Prednáška č.3

Kľúčové slová:_**výstavba matematiky, logické zásady úsudkové schémy, logické konštrukcie, axiomatická sústava a jej vlastnosti, Gödelova veta, pojem a pojmotvorný proces v matematike**_

Výstavba matematiky

Z matematických disciplín bola solídne podložená prvá geometria. Euklidov pokus vybudovať geometriu prísne deduktívne z axiomatickej sústavy bol na svoju dobu pozoruhodný.

Z metodologických dôvodov má axiomatizácia vednej disciplíny veľký význam.

Euklidovská geometria je matematická teória, ktorej základy položil grécky matematik Euklides z Alexandrie. Euklidove zväzky *Základy* boli prvou systematickou diskusiou geometrie. Bol to jeden z najvplyvnejších súborov kníh v histórii, tak kvôli jeho metóde, ako aj matematickému obsahu. Metóda pozostáva z predpokladu niekoľkých intuitívne platných axiómov a dôkazu množstva iných tvrdení (viet) z týchto axiómov. Aj keď veľa z Euklidových výsledkov bolo známych gréckym matematikom pred ním, Euklid bol prvý, ktorý ukázal ako tieto tvrdenia tvoria spolu komplexný deduktívny systém.

Základy začínajú geometriou v rovine, ktorá sa stále učí na stredných školách ako prvý axiomatický systém a prvé príklady formálnych dôkazov. Neskôr Euklides popisuje geometriu telies v troch rozmeroch a následne rozširuje na ľubovoľný konečný počet rozmerov. Mnoho z výsledkov v *Základoch* sú dnes tvrdeniami v teórii, ktorú voláme teória čísel a Euklides ich dokazoval geometrickými metódami.

Po vyše dvetisíc rokov bolo prídavné meno „euklidovská“ zbytočné, pretože sme nepoznali žiadnu inú geometriu. Euklidove axiómy sa zdali tak intuitívne samozrejmé, že každá veta z nich dokázaná sa považovala za pravdivú v absolútnom zmysle.

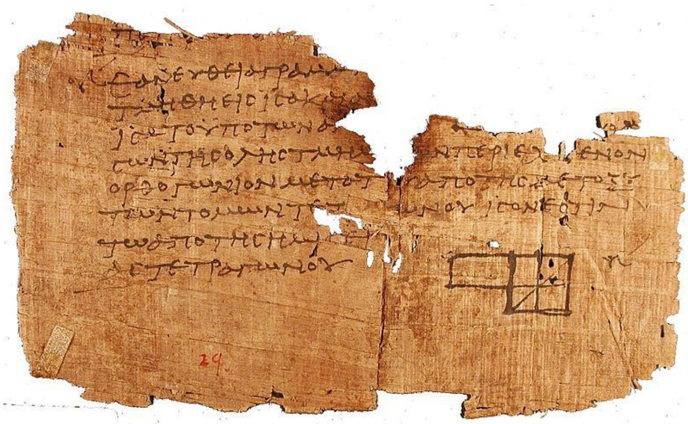
Dnes však poznáme mnoho iných konzistentných formálnych geometrií, z ktorých prvé boli zostrojené v začiatkoch 19. storočia. V dnešnej dobe už ani nepovažujeme euklidovskú geometriu za tak samozrejmú pre popis fyzikálneho priestoru. Dôsledok Einsteinovej všeobecnej teórie relativity je, že euklidovská geometria je výborná aproximácia vlastností fyzikálneho priestoru, ale len v prípadoch, keď gravitačná sila nie je príliš silná.

Axiomatický prístup

Na začiatku prvej knihy *Základov*, Euklides podáva päť postulátov (axiómov):

1. Ľubovoľné dva body sa dajú spojiť úsečkou.
2. Ľubovoľná úsečka sa dá nekonečne predĺžiť.
3. Ak je daná ľubovoľná úsečka, môžeme nakresliť kružnicu, ktorá bude mať túto úsečku ako polomer a jeden koniec bude jej stred.
4. Všetky pravé uhly sú zhodné.
5. Postulát o rovnobežnosti. Keď dve priamky pretínajú tretiu tak, že súčet vnútorných uhlov na niektorej strane je menší ako dva pravé uhly, potom tieto dve priamky sa musia nutne pretnúť práve na tejto strane.

Tieto axiómy evokujú koncepty bodu, priamky, úsečky, strany priamky, kružnice s polomerom a stredom, pravého uhlu, zhodnosti, vnútorných uhlov a súčtu. Objavujú sa tieto slovesá: spojiť, predĺžiť, nakresliť, pretnúť. Kružnica v postuláte 3 je implicitne jedinečná. Postuláty 3 a 5 platia iba pre rovinnú geometriu, pričom v troch rozmeroch postulát 3 nedefinuje kružnicu, ale guľu. Euklides používal pojmy priamka, polpriamka, úsečka a čiara bez rozdielu.



