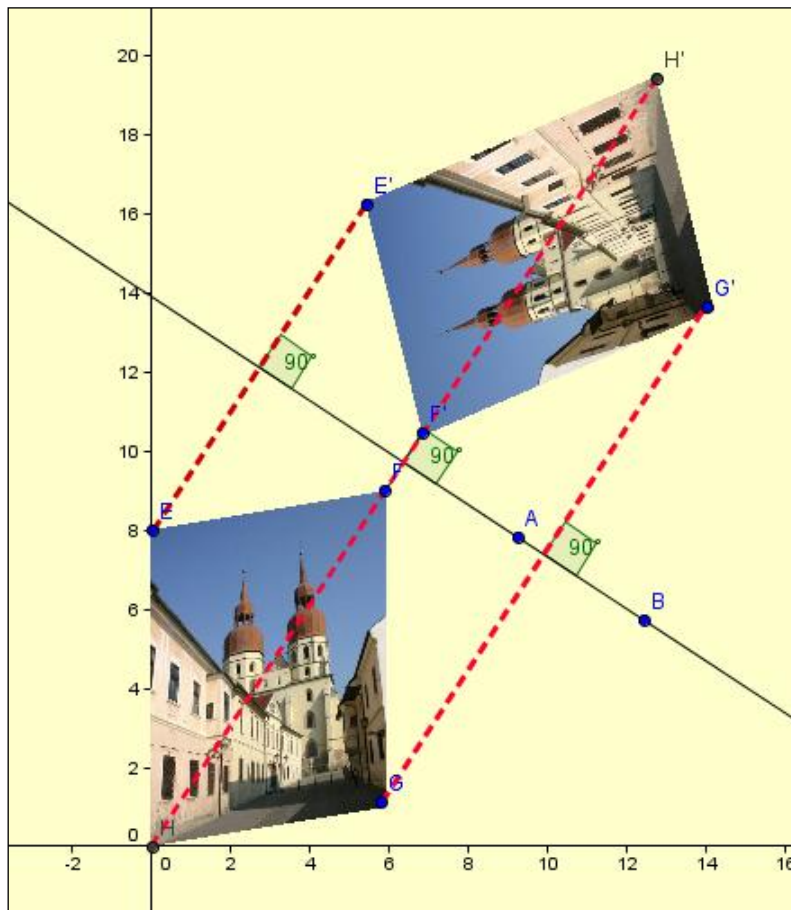
Počas aktivity používame tieto nástroje



Obr. 52. Stredová súmernosť



Obr. 53. Osová súmernosť



Obr. 54. Osová súmernosť



Pri uvádzaných aktivitách diskutujeme so žiakmi aj o týchto skutočnostiach

- Pozorujte a diskutujte čo sa deje s obrazom obrázku ak pohybujete osou súmernosti.
- Diskutujte o tom, ako sa mení obraz vloženého obrázku ak zmeníme pozíciu jeho rohov vzhľadom k súradnicovým osiam.
- Zmeňte polohu osi súmernosti a tiež rohov obrázku. Čo môžete povedať o uhloch, ktoré zvierajú os súmernosti s úsečkami spájajúcimi body na objekte s ich obrazmi? Čím je os súmernosti pre každú z týchto úsečiek?



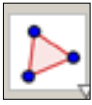
Cieľ aktivity 7. V tejto aktivite vytvoria žiaci obraz ľubovoľného zvieratka (ježko, myška, ...) v tvare mnohoúhelníka, a následne zostroja jeho obraz v posunutí danom vektorom, pričom využívajú nástroj *Posunutie dané vektorom*.

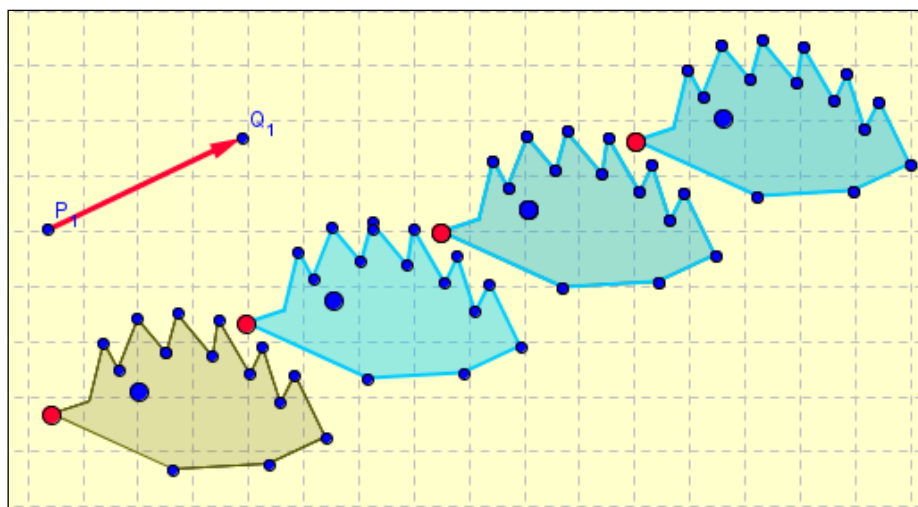
Inštrukcie k riešeniu.

