

Kľúčové slová: didaktika, odborová didaktika, didaktika matematiky, vývoj didaktiky matematiky ako vednej disciplíny, vzťah didaktiky matematiky k ďalším vedným disciplínam

Žiaci nechodia do školy preto, aby sa dozvedeli, čo majú robiť doma.

V škole sa má nielen učiť, ale aj naučiť, aby človek prestal byť v čase mimo výučby žiakom a mohol robiť najmä to, o čo má záujem (hoci sa aj učiť).



Žiak strávi v škole približne štvrtinu svojho života. V určitom období je škola základom jeho života, života so všetkými jeho atribútmi – od tvorivej sebarealizácie až po osobné prežívanie radosti z jej výsledkov. Preto moderná výučba má byť koncipovaná ako optimálne prepojenie požiadaviek spoločnosti na jednej strane s potrebami, túžbami, možnosťami žiaka na strane druhej.

Od súčasných učiteľov sa očakáva, že budú skôr koordinátormi a manažérmi v triedach, rozvíjajúcimi životne dôležité kompetencie študentov (žiacov), ako autoritatívnymi školiteľmi, vyžadujúcimi len memorovanie informácií.

Výučbu treba chápať ako **tvorivý a neopakovateľný proces**, ktorý sa nedá spútať do presných schém, modelov, či spojiť len s jedinou teóriou.

O samotnom procese výučby v konečnom efekte rozhoduje až konkrétny učiteľ a žiak v konkrétnych podmienkach a situáciách výučby.



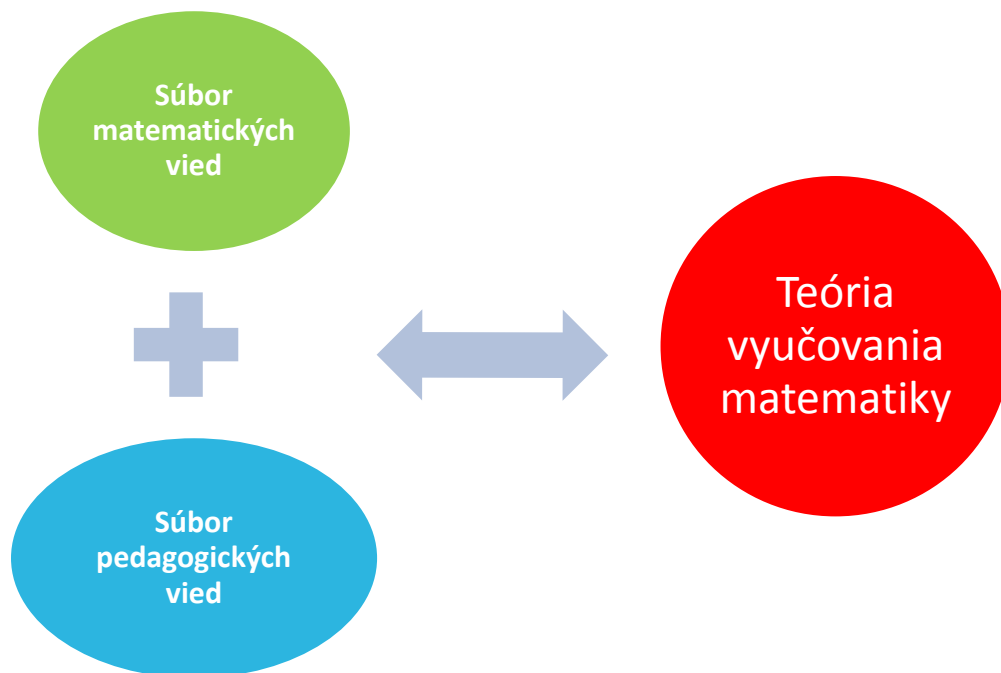
Didaktika

V súčasnosti sa didaktika chápe ako pedagogická disciplína, ktorej predmetom skúmania je proces výučby ako jednota činnosti učiteľa (vyučovanie) a činnosti žiakov (učenie sa). Zaoberá sa procesom výučby vo všeobecnosti, bez ohľadu na konkrétny vyučovací predmet.

Odborové didaktiky sa zaoberajú skúmaním procesu výučby v určitých skupinách príbuzných vyučovacích predmetov (Turek, 1990, s.10). Takou je napríklad didaktika matematiky.