 ***Logické zásady*** (požiadavky nespornosti sústavy)

- Zásada postačujúceho dôvodu (každý pravdivý výrok musí mať postačujúce odôvodnenie)
- Zásada totožnosti (aby sa každý pojem používal vždy v rovnakom zmysle)
- Zásada sporu (nemôže byť súčasne pravdivý výrok a jeho negácia; dva odporujúce si výroky nemôžu byť súčasne správne)
- Zásada vylúčenia tretieho (musí byť pravdivý buď daný výrok alebo jeho negácia)

Zásady logickej dedukcie a úsudkové schémy

- Výrok, ktorý možno odvodiť zo správnych výrokov, je správny.
- Výrok, ktorého negácia je správna, je nesprávny.
- Výrok, ktorého negácia je nesprávna, je správny.
- Výrok, z ktorého možno odvodiť nesprávny výrok je nesprávny.

Úsudkové schémy: implikačný, sylogistický, substitučný a identifikačný úsudok. Uvedené zásady a úsudkové schémy zabezpečujú postup pri logickom odvodzovaní výrokov.

Logická konštrukcia je dôkazom existencie určitého nového prvku

Definíciou sa zvyčajne rozumie vymedzenie obsahu a rozsahu nejakého pojmu. Do úvah zavádzame v matematike nové pojmy najčastejšie definíciou. Budeme predpokladať, že termín je definovaný, ak je stanovený jeho význam.

Definícia slúži na vymedzenie významu termínu.
Axióma je prvotný východiskový výrok, ktorý netreba dokazovať. Ak nájdeme v nejakej vednej disciplíne skupinu tvrdení, z ktorej môžeme odvodiť všetky ostatné vety tejto disciplíny bez toho, aby sme pritom použili nejaké iné prostriedky, tak môžeme tieto tvrdenia prehlásiť za axiómy uvažovanej disciplíny. Hovoríme potom, že táto vedná disciplína je axiomaticky podložená.

Axiomatická sústava a jej vlastnosti

Axiomatickou sústavou sa rozumie sústava axióm, na ktorej je vybudovaná vedná disciplína a ktorá má tri základné vlastnosti:
Základom logickej výstavby matematiky je **sústava axióm.** Axiómy sú výroky, ktorých pravdivosť predpokladáme. Pojmy, ktoré sa v axiómach používajú, a ktoré nie sú definované, nazývame **primitívne** (*základné*) *pojmy.* Sústava axióm musí spĺňať

1. ***nespornosť*** (zo sústavy axióm nemôžeme vyvodiť výrok a súčasne jeho negáciu),

2. ***nezávislosť*** (nemôžeme odvodiť axiómu z ostatných axióm, každá z axióm je nezávislá od ostatných – požiadavka nezávislosti redukuje počet axióm),

3. ***úplnosť*** (zo sústavy axióm je možné dokázať pravdivosť, alebo nepravdivosť každého matematického výroku, ktorý nie je axióma).

Axiomatická sústava sa nazýva úplná, ak každé dva modely z nej vybudovaných vedných disciplín sú navzájom izomorfné, čo znamená, že medzi prvkami oboch modelov existuje jednojednoznačné priradenie. Ak je axiomatická sústava úplná, môžeme disciplínu z nej vybudovanú študovať na ktoromkoľvek jej modeli.Táto skutočnosť má práve pre matematiku veľký význam.

Obsah matematiky, pojem a pojmotvorný proces

- Relatívny pojem (teoretická a aplikovaná matematika); matematické poznanie, matematické pojmy, pojmotvorný proces, indukcia a dedukcia, matematické vety, dôkazy matematických viet.

Pojem – v procese odrazu vlastností objektov vzniká v mozgu človeka osobitná forma myslenia, ktorá sa nazýva pojem.

- Pojem je produkt vysokoorganizovanej hmoty.
- Pojem odráža materiálny svet.
- Pojem predstavuje v poznaní prostriedok zovšeobecnenia.
- Pojem označuje špecifickú ľudskú činnosť.
- Utváranie pojmu vo vedomí človeka je neoddeliteľné od jeho vyjadrenia prostredníctvom reči, písma alebo symbolu.

Každý matematický pojem má určitý ***obsah*** a ***rozsah.***

Obsah pojmu tvorí súhrn všetkých vlastností, ktoré sú pre tento pojem charakteristické; uvažujme napríklad o pojme „rovnobežník“. Obsah tohto pojmu je určený vlastnosťami:

- rovinný obrazec, geometrický útvar,
- ohraničený štyrmi úsečkami,
- protiľahlé strany sú zhodné,
- protiľahlé uhly sú zhodné,
- uhlopriečky sa navzájom rozpoľujú atď.