- Zostrojte mnohoúhelník tvaru zvieratka (ježko, krokodíl, myš...).

- Mimo neho zostrojte ľubovoľný vektor.
- Zostrojte obraz mnohoúhelníka v posunutí o daný vektor.
- Zostrojte obraz obrazu mnohoúhelníka v posunutí podľa toho istého vektora.
- Opakujte tento postup a vytvorte niekoľko ďalších obrazov mnohoúhelníka (obr. 55)

Pri aktivite 7 použijeme tieto nástroje:

			
Mnohouholník	Pohyb	Vektor	Posunutie v smere vektora



Obr. 55. Ukážka práce žiaka – ježko vo viacnásobnom posunutí o vektor



Na svojom dynamickom modeli môžete tiež vyskúšať

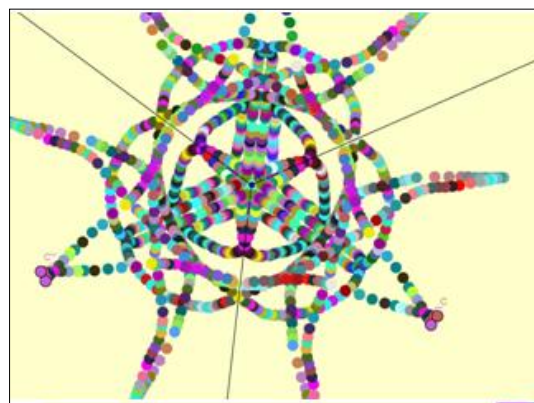
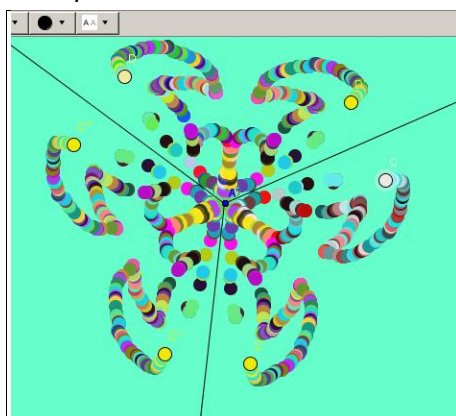
- Zmeňte tvar prvého mnohoúhelníka – vzoru. Ostatní ježkovia sa tiež zmenia.
- Hýbte krajnými bodmi vektora a pozorujte čo sa deje s konštrukciou. Zmeňte veľkosť a smer vektora a diskutujte o pozorovaných zmenách konštrukcie.
- Použite nástroj *Pohyb* a premiestnite vektor. Zdôvodnite, prečo teraz neregistrujete žiadnu zmenu konštrukcie?

Workshop 4. Simulácia kaleidoskopu pomocou programu GeoGebra

Počas tohto workshopu si žiaci prostredníctvom zaujímavej a tvorivej aktivity precvičovali vlastnosti zhodných zobrazení. Kaleidoskop je výborná motivačná pomôcka ktorú zhotovia študenti pomocou zhodných zobrazení a následne pohybom jedného bodu vytvárajú efektne obrazce podľa vlastnej fantázie. Na pridanie vizuálnych efektov sa využívajú tzv. dynamické farby, ktoré program GeoGebra generuje ako náhodne farby, pričom ich podoba je determinované vybraným bodom a jeho vzdialenosťou od stredu otáčania.



Cieľ aktivity 8. Využite nástroje programu GeoGebra a vytvorte si svoj vlastný kaleidoskop – viď obrázok 56.

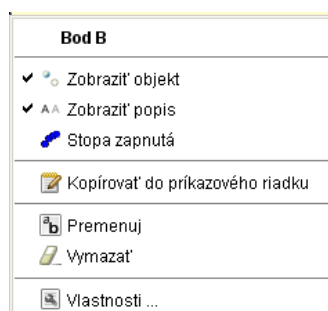


Obr. 56. Ukážka kaleidoskopu vytvoreného v programe GeoGebra

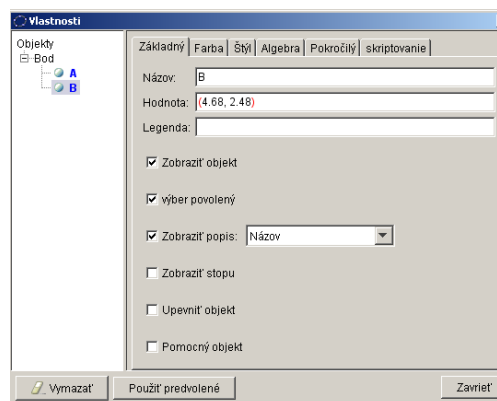
Inštrukcie k riešeniu.