Na začiatku:

- ✚ na jednej strane existujúci súbor matematických vied s príslušnými okrajovými disciplínami a aplikačným aparátom,
- ✚ na druhej strane súbor pedagogických vied so svojimi pomocnými disciplínami a medzi nimi rozvinutá disciplína o vyučovaní matematiky už ako teória vyučovania matematiky.



Vzťah teórie vyučovania matematiky k obom základným vedným odborom je dvojaký:

- táto teória z nich informáciu čerpá,
- táto teória im informáciu aj dodáva.

Patrí z časti do jedného a z časti do druhého súboru, je disciplínou vyrastajúcou z oboch. Súborná problematika vyučovania matematiky má dnes už celkom zreteľné obrysy.

Sú známe:

- ciele výskumu,
- pevný obsah výskumu s výhľadovou perspektívou,
- uplatňujú sa presné a overené výskumné metódy.



Definícia.

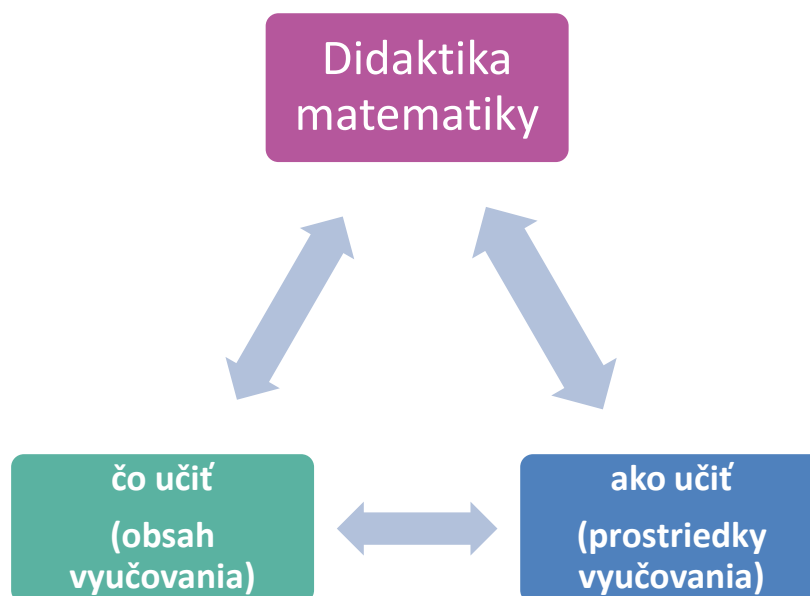
Didaktika matematiky je teória, metodika a prax výchovno-vzdelávacích procesov v školskej matematike. Didaktika matematiky analyzuje obsah, prostriedky, metódy a formy vyučovania a štúdia matematiky.

Metodologickým základom didaktiky matematiky je **teória vyučovania matematiky** ako špeciálna vedná disciplína.



Definícia

Didaktika matematiky (Fischer, Malle) zaoberanie sa vzťahom medzi matematikou na jednej strane a ľuďmi, spoločnosťou na strane druhej. Zahŕňa všetky otázky komunikácie o matematike, vedie k novým poznatkom o matematike, o vede všeobecne, o spoločnosti a o ľuďoch, je časťou cesty k sebapoznaniu.



Korene didaktiky matematiky a medzníky jej vývoja v 20. storočí

- V roku 1872 Klein publikoval významný a slávny **Erlangenský program** a predniesol prednášku o matematickom vzdelávaní, v ktorej apeloval na väčšiu aplikovateľnosť matematiky pri jej vyučovaní a na oživenie jej výučby na gymnáziách a univerzitách.
- Neskôr aktívne prispel k tomu, aby bola didaktika matematiky uznaná ako vedná disciplína – publikoval viac ako 30 kníh a článkov o vyučovaní matematiky.
- V roku 1911 bol školiteľom **prvej európskej doktorandskej práce** (habilitation).
- Dôležitým medzníkom bol rok 1908 a **Štvrtý medzinárodný kongres matematikov v Ríme**, počas ktorého bola ustanovená

nová organizácia: **International Commision on Mathematical Instruction** (Medzinárodný výbor pre výučbu matematiky), prezidentom ktorej sa stal práve Felix Klein.



Felix Christian Klein

Felix Christian Klein (25. 4. [1849](#), [Düsseldorf](#), [Prusko](#) – 22. 5. [1925](#), [Göttingen](#), [Nemecko](#)) bol nemecký [matematik](#).