Obsah pojmu je teda množina všetkých vlastností pojmu, z ktorých každý je nevyhnutný a všetky spolu sú postačujúce na vymedzenie pojmu.

Rozsahom pojmu je množina všetkých objektov, ktoré majú vlastnosti stanovené obsahom pojmu.

(Rozsahom pojmu rovnobežník sú všetky rovnobežníky najrozličnejších tvarov; obdĺžniky, kosoštvorce, kosodĺžniky narysované v zošite, ale aj zhotovené z dreva, papiera, myslené...).

Ak je ***rozsah r*** jedného pojmu ***P_1*** obsiahnutý v ***rozsahu r*** druhého pojmu ***P_2,*** tak druhý pojem ***P_2*** je ***rodom*** a prvý pojem ***P_1*** sa nazýva ***druhom*** (druhovým pojmom) vzhľadom na pojem ***P_2.***

Každá zmena v obsahu pojmu znamená zmenu v rozsahu pojmu.

Pojmy a termíny

Slovo je nositeľom pojmu. Slovo označujúce presne určený pojem z ľubovoľnej oblasti vedy alebo techniky sa nazýva ***vedeckým termínom***. Napríklad slovo *„kosoštvorec“* je matematický termín.
Symbolika a reč musia vyjadrovať daný termín jednoznačne. (pri matematickom vyjadrovaní treba dávať pozor hlavne na *homonymá* napr. slovo „koreň“ a *synonymá* „štvorec = pravidelný štvoruholník“.)

Definovanie pojmov

Vymenovanie nevyhnutných a postačujúcich znakov matematického pojmu redukovaných v súvislú vetu (rečou alebo symbolicky) nazveme definíciou matematického pojmu (matematického objektu).

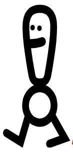
- ***Široká definícia;*** obsahuje menej znakov, ako je na presné vymedzenie pojmu nevyhnutné. Rozsah definovaného pojmu je nadmnožinou rozsahu pojmu, ktorý sme chceli definovať. Napríklad: Pravidelný šesťuholník je rovinný útvar, ktorý je ohraničený šiestimi zhodnými úsečkami.
- ***Úzka definícia;*** rozsah definovaného pojmu je podmnožinou rozsahu príslušného pojmu, ktorý sme chceli definovať. Napríklad: Iracionálne čísla sú druhými odmocninami čísel, ktoré nie sú druhými mocninami racionálnych čísel. (Iracionálnymi číslami sú však aj čísla π, e, väčšina logaritmov a goniometrických funkcií).

Nie sú správne ani definície takéhoto druhu:

- ***Priamka je čiara, ktorá má stále rovnaký smer.***
- ***Uhol je mierou sklonu.***
- ***Kolmé priamky sú tie, ktoré zvierajú pravý uhol.***

Vyskytujú sa v nich pojmy, ktoré sú rovnako nové ako zavádzaný pojem; pojem sa definuje pomocou pojmu, ktorý sa o definovaný pojem opiera. Hovoríme o

- ***Definovaní kruhom***



Definovanie každého pojmu môžeme sledovať vo vývoji ako proces približovania sa jedného pojmu k druhému. Pri tomto procese nevyhnutne prídeme k pojmom prvotným (základným), pričom postupnosť krokov je konečná.

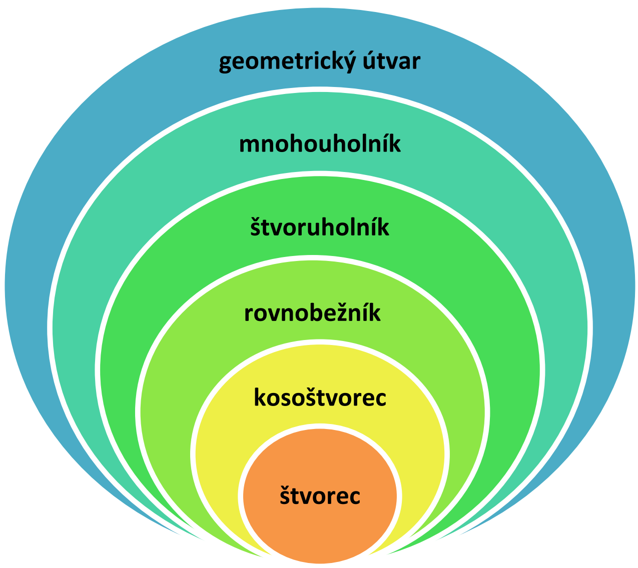
V postupnosti pojmov, ktoré dostaneme ako výsledok procesu definovania niektorého pojmu, každý pojem – od druhého začínajúc – má väčší rozsah ako pojem predchádzajúci.