Pri vytváraní kaleidoskopu sme využili špeciálne nastavenia vlastností bodov, dynamické farby a symetrické zobrazenia objektov v programe GeoGebra.

Klikom pravého tlačidla na vybraný bod (objekt) sme aktivovali kontextová ponuka pre vybraný bod a vybratím položky *Vlastnosti* z kontextovej ponuky sme otvorili dialógové okno (obr. 57), nastavili resp. zmenili farbu, veľkosť, štýl objektov a výplň objektov. Tu sme tiež nastavili a zobrazili stopu, alebo v položke *Pokročilý* dynamické farby (obr.58).

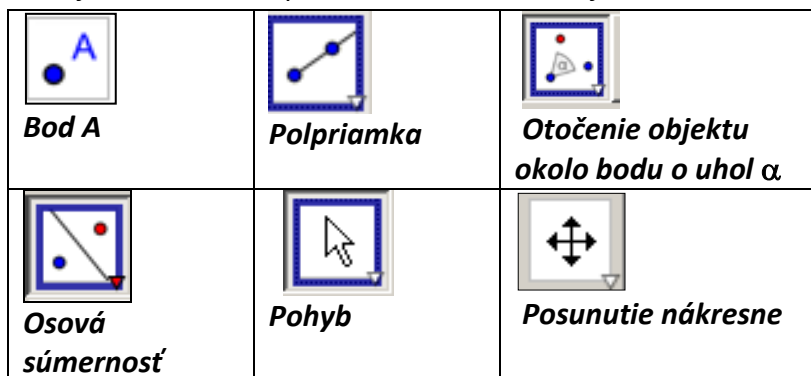


Obr. 57. Kontextové menu k bodu B



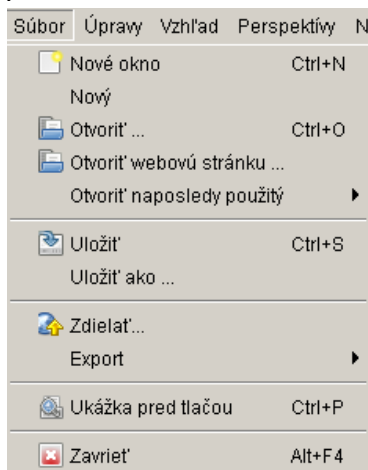
Obr. 58. Dialógové okno *Vlastnosti*

Pri tejto aktivite sme použili tiež tieto nástroje

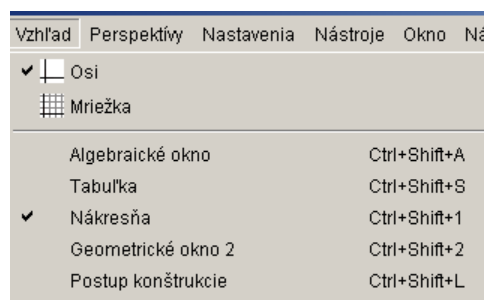


Postup konštrukcie

- Otvorte nové okno GeoGebry (obr. 59),
- Ukryte na nákresni *Osi* a *Mriežku* (obr. 60),



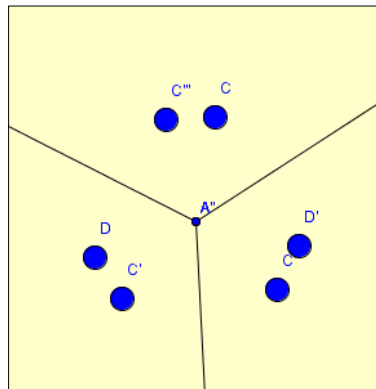
Obr.59. Nové okno GeoGebry



Obr.60. Nastavenie Osí a Mriežky

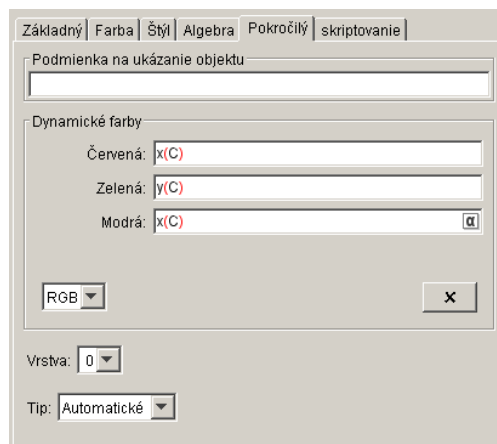
- Narysujte na nákresňu ľubovoľnú polpriamku AB, využijte pritom nástroj *Polpriamka*.
- Zostrojte polpriamku AB_1 , ktorá je obrazom polpriamky AB v otáčaní okolo bodu A (stred otáčania) o uhol 120° . Použite nástroj *Otáčať objekt okolo bodu o uhol*. Kliknite na polpriamku AB následne na bod A (stred otáčania) a do dialógového okna zapíšte veľkosť uhla 120° .
- Analogicky zostrojte polpriamku AB_2 , ktorá je obrazom polpriamky AB_1 v otáčaní okolo bodu A o uhol 120° .
- Ukryte body B_1 a B_2 na polpriamkach AB_1 a AB_2 , (pravé tlačidlo myši → kontextová ponuka).
- Nákrešňa je polpriamkami rozdelená na tri časti. Vyznačte ľubovoľný bod C v jednom sektore nákresne a upravte jeho vlastnosti: Nastavte veľkosť bodu na 9 *Vlastnosti* → *Štýl* → *Veľkosť bodu* a farbu bodu na červený odtieň: *Vlastnosti* → *Štýl* → *Farba bodu*.
- Zostrojte bod C' osovo súmerný k bodu C, pričom osou súmernosti je polpriamka AB_1 . Použite nástroje *Osovo súmerný obraz objektu* → *Bod C* → *Polpriamka AB_1* .