Zaoberal sa predovšetkým geometriou (neeuclidovskou) ale tiež teóriou grúp a teóriou funkcií. Roku [1872](#) formuloval tzv. [Erlangenský program](#), ktorého hlavnou myšlienkou bolo prepojenie štúdia geometrie a algebry.

V roku [1885](#) bol Felix Klein zvolený za člena [Royal Society](#). V roku [1893](#) získal [De Morganovu medailu](#) udeľovanú Londýnskou matematickou spoločnosťou a v roku [1912](#) tiež [Copleyovu medailiu](#).

- Ďalším významným krokom bolo vytvorenie **Commission for the Study and Improvement of Mathematics Teaching - CIEAEM**; Komisie pre štúdium a rozvoj vyučovania matematiky v roku 1950. Cieľom komisie bolo skúmanie aktuálnych podmienok a možností rozvíjania nového matematického vzdelávania za účelom zvyšovania kvality vyučovania a učenia sa matematiky. Hlavným prostriedkom pre naplnenie týchto cieľom sú každoročné konferencie. Charakter práce združenia silne ovplyvnili také osobnosti didaktiky matematiky ako sú napríklad: Choquet, Piaget, Dieudonné, Krygowska, Freudenthal, Poya, Kilpatrick.
- Šesťdesiate roky 20. storočia sú obdobím, keď matematici „znovu objavujú“ školu. Objavuje sa hnutie **New Math** (Nová matematika) u nás známe ako **Modernizácia vyučovania matematiky**.

Podstatou tohto hnutia bolo presvedčenie, že zavedením množinového základu (Kořínek, 1965) sa odstráni zo škôl nezáživný dril a dôjde ku kultivácii matematického myslenia.

Výskumníci z oblasti didaktiky matematiky si uvedomovali, že treba systematizovať existujúcu literatúru v oblasti didaktiky matematiky. Začali poriadať viaceré konferencie, v USA vznikali výskumné ústavy didaktiky matematiky.

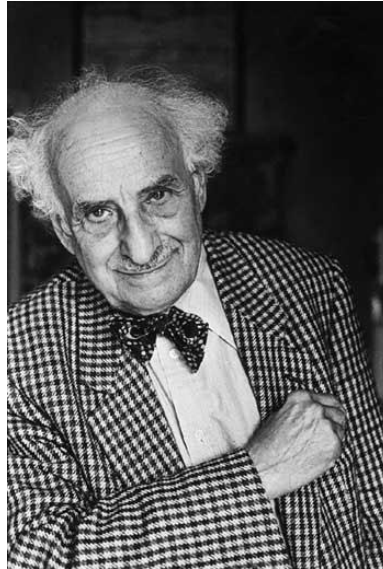
- Už zmienená Komisia CIEAEM od roku 1969 pravidelne každé štyri roky poriada **konferenciu ICME**. (International conference about the mathematical education).
- V roku 1968 bol založený časopis **Educational Studies of Mathematics** a v roku 1970 časopis **Journal for Research in Mathematics Education**. Oba patria až doteraz k najrenomovanejším vedeckým časopisom zaoberajúcim sa problematikou didaktiky matematiky.
- Na záver spomeňme najmladšiu z organizácií tohto druhu **European Society for Research in Mathematics Education** (Evropskú spoločnosť pre výskum matematického vzdelávania) založenú v roku 1997, ktorej členmi sú tiež odborníci zo Slovenska a Čiech.
- 80-te roky: Konferencie ICME sa ukazujú ako kľúčové, udávajúce najnovšie trendy. (4. Konferencia ICME) ovplyvňuje podstatne výskum v oblasti didaktiky matematiky. Nové trendy: dôraz na konštruktivistické a študentov aktivizujúce edukačné stratégie.

Prof. Piaget: **"50 rokov experimentovania nás naučilo, že neexistuje žiadne poznanie, ktoré by bolo len výsledkom zaznamenávania pozorovaného, a ktoré by nebolo štruktúrované aktivitou subjektu."**

Prof. Freudenthal, významný didaktik 20. storočia, sa venoval predovšetkým skúmaniu problematiky kognitívnych procesov:

- ✚ Ako sa vlastne ľudia učia, a či je možné toto učenie sa pozorovať, popisovať a regulovať.
- ✚ Do popredia sa dostávajú otázky skúmania efektívnosti stratégií riešenia matematických úloh a kognitívne procesy žiakov.