Napríklad štvorec je špeciálny kosoštvorec, kosoštvorec je špeciálny rovnobežník, rovnobežník je špeciálny mnohouholník a mnohouholník je špeciálny geometrický útvar, geometrický útvar je množina bodov.

Niektoré prvotné pojmy nedefinujeme ako napríklad: množina, bod, rovina...

Proces zavádzania pojmov pomocou iných pojmov je názorný na Eulerovom diagrame

Eulerov diagram



Spôsoby definovania matematických pojmov

- Pomocou ***najbližšieho rodu*** a ***druhového znaku***, t.j. pomocou špecializácie iného pojmu – ***aristotelovská definícia.***
  Napríklad: *„Štvorec je pravouholník so zhodnými stranami"*.
- ***Syntetická definícia*** zavádza pre isté spojenie známych pojmov nový pojem, prípadne termín.
  Napríklad: *„Priamka, ktorá má s kružnicou spoločný bod sa nazýva dotyčnicou kružnice"*. *„Elipsa, parabola, hyperbola sú jednoduché kužeľosečky"*.

- ***Konštruktívna*** prípadne ***genetická*** definícia; v ktorej sa ukazuje tvorba nového objektu.
  Napríklad: *„Kružnica je množina všetkých bodov roviny, ktoré ležia v danej vzdialenosti od daného bodu ležiaceho v tejto rovine*“.
- ***Definícia pomocou abstrakcie*** sa uplatňuje v matematike na tom základe, že medzi určitými matematickými objektmi platí istý vzťah (symetrický, reflexívny, komutatívny,...), ktorý je spoločný všetkým prvkom istej množiny.
  Napríklad: „Rovnobežné priamky majú ten istý smer“. „Nekonečné spočiteteľné množiny sú ekvivalentné s množinou prirodzených čísel“.
- Mnohé matematické definície neuvádzajú definovaný pojem izolovane, ale uvádzajú ho v určitej súvislosti s inými pojmami (v kontexte). Takéto definície nazývame ***kontextuálne***.
  Napríklad: „n – tá odmocnina z nezáporného čísla a je také nezáporné číslo x, pre ktoré platí $\boldsymbol{x^n = a}$ “.
- V súčasnej matematike sa často používajú ***induktívne definície***.
  Napríklad: rekurentne definovaná postupnosť: $a_{n+1} = a_n + 3$, $a_1 = 5$.
  Potom členy tejto postupnosti sú: {5, 8, 11, 14,...}).

Klasifikácia pojmov

Prvky, ktoré majú tie isté charakteristické (základné) znaky a patria do rozsahu daného pojmu, tvoria množinu, ktorej prvky sa môžu od seba odlišovať ďalšími vedľajšími znakmi.
Pri triedení (klasifikácii) rozkladáme danú množinu (rozsahu rodového pojmu) na triedy (podmnožiny) podľa vedľajších vlastností (druhu).
Správna klasifikácia predpokladá dodržanie nasledujúcich zásad:

- Klasifikácia sa musí vykonať na základe určitého znaku, ktorý zostáva nezmenený počas celého procesu klasifikácie.
- Pojmy, ktoré dosiahneme v priebehu klasifikácie musia byť disjunktné.
- Triedenie musí zahrňovať všetky prvky príslušnej množiny (rozsahu pojmu), triedenie musí byť vyčerpávajúce a úplné.

Príklad. Zapíšte schému triedenia pojmu trojuholník podľa uhlov (podľa strán).

Metodika zavedenia matematických pojmov v školskej matematike

„Chápať neznamená byť divákom, ale konštruovať si svoje vlastné reprezentácie pojmov....väčšina žiakov, ktorí majú problémy na základnej škole s matematikou, si nevytvára žiaden typ reprezentácie matematických

problémov, ktoré sú im predstavované. Nech je forma vyučovania akákoľvek, pochopenie sa u žiaka nedostaví na základe vysvetľovania učiteľa „nepríde zvonku“. Žiak sám musí informáciu odovzdávanú učiteľom uchopiť, prijať a spracovať “. (Yves Bertrand, 1998).

Francúzsky matematik M. Fréchet napísal: ***“Ak je niečo skutočne nevyhnutné, tak je to odstránenie dogmatickej metódy – podávať žiakom definície bez ukazovania ako vznikli, prečo sú potrebné, ako sa využívajú.“***

- ***Konkrétno - induktívna metóda***

Podstatu metódy si prezentujme na príklade zavedenia matematického pojmu „rovnobežky“.