- Analogicky zostrojte bod C'' osovo súmerný k bodu C' podľa osi AB_2 , ďalej bod C''' osovo súmerný k bodu C'' podľa osi AB , bod D osovo súmerný k bodu C''' podľa osi AB_1 a nakoniec bod D' osovo súmerný k bodu D podľa osi AB_2 (obr.61).



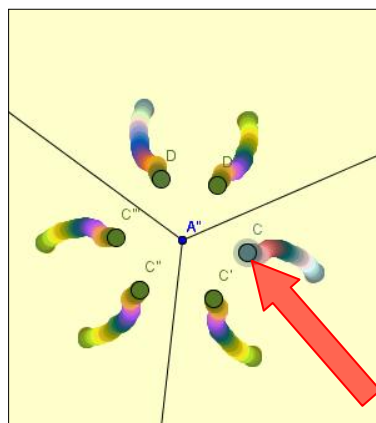
Obr. 61. Vzhľad okna programu pred spustením Kaleidoskopu

- ✓ Označte bod C pravým tlačidlom myši a z kontextovej ponuky vyberte *Vlastnosti* → *Základný* → *Zobraziť stopu* → *Pokročilý*.
- ✓ Po vybratí položky *Pokročilý* sa otvorí dialógové okno, v ktorom vyznačíte dynamické farby pre súradnice bodu C - obrázok 62.



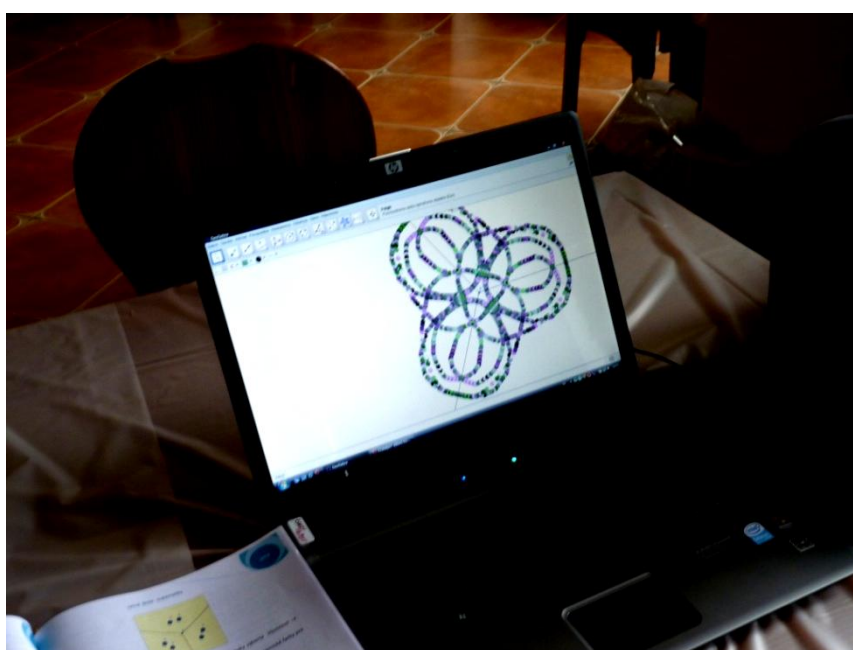
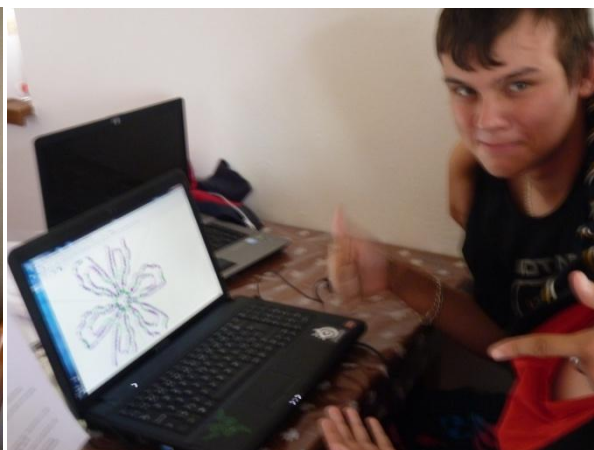
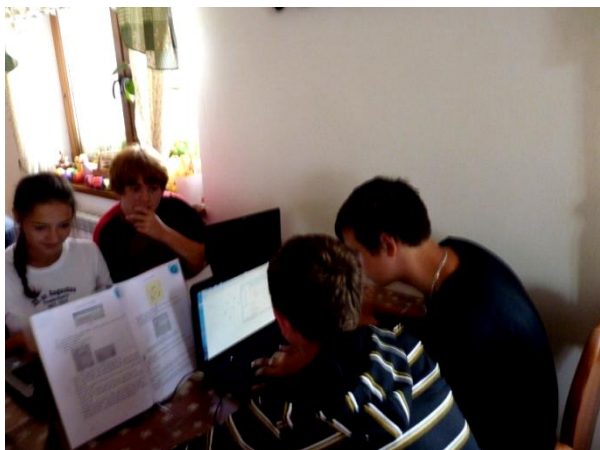
Obr.62. Nastavenie dynamických farieb