V oblasti výskumu a metodológie vedy sa objavujú a využívajú viac klinické testy, experimenty, prípadové štúdie zamerané na kvalitatívne štatistické metódy vyhodnocovania výsledkov výskumu oproti predchádzajúcemu obdobiu, kedy boli skôr používané písomné testy a kvantitatívne metódy vyhodnocovania výsledkov.



Prof. Freudenthal (1905 - 1990)



Vzťah didaktiky matematiky (v ďalšom texte len DM) k ďalším vedným disciplinám

- ✚ Vzťah DM k matematike,
- ✚ Vzťah DM k logike,
- ✚ Vzťah DM k pedagogike,
- ✚ Vzťah DM k psychológii,
- ✚ Vzťah DM k filozofii,
- ✚ Vzťah DM k histórii matematiky.



Vzťah didaktiky matematiky k matematike

DM analyzuje obsah, prostriedky, metódy a formy vyučovania a štúdia matematiky.

Zaoberá sa vybranými časťami zo súboru matematických vied. V prvom rade sa teda opiera o matematiku.

Vhodný výber matematického učiva si vyžaduje hlboké znalosti samotnej matematickej vedy

Účelné usporiadanie výberu matematických informácií v mnohom závisí od vnútornej logickej štruktúry častí matematiky.

Ako komunikačný prostriedok nám slúži **matematická symbolika** a **jazyk matematiky**.

Matematika je východiskový objekt, ktorý podlieha didaktickému spracovaniu. Osvojenie matematiky je získané umenie narábania s matematickou myšlienkou.



Vzťah logiky k didaktike matematiky

Každá veda aplikuje logiku. Logika má vo vede nezastupiteľný **metodologický význam**. Každá veda v rámci svojho vývoja dospieva od určitých predpokladov k záverom, teda používa logiku.

Logika môže byť:

- ✚ Základom pre štruktúrnú výstavbu každej vedy; teda aj DM,
- ✚ Pracovnou metódou vo vnútri vedy.

Znalosti logiky sa vyžadujú pri analýze vnútornej štruktúry matematických celkov, pri ich didaktickom spracovaní a prispôbovaní výučbe.

Matematickú logiku môžeme chápať ako **cieľ ale aj ako prostriedok** pri vyučovaní matematiky.

Logické prvky sa musia stať organickou zložkou matematických činností pretože ju podstatne **zefektívňujú a spresňujú**.



Vzťah pedagogiky a didaktiky matematiky

Pedagogika v najširšom zmysle slova je **veda o výchove a vzdelávaní**.

Spoločná báza pedagogiky a matematiky: obe sa vyvíjajú z potrieb spoločnosti a jej tiež slúžia.

Obsah svojho predmetu čerpá DM **z matematiky**, základné **metódy** z **pedagogiky**.

Metódy didaktiky matematiky sú založené na **metódach všeobecnej didaktiky**, ale tiež na **špecifických metódach matematiky** (abstraktné dôkazy, dedukcia, indukcia,...).

Prvé zabezpečujú najmä **realizáciu didaktických zásad**, tie druhé pomáhajú **formovať a rozvíjať matematické činnosti**.



Vzťah psychológie a didaktiky matematiky

Práve s rozvojom poznatkov z psychológie súvisia viaceré nové trendy Všeobecne známe poznatky o:

- ✚ myslení,
- ✚ pamäti,
- ✚ vôli,
- ✚ pozornosti,
- ✚ záujmoch,
- ✚ motivácii,

- ✚ a ďalších zložkách komplexnej psychickej činnosti človeka, sú uplatniteľné pri vyučovaní matematiky.

Usporiadanie matematického učiva závisí:

- ✚ od jeho vnútornej logickej štruktúry,
- ✚ od princípu vekovej primeranosti.

Umenie maximálne využívať kapacitu nášho mozgu (prípadne pamäte, vôle, motivačné schopnosti...) je podložené znalosťou psychologickéj teórie a praxe.

S psychológiou úzko súvisia aj fyziológia a hygiena:

- ✚ **Fyziológia** skúma centrálnu nervovú sústavu, je založená na podmienených reflexoch. Aj osvojovanie myšlienkovkej činnosti a matematických znalostí prebieha formou podmienených reflexov. Výskumy funkcie mozgu dokázali, že ľavá pólguľa ovplyvňuje logicko-vedeckú činnosť a pravá emotívno-umeleckú činnosť. Z toho vyplýva, že pre učiteľskú profesiu sa najlepšie hodí univerzálny typ ľudí.