Etapy vyučovacieho procesu	*Psychologické stupne formulovania pojmu*	*Konkrétne slovné alebo symbolické vyjadrenie pojmu*
Vyhľadanie konkrétnych príkladov	***Vnem a pocit***	***železničné koľajnice, zárubne dverí***
Objasnenie rôznych podstatných a nepodstatných znakov daného pojmu. ***Preskúmanie osobitných prípadov, ak sú.*** ***Vysvetlenie termínu označujúceho daný pojem***	***Prechod od vnemu k predstave***	***Horizontálna poloha priamok – nepodstatný znak*** ***Rovnaká vzdialenosť od seba – podstatný znak*** ***Priamky, ktoré nemajú spoločný bod – podstatný znak*** ***Predlžovanie priamok na obe strany do nekonečna – nepodstatný znak*** ***Konštatuje sa, že rovnaké (totožné priamky)majú tiež rovnakú vzdialenosť (nula)*** ***Rovnobežný – z gréckeho slova „paralleles“ čo znamená vedľa seba***

Výber podstatných vlastností daného pojmu, formulácia „prvotnej“ definície – následné korekcie- spresnenie a vypracovanie „druhotnej“ definície.	***Prechod od predstavy k pojmu***	***1.Rovnobežné priamky – dvojica rovnako vzdialených priamok (nepresné).*** ***2. Rovnobežné priamky nemajú spoločný bod – (neúplné).*** ***3. Definícia: Dve priamky m, n patriace jednej rovine sa nazývajú rovnobežné, ak nemajú spoločný bod, alebo sú totžné,***
Ilustrácia pojmu na konkrétnych príkladoch; modely pojmu dynamické, statické, kontra príklad, symbol	***Vytváranie pojmu***	***1. Stupne schodov,*** ***2. Hrany kocky,*** ***3. Dosky podlahy***
Iné možnosti definovania daného pojmu	***Osvojovanie pojmu***	***Rovnobežné priamky, ktoré ležiace v jednej rovine, nemôžu mať ani jeden spoločný bod***

Abstraktno – deduktívna metóda

Pri zavádzaní pojmov, ktoré sú organicky späté s pojmami, ktoré žiaci už poznajú, môžeme využiť iný spôsob zavedenie pojmu, tzv. abstraktno – deduktívnu metódu.
Demonštrujeme na zavedení pojmu kvadratická rovnica.

1. krok: Vysloviť definíciu nového pojmu

- Rovnica tvaru $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$, $c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ sa nazýva kvadratická rovnica.
- Vysvetlíme termín, ktorým sa označuje (najväčší exponent neznámej sa rovná dvom; rovnica obsahuje druhú mocninu neznámej.

2. krok: Preskúmať zvláštne prípady takéhoto tvaru;

$x^2 + bx + c = 0$, $ax^2 + c = 0$, $ax^2 + bx = 0$, $ax^2 = 0$.

- Urobíme klasifikáciu tohto pojmu
- Ukážeme niektoré kontra príklady.

3. krok: Ilustrovať zavedený pojem konkrétnymi príkladmi: $2x^2 + 5x + 6 = 0$.
(pri každom konkrétnom príklade overujeme, či pojem zodpovedá definícii)

4. krok: Uviesť konkrétny príklad výskytu tohto pojmu: $gt^2 - 2s = 0$, slovné úlohy

Typické chyby žiakov pri osvojovaní pojmov

Pojem, ktorý zodpovedá definovanému objektu, sa nazýva definovaný a pojem, pomocou ktorého sa odhaľuje (ukazuje) obsah definovaného pojmu sa nazýva určujúci

- **Definícia nie je úmerná; rozsah definovaného pojmu nie je zhodný s rozsahom.**

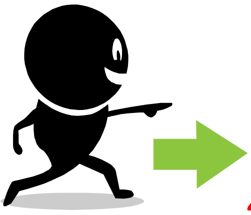
1. Rozsah určujúceho pojmu je širší ako rozsah definovaného pojmu.

Priemer kružnice je úsečka, ktorá spája dva body kružnice.

***2.* Rozsah určujúceho pojmu je užší ako rozsah definovaného pojmu.**

Kosoštvorcom nazývame pravouholník s dvoma susednými navzájom zhodnými stranami.

- **Definícia obsahuje bludný kruh.**
  Sčitovanie je operácia, ktorou určujeme súčet.
- **Definícia ako tautológia.**
  Pravý uhol je taký, ktorý má 90 °.
- **Definícia nemá byť záporná.**
  Mimobežné priamky sú priamky, ktoré sa nepretínajú, a nie sú rovnobežné.