- ✓ Analogicky upravte vlastnosti každého z bodov C' , C'' , C''' , D , D' .
- ✓ Vytváranie kaleidoskopu spustíte *Posúvaním bodu C* po nákrēsni (obr. 63).



Obr.63. Posúvanie bodu C po nákrēsni

Ukážky práce študentov



Workshop 5. Matematika a svet okolo nás

V počas tejto aktivity použijú žiaci nástroje programu GeoGebra na zisťovanie matematických vlastností objektov z reálneho života. Podstatnú úlohu tu zohráva práca s obrázkami.



Cieľ aktivity 9. Použite nástroje programu GeoGebra a vyriešte problém: Ktorá zo známych šikmých veží sa najviac odchyľuje od zemskej osi? Je to šikmá veža v talianskej Pise?

Inštrukcie k riešeniu.

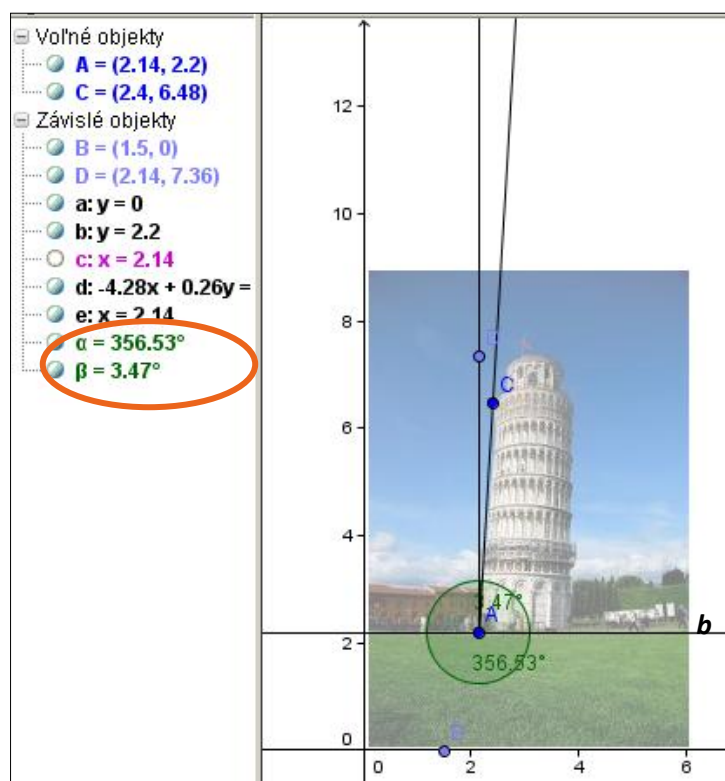
Použite internetový prehliadač a vyhľadajte obrázky troch najznámejších šikmých veží. Zamerajte sa predovšetkým na Šikmú vežu v Pise, Capital Gate v Abu Dhabi a Suurhusenská vežu v Nemecku. Použite nižšie uvedené nástroje a určte odchýlku vybraných veží od zemskej osi. Vyhodnoťte výsledky!

 Bod A	 Priamka	 Uhol	 Rovnoobežka	 Pohyb	 Vložiť obrázok
 Priesečník dvoch objektov	 Úsečka	 Zobraziť / Skryť objekt	 Smernica / strmost'	 Kolmica na priamku	 Posunutie nákrse