- ✚ **Hygiena** psychickej činnosti má zabrániť preťažovaniu žiakov na vyučovaní a pomôcť učiteľovi hľadať optimálne postupy intenzívnej pedagogickej činnosti. Zabezpečiť maximálnu efektívnosť činnosti a striedanie záťaže a regenerácie síl.



Vzťah didaktiky matematiky k dejinám matematiky

Dejiny matematiky majú pre didaktiku matematiky metodologický a ilustračný prínos. Uvádajú príklady spojenia matematiky so životom, odhaľujú proces tvorby matematických ideí závislosti na potrebách spoločnosti. Stručné historické poznámky na hodinách matematiky žiakov motivujú, vzbudzujú záujem o štúdium tejto vedy.

Ontogenéza kopíruje fylogenézu (prečo je dobré nazrieť aj do histórie)

Analýzou histórie matematiky môžeme získať užitočné predstavy o genéze a vývoji matematického myslenia a tieto potom ďalej aplikovať vo vyučovaní.

Podľa P. M. Erdnija: **„Rast stromu matematických znalostí v hlave jedného človeka bude úspešný len vtedy, keď v určitej miere zopakuje históriu rozvoja tejto vedy“.**

Keď sledujeme vývoj vzniku určitého matematického pojmu v histórii ľudstva, a následne pozorujeme myšlienkový proces u našich študentov, často nachádzame zaujímavú paralelu.

Môžeme to pozorovať a porovnávať na vývoji predmatematického myslenia z obdobia Egypta, Babylonu a Sumerov s myslením Grékov, Arabov a Európanov v neskoršom období.

Rozdielny prístup k matematickým problémom, a evidentný posun k abstraktnejšiemu mysleniu u Grékov, Arabov a Európanov je zrejmý z nasledujúcej tabuľky.

Niečo podobné môžeme sledovať aj vo vývoji matematického myslenia študentov. Od predmatematického experimentovania vo vzťahu k určitému problému, (v mladšom veku) prechádzajú postupne k systematickému a kauzálnemu matematickému mysleniu (v staršom veku).

	Egypt, Babylon	Grécko, Arabské štáty, Európa
motivácia	potreby praxe, stavby, kalendár	túžba vysvetliť príčiny javov
otázka	ako ? (zostrojť)	prečo? (je to tak a tak)
systém práce	experimentovanie, pokus, omyl, pozorovanie	cieľavedomé získavanie vedomostí a ich triedenie
nástroj	ruka, pamäť, trpezlivosť	uvažovanie, použitie kauzality
predstavy	predmetné, konkrétne	abstraktné, idealizované
výsledky	náhodilé, mozaikové	systematizované a hierarchizované

- Pri zavádzaní nových matematických pojmov sa dá čerpať z histórie veľa názorných príkladov a podnetov. Často pozorujeme, ako **grafické znázorňovanie matematických pojmov predchádzalo historicky ich algebraickému znázorňovaniu (zápisu)** a toto poznanie nás oprávňuje domnievať sa, že aspoň niektorým žiakom môžu grafické ilustrácie aritmetických zákonitostí, čerpané z histórie pomôcť pri štúdiu.

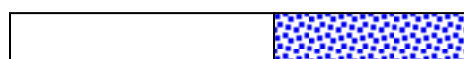
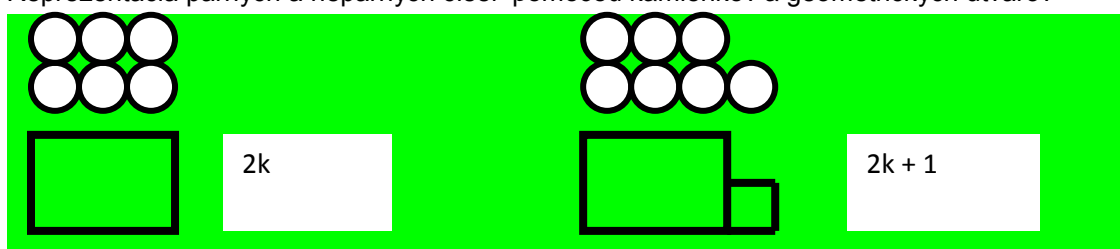
- Môžeme študentom prezentovať, ako sa v historickom kontexte niektoré pojmy budovali, a na základe toho priviesť študentov až k dnešnej podobe definície či vzťahu. Môžeme dokonca čo-to odkopírovať z myslenia a prístupu niektorého zo známych matematikov a inšpirovať študentov, aby kráčali po jeho stope k riešeniu. V tomto smere sa dajú v súčasnosti využiť široké možnosti Internetu, ktorý ponúka na niektorých svojich stránkach veľmi pútavé a názorné informácie o známych matematikoch, ich živote a diele. Vhodné je použiť napríklad stránku www.math.muni.cz/~sisma/history/uvod.html