Záverom

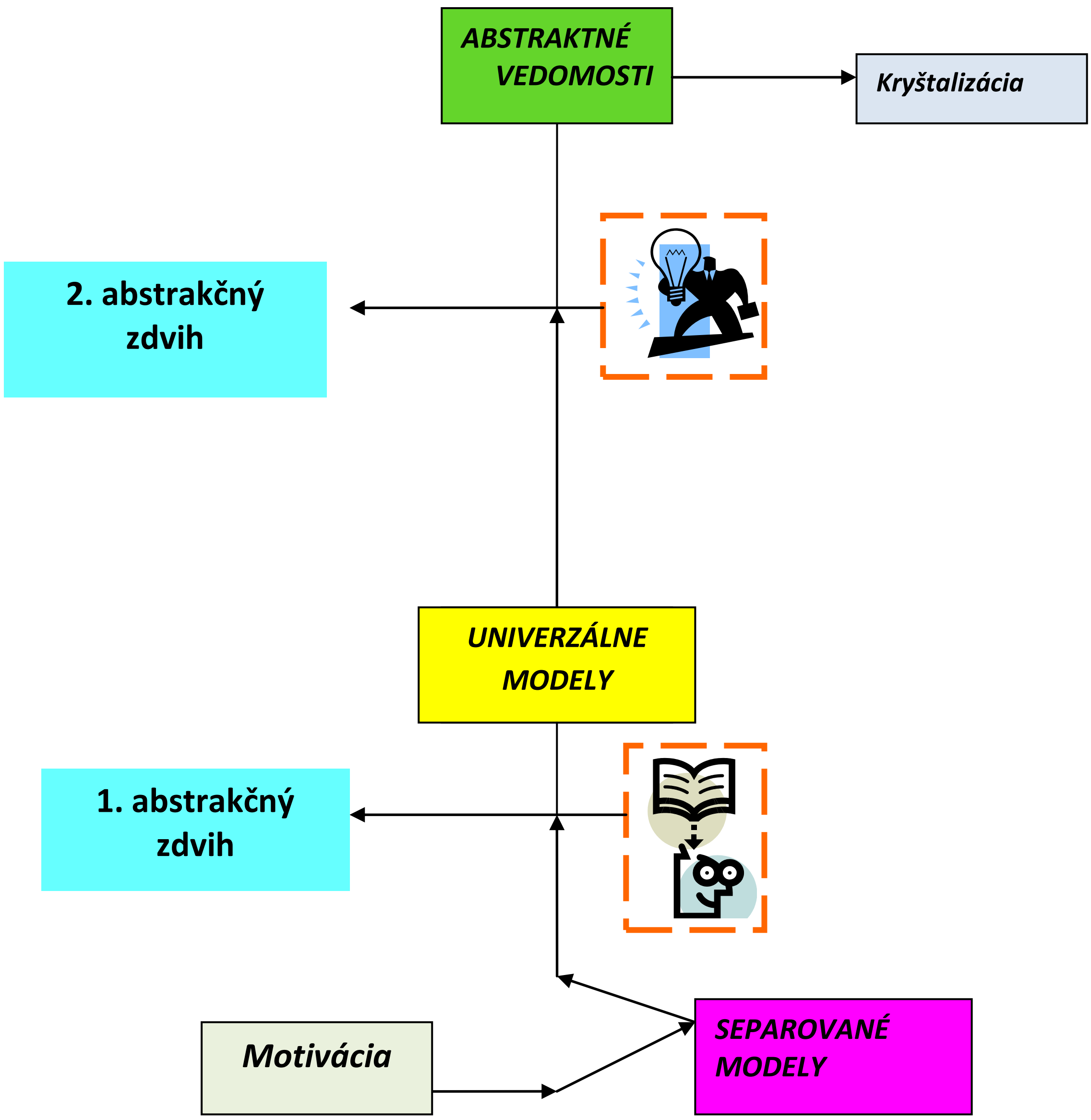
- ***Nové pojmy nezavádzať formálne, nové abstraktné pojmy detailne konkretizovať. Podľa možnosti používať konkrétno-induktívnu metódu.***
- ***Pojmy zavádzať pre žiakov najprirodzenejšou cestou.***
- ***Pojmy, termíny, definície treba motivovať a vysvetľovať, nedopustiť, aby si žiaci vytvárali nesprávne predstavy o zavedených pojmoch.***
- ***V priebehu štúdia nových pojmov treba odhaľovať vzťahy medzi novými pojmami a pojmami už známymi; poukazovať na analógie.***
- ***Na každej hodine opakovať žiakom známe definície, dôležité matematické pojmy, ktoré súvisia so študovanými pojmami.***
- ***Pri osvojovaní si učiva prísne sledovať reč a myslenie žiakov, vyžadovať presnosť, krátkosť a strohosť pri formulovaní definícií.***

Poznávací proces žiaka

Učenie môžeme chápať v súlade s Jiřím Marešem ako ***proces konštruovania poznatkových štruktúr*.** Takýto názor korešponduje s názorom na matematiku ako na štruktúru pozostávajúcu z axióm, definícií a viet podložených dôkazmi. Osvojovanie matematických schopností je úzko spojené s duševným výkonom žiaka a jeho podstatnou súčasťou je ***proces abstrakcie.***