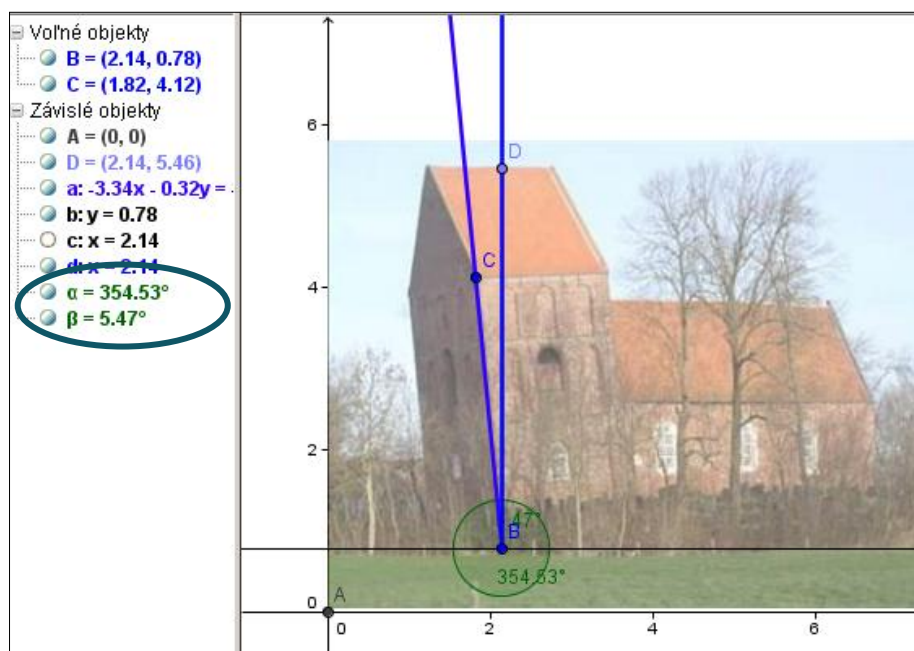
- V menu *Nastavenia* cez položku *Uchopiť bod* zvolte stav *Vypnuté*, čím umožníte nastavenie bodu na ľubovoľné miesto nákrse (nie iba v uzloch mriežky).
- Vložte jeden z obrázkov do súradnicového systému tak, aby sa ľavý dolný roh obrázku nachádzal v začiatku súradnicového systému.
- Zmeňte priehľadnosť obrázku na 50% a nastavte obrázok ako obrázok pozadia.
- Zvolte bod *A* (ľavý dolný roh veže) a vedte ním priamku *b* rovnobežnú s osou *x*.
- Zvolte bod *C* (vrchol veže) a zostrojte polpriamku *AC*.
- Z bodu *A* zostrojte kolmicu *c* na priamku *b*.
- Narýsujte polpriamku $AD \subset c$.
- Určte uhol polpriamok *AD* a *AC* (obr. 64 - 66).

V algebrickom okne registrujeme výsledky meraní uhlov a môžeme teda vyhodnotiť, že najväčší odklon od zemskej osi má v súčasnosti, podľa našich zistení, stavba Capital Gate.

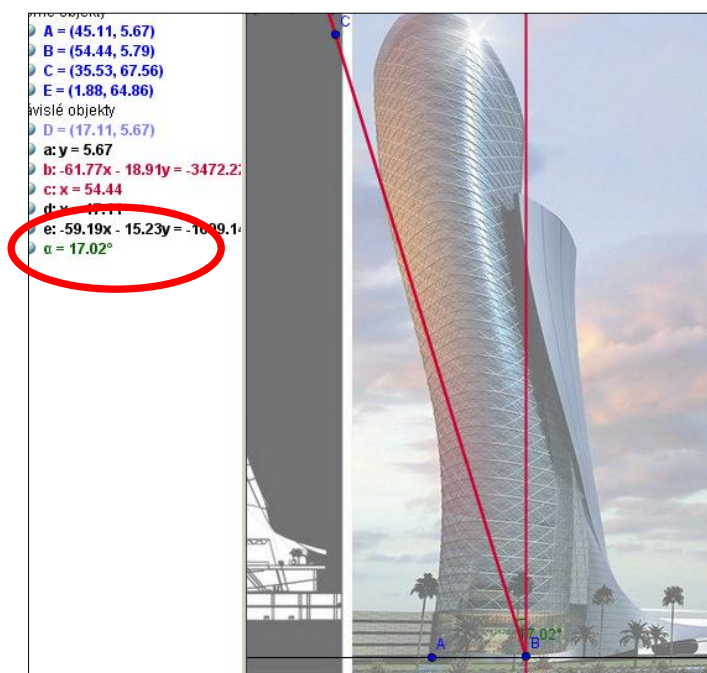
Skúste odpovedať na otázku: Ako matematicky zdôvodníte, že nemusíme pracovať s reálnymi údajmi (skutočná výška veže a je jej vychýlenie) ale stačia nám údaje z fotografií?