Pytagoras (-500) : „ Najmúdrejšie je číslo“

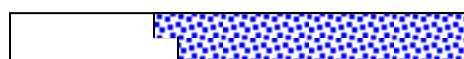
Aj keď ho väčšina ľudstva spája predovšetkým s objavom odpovede na otázku: kedy je určitý trojuholník pravouhlý - známou Pytagorovou vetou, preslávil sa rôznymi prácami z teórie čísel, aritmetikou figurálnych čísel, objavom iracionálneho čísla a tzv. teóriou párnych a nepárnych čísel, ktoré reprezentoval kamienkami. Práve toto jeho znázornenie čísla dalo základ neskoršiemu zapisovaniu čísel v tvare $(2k)$ – pre čísla párne a $(2k+1)$ pre čísla nepárne. Pytagorovu myšlienku reprezentácie párnych a nepárnych čísel môžeme dobre využiť pri vysvetľovaní a dokazovaní niektorých viet z aritmetiky a elementárnej teórie čísel, ako sú napríklad:

- súčet dvoch párnych čísel je číslo párne
- súčet dvoch nepárnych čísel je číslo párne
- súčet nepárneho a párneho čísla je číslo nepárne

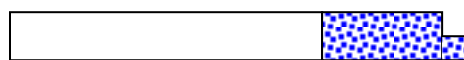
Reprezentácia párnych a nepárnych čísel pomocou kamienkov a geometrických útvarov



$$2k+2m=2(k+m)$$



$$2k+1+2m+1=2(k+m+1)$$

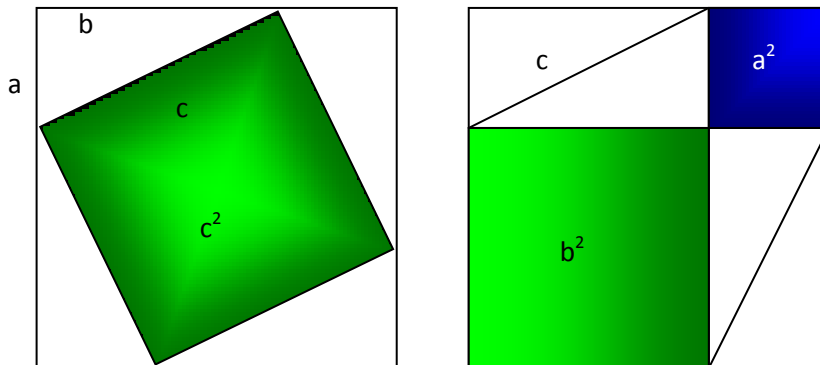


$$2k+2m+1=2(k+m)+1$$

Názorný dôkaz tvrdenia a), b), c)

Uvedieme jeden z mnohých geometrických dôkazov Pytagorovej vety, ktoré je možné nájsť na internetovej stránke www.cut-the-knot.org/pythagoras/morey.shtml - nachádza sa ich tu viac ako 40. Môžeme ich použiť pri opakovaní a prehĺbovaní učiva o pravouhlom trojuholníku na SŠ. Výhodou týchto dôkazov je, že umožňujú rozvoj tvorivého myslenia študentov a súčasne umožňujú zopakovanie základných vlastností niektorých ďalších rovinných útvarov (mnohouholníkov, lichobežníkov, atď.). Nižšie uvedený dôkaz pochádza od samotného Pytagorasa.

Dôkaz Pytagorovej vety



Obsah štvorca so stranou $(a + b)$ sa rovná $S = (a + b)^2$ tento štvorec sa však skladá zo štvorca so stranou c a štyroch trojuholníkov, ktorých obsah je $S = a \cdot b / 2$.

Platí teda :

$$(a + b)^2 = c^2 + 4 \cdot ab / 2 = c^2 + 2 ab$$

Súčasne podľa druhého obrázku platí: $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

Porovnaním oboch rovností dostávame: $c^2 + 2 ab = a^2 + b^2 + 2ab \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$