Poznávací proces bol skúmaný mnohými bádateľmi. V tejto prednáške uvádzame ***konštruktívny prístup*** inšpirovaný prácou M. Hejného. Vychádza z toho, že v poznávacom procese človek zväčša najskôr vníma a pochopí niekoľko ***konkrétnych príkladov,*** všíma si a hľadá čo majú spoločné, až následne dochádza k obecnejším a abstraktným poznatkom. Schematicky to môžeme zaznamenať nasledovne:

Obrázok: Schéma poznávacieho procesu



Celú prvú fázu poznávacieho procesu a prechod k univerzálnym a abstraktným modelom musí sprevádzať názorný prístup učiteľa, aby podporil vznik kvalitnej predmetnej predstavy matematického pojmu.
Jadrom poznávacieho procesu sú ***dva mentálne zdvihy***.

Priebeh poznávacieho procesu, s uplatnením princípu názornosti v ňom, prezentujeme na príklade zavedenia súčtu prvých *n*- členov aritmetickej postupnosti. Učivo je zaradené do výučby po vyučovacích hodinách, na ktorých boli už vysvetlené pojmy: aritmetická postupnosť, diferencia aritmetickej postupnosti, vzťahy medzi členmi aritmetickej postupnosti.

Motivácia

Môžeme začať prezentáciou anekdoty o slávnom matematikovi K.F.Gaussovi, v ktorej sa hovorí, že keď navštevoval národnú školu, žiaci jeho triedy dostali za úlohu vypočítať súčet:

1 + 2 + 3 + ...+ 100 =

Učiteľ sa domnieval, že si urobí krátku pauzu. Toto mu však zmaril žiak Gauss, ktorý sa vzápätí prihlásil so správnym výsledkom 5050.

Separované modely

Separovanými modelmi sú v tomto prípade konkrétne aritmetické postupnosti. Necháme určovať žiakov súčty konkrétnych aritmetických postupností s menším počtom sčítancov. (napr.: 1 + 2 + 3 + ...+ 10 + 11 + 12 =) Ďalej im navrhneme „šikovný spôsob zápisu“ podľa príkladu mladého Gaussa:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 + & 2 + & 3 + & \ldots\ldots & + 99 & + 100 \\ 100 + & 99 + & 98 + & \ldots\ldots & + 2 & + 1 \\ \hline 101 & 101 & 101 & & 101 & 101 \end{array}$$

Teraz už zväčša sami študenti vypočítajú : $s_{100} = \frac{(101.100)}{2} = 5050$

Nechajme žiakov overiť daný postup na ďalších typoch aritmetických postupností;

(napr. pre súčet členov postupnosti: -30; -27; -24; -21; -18; -15; -12; -9; -6; -3).

1. abstrakčný zdvih:

Vyzveme študentov, aby zapísali vzťah pre n členov aritmetickej postupnosti z príkladu o Gaussovi. Bez akýchkoľvek ťažkostí študenti navrhnú vzorec na základe úvahy:

Nakoľko $s_n = 1 + 2 + \ldots + n = n + (n-1) + \ldots + 2 + 1$

platí teda $2s_n = (1+n).n$ *;*

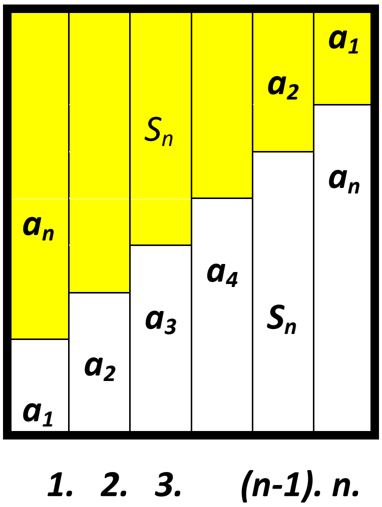
odkiaľ dostávame: $s_n = n.\frac{(1+n)}{2}$

Univerzálne modely

Následne upozorníme študentov, že v predchádzajúcom prípade sa jednalo o špeciálny typ aritmetickej postupnosti s diferenciou 1 a prvým členom $a_1 = 1$*, a že úvahu treba rozšíriť na obecný typ aritmetickej postupnosti* $\{a_n\}$ *s diferenciou d a prvým členom* a_1*. Aký tvar bude mať vzorec teraz? Úvahy* *študentov usmerňujeme otázkami ako: ktoré fakty o aritmetickej postupnosti musia byť známe, aby sme mohli vypočítať súčet konečného počtu jej členov?*

Môžeme vhodne využiť aj geometrický model, pomocou ktorého prídeme názorne k vzorcu pre n členov aritmetickej postupnosti, ak narysujeme jej členy ako obdĺžniky so šírkou 1 a výškou rovnajúcou sa hodnote príslušného člena postupnosti a_n.