Obr. 64. Šikmá veža v Pise



Obr. 65. Suurhusenská veža



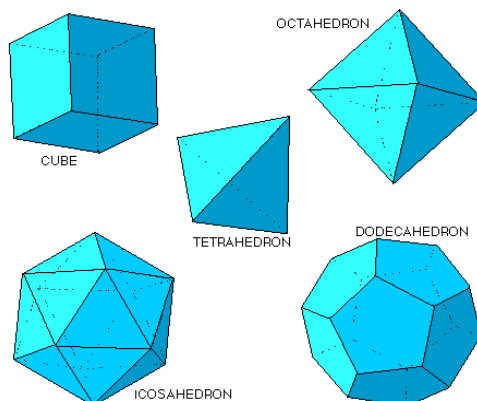
Obr. 66. Capital Gate

Workshop 6. Archimedove a Platónske telesá

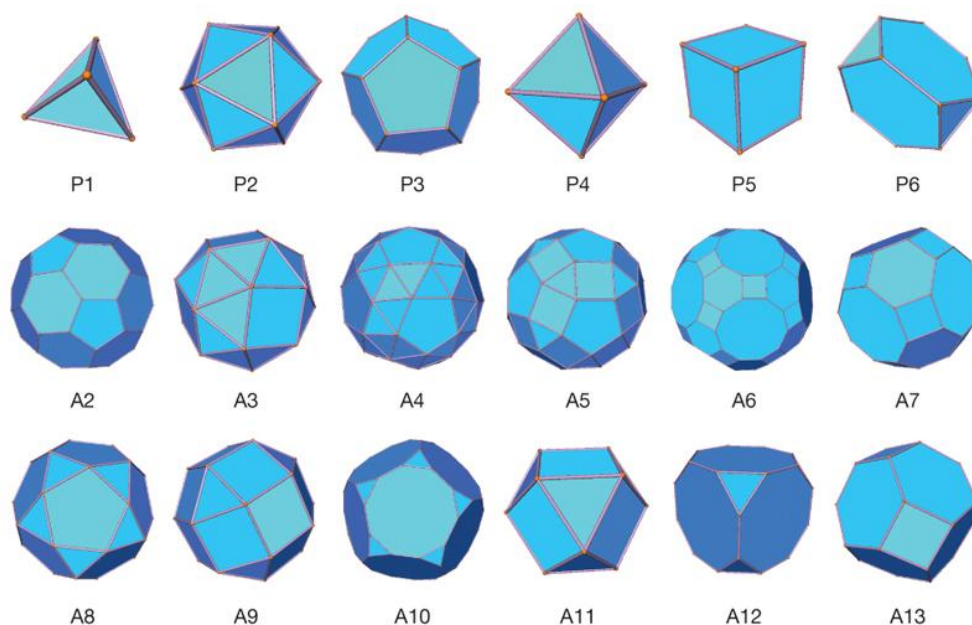
Platónske teleso je pravidelný konvexný mnohosten (polyéder) v priestore, pričom z každého jeho vrcholu vychádza rovnaký počet hrán a všetky jeho steny sú tvorené rovnakými pravidelnými n – uholníkmi. Existuje len 5 telies, ktoré majú tieto vlastnosti. Tetraéder, hexaeder, oktaéder, dodekaéder a ikosaéder (obr. 67).

Ešte zaujímavejšími sú Archimedesom objavené tzv. polo pravidelné mnohosteny, ktorých výskyt v prírode a vesmíre je tiež veľmi častý. Sú to vypuklé mnohosteny, ktorá majú všetky steny pravidelné mnohoúhelníky viac ako jedného druhu, ale všetky uhly stien sú navzájom zhodné alebo sú symetrické podľa stredu mnohostena.

Archimedes našiel 13 takýchto telies ohraničených 8, 14, 26, 32, 38, 62 alebo 92 stenami tvaru trojuholníkov, štvorcov, päťuholníkov, šesťuholníkov, osemuholníkov alebo 12 – uholníkov. Archimedes ich získal z piatich Platónskych telies. Sedem z nich vzniklo rovinným odseknutím vrcholov, štyri odseknutím hrán a dva zložitejším spôsobom (obr.68).



Obr. 67. Platónske telesá



Obr. 68. Archimedove telesá



Cieľ aktivity 10. Táto aktivita sa skladala z troch častí. Najskôr študenti sledovali prezentáciu, v ktorej sa oboznámili s Platónskymi a Archimedovými telesami a ich vlastnosťami. Následne vytvárali papierové modely týchto telies, a nakoniec mali za úlohu vyhľadať prostredníctvom internetu čo najviac praktických ukážok výskytu týchto telies v reálnom živote a podeliť sa o svoje poznatky so spolužiakmi.

A takto sa nám darilo:





Zoznam účastníkov seminára

1. Al Sabri Adam	SPŠ Považská Bystrica
2. Bobáň Adam	SPŠ Považská Bystrica
3. Brzý Filip	ZŠ sv. Augustína Považská Bystrica
4. Brzý Jakub	ZŠ sv. Augustína Považská Bystrica
5. Bučeková Terézia	ZŠ sv. Augustína Považská Bystrica
6. Cehelská Ľudmila	ZŠ sv. Augustína Považská Bystrica
7. Čižmárová Veronika	Gymnázium Považská Bystrica
8. Čupec Joachim	ZŠ sv. Augustína Považská Bystrica
9. Drblík Vladimír	ZŠ sv. Augustína Považská Bystrica
10. Folučková Ema	ZŠ sv. Augustína Považská Bystrica
11. Fóra Marek	ZŠ sv. Augustína Považská Bystrica
12. Frátriková Andrea	ZŠ sv. Augustína Považská Bystrica
13. Gajdošík Marián	ZŠ sv. Augustína Považská Bystrica
14. Hôrková Janka	Gymnázium Považská Bystrica
15. Hlinka Branislav	Gymnázium Považská Bystrica
16. Hrenáková Ema	ZŠ sv. Augustína Považská Bystrica
17. Chudík Stanislav	Gymnázium Žilina
18. Janáček Jakub	ZŠ sv. Augustína Považská Bystrica
19. Jurík Tomáš	SPŠ Považská Bystrica
20. Kalaš Gabriel	ZŠ sv. Augustína Považská Bystrica
21. Kalaš Ján	ZŠ sv. Augustína Považská Bystrica
22. Kalaš Roman	Gymnázium Považská Bystrica
23. Kalašová Mária	ZŠ sv. Augustína Považská Bystrica
24. Kalinayová Anna	ZŠ sv. Augustína Považská Bystrica
25. Kontra Andrej	Gymnázium Považská Bystrica
26. Krajná Gabika	ZŠ sv. Augustína Považská Bystrica
27. Krajná Natália	ZŠ sv. Augustína Považská Bystrica
28. Kubiš Andrej	Gymnázium Považská Bystrica
29. Kubišová Simona	Gymnázium Žilina
30. Kukučková Monika	ZŠ sv. Augustína Považská Bystrica
31. Kuncová Daniela	ZŠ sv. Augustína Považská Bystrica
32. Miškechová Kristína	ZŠ sv. Augustína Považská Bystrica
33. Mišúnová Nina	ZŠ sv. Augustína Považská Bystrica
34. Močarník Dalibor	ZŠ sv. Augustína Považská Bystrica
35. Rešitiová Selma	ZŠ sv. Augustína Považská Bystrica
36. Rezák Luáš	Gymnázium Považská Bystrica
37. Šaržíková Veronika	Gymnázium Žilina
38. Šlapka Martin	ZŠ sv. Augustína Považská Bystrica
39. Velič Marek	ZŠ sv. Augustína Považská Bystrica
40. Žilinčík Marek	SPŠ Žilina

Zoznam lektorov seminára

1. Mgr. Bajzová Milada
2. Mgr. Bolegová Jana
3. Mgr. Borčanyi Jozef
4. Mgr. Brzá Eva
5. Mgr. Cehelská Alena
6. Mgr. Cehelský Branislav
7. Mgr. Fórová Katarína
8. Mgr. Hrenáková Katarína
9. Mgr. Krivá Lýdia
10. Mgr. Kumcová Viera
11. Mgr. Rešová Renáta
12. Mgr. Šišťíková Lucia
13. Ing. Šuly Ivan
14. PaedDr. Kontrová Lýdia, PhD.
15. RNDr. Malacká Zuzana, PhD.
16. Mgr. Pobočíková Ivana, PhD.
17. RNDr. Holešová Michaela, PhD.
18. Mgr. Hyčková Silvia
19. Mgr. Valuchová Anna
20. Mgr. Rosivalová Henrieta
21. Mgr. Vopátová Mária

Použitá literatúra

Novacká, G.: *Softvér GeoGebra na hodinách matematiky*. Bratislava. 2011. ISBN 978-80-8052-374-9.

Huylebrouck, D.: *Regular Polyhedral Lattices of Genus 2: 11 Platonic Equivalents?* In: Bridges Conference Proceedings, Pécs 2010.

GeoGebra. [online]. [cit. 3. 9. 2011]. Dostupné na internete: <<http://www.geogebra.org/cms/>> .

GeoGebra – príručka. [online]. [cit. 1. 9. 2011]. Dostupné na internete: <<http://www.geogebra.org/book/intro-en/>>

Jodas, V., - Koreňová, L.: 2002. *Metodická príručka pre používanie didaktického softvéru v „cabri geometrii“ vo vyučovaní matematiky*. [online]. [cit. 2. 9. 2011]. Dostupné na internete: http://www.ddm.fmph.uniba.sk/fles/DsvM/cd_cabri/mc_cabri2.pdf

Technology for Teachers [online]. 15. 3. 2011 [cit. 12. 2. 2012]. Dostupné z: <http://www.freetech4teachers.com/2011/03/>.

[geogebra-prim-geogebra-for-elementary.html](#).

HONENWARTER M., HONENWARTER J. *GeoGebra Help, Official Manual 3.2* [online]. [cit. 11. 2011]. <http://www.geogebra.org>, 2009.

Vaniček, J.: *Využití informačních technologií ve výuce matematiky*. 2011. Plzeň. ŠVARC, Petr.

Dynamický matematický software GeoGebra. Metodický portál RVP : Portál vzdělávání [online]. [cit. 2008-10-28]. Dostupný z WWW: <<http://www.rvp.cz/clanek/2585>>.