Obrázok 2. Súčet členov aritmetickej postupnosti



Dvojnásobok súčtu radu $2s_n$ *sa rovná obsahu obdĺžnika s rozmermi (n) a* $(a_1 + a_n)$*. Na základe obrázku študenti zapíšu hľadaný vzorec:*

$$s_n = \frac{n.(a_1 + a_n)}{2} \qquad (1)$$

Na tomto mieste študenti konštatujú, že ***pre každú aritmetickú postupnosť platí vzorec (1)*** *čím prekonávajú* ***druhý abstrakčný zdvih*** *a vytvára sa u nich* ***abstraktná vedomosť.***

Teraz je vhodné, aby učiteľ zaradil do výučby exaktný matematický dôkaz vzorca.

Dôkaz: Zapíšeme súčet prvých n členov aritmetickej postupnosti dvoma spôsobmi a následne ich sčítame. Dostávame :

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n$$
$$s_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1$$
$$2s_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots\ldots(a_n + a_1)$$

Zo vzťahov pre súčet dvoch rôznych členov aritmetickej postupnosti vyjadríme:

$a_r + a_s = a_{r+1} + a_{s-1}$

nakoľko však $a_{r+1} = a_r + d$; $a_{s-1} = a_s - d$;
vyplýva z toho, že všetky súčty v zátvorkách sa rovnajú súčtu ($a_1 + a_n$).
Počet takýchto zátvoriek je práve n. Dostávame teda vzorec : $s_n = \dfrac{n.(a_1 + a_n)}{2}$

Kryštalizácia.

Pod týmto pojmom sa ukrýva začlenenie nového pojmu do štruktúry matematických pojmov. V našom konkrétnom príklade ide o začlenenie pojmu súčet konečného počtu členov aritmetickej postupnosti k tematickému celku postupnosti, odhalenie súvislostí a prepojenia nového vzorca s už známymi vzorcami z tohto tematického celku bolo ilustrované pri dôkaze.

Pokúsili sme sa ukázať, ako je možné pri zavádzaní nového pojmu zo stredoškolského učiva postupovať od konkrétneho k abstraktnému s použitím názorných prostriedkov. Samozrejme, že nie vždy sa nám podarí, hlavne na vyšších stupňoch vzdelávania problém vizualizovať pomocou vhodného obrázku, vždy je však možné použiť napríklad konkrétno-deduktívny alebo empiricko-konštruktívny spôsob výkladu nového pojmu, ktorý napomáha poznávaciemu procesu žiaka.

V nasledujúcom bližšie teoreticky vysvetlíme pojmy, ktoré sa nachádzajú v uvedenej schéme poznávacieho procesu žiaka.

Motivácia

„Niekde medzi ľahostajnosťou a vybičovanou aktivitou existuje optimálna úroveň vzbudenia pozornosti, ktorá je pre učenie najpriaznivejšia...Ako vzbudiť záujem dieťaťa o svet pojmov?...Posilniť vnútorný záujem o preberané učivo, vštepovať žiakom zmysel pre objavovanie, prekladať to, čo mu chceme povedať na myšlienkové formy a obrazy vlastné dieťaťu...“.

Separované modely

*Sú etapou **konkretizácie**. Model tu chápeme ako metodologický prostriedok k tomu, aby sme sa zorientovali v situácii. Túto fázu poznávacieho procesu nemožno bagatelizovať, nakoľko znalosť, ktorá nie je opretá o žiaden separovaný (konkrétny) model, o žiadnu konkrétnu predstavu, býva obvykle silne formálna a práve takýmto znalostiam sa chceme pri výučbe matematiky vyhnúť.*

Univerzálne modely

*Kým etapa separovaných modelov je vyslovene **etapou hľadania**, je etapa univerzálnych modelov **etapou nachádzania vzájomných súvislostí**. Pomocou prvého mentálneho zdvihu sa myšlienka posunie od konkrétneho ku všeobecnejšiemu; dostane sa na vyššiu úroveň. Univerzálny model má všeobecnejší charakter než ľubovoľný separovaný model, predstavuje už istý* *komplexný návod, vzorec, či algoritmus riešenia problému. Pre etapu univerzálnych modelov je teda charakteristické isté* ***zovšeobecnenie konkrétneho.***

Abstraktná vedomosť

Abstraktné vedomosti sú v najvyššom poschodí vzdelávacieho procesu. Doprajme žiakom zažiť ***pocit objavu, ktorý je aktom mentálnej konštrukcie.*** *Preveďme ich po ceste objavu dvoma abstrakčnými zdvihmi. Prvý zdvih pri budovaní pojmu je určitým* ***zobecnením*** *konkrétnej predstavy a dáva zrod univerzálnemu modelu. Druhý je už zbavený predmetných predstáv* ***je teda abstrakciou v pravom slova zmysle*** *a rodí sa z neho abstraktná vedomosť.*