Prednáška č.4

Kľúčové slová: ***poznávací proces študenta, motivácia, separované, univerzálne a abstraktné modely, kryštalizácia, automatizácia.***

„Škola nie je miesto, kde by dieťa malo získať čo najviac vedomostí bez akejkoľvek námahy. Koncept „školy hrou“ skôr žiada, aby škola využívala spontánne objavovanie schopností dieťaťa, a tak ho motivovala k „námahe – k vynakladaniu úsilia“, nie však, aby ho od akejkoľvek námahy ušetrila. Škola bez námahy a úsilia nie je žiaduca: predovšetkým v škole sa totiž môže dieťaťu vštepiť základná kultúra usilovnosti a snaženia sa o čokoľvek, ktorá je pre našu civilizáciu potrebná.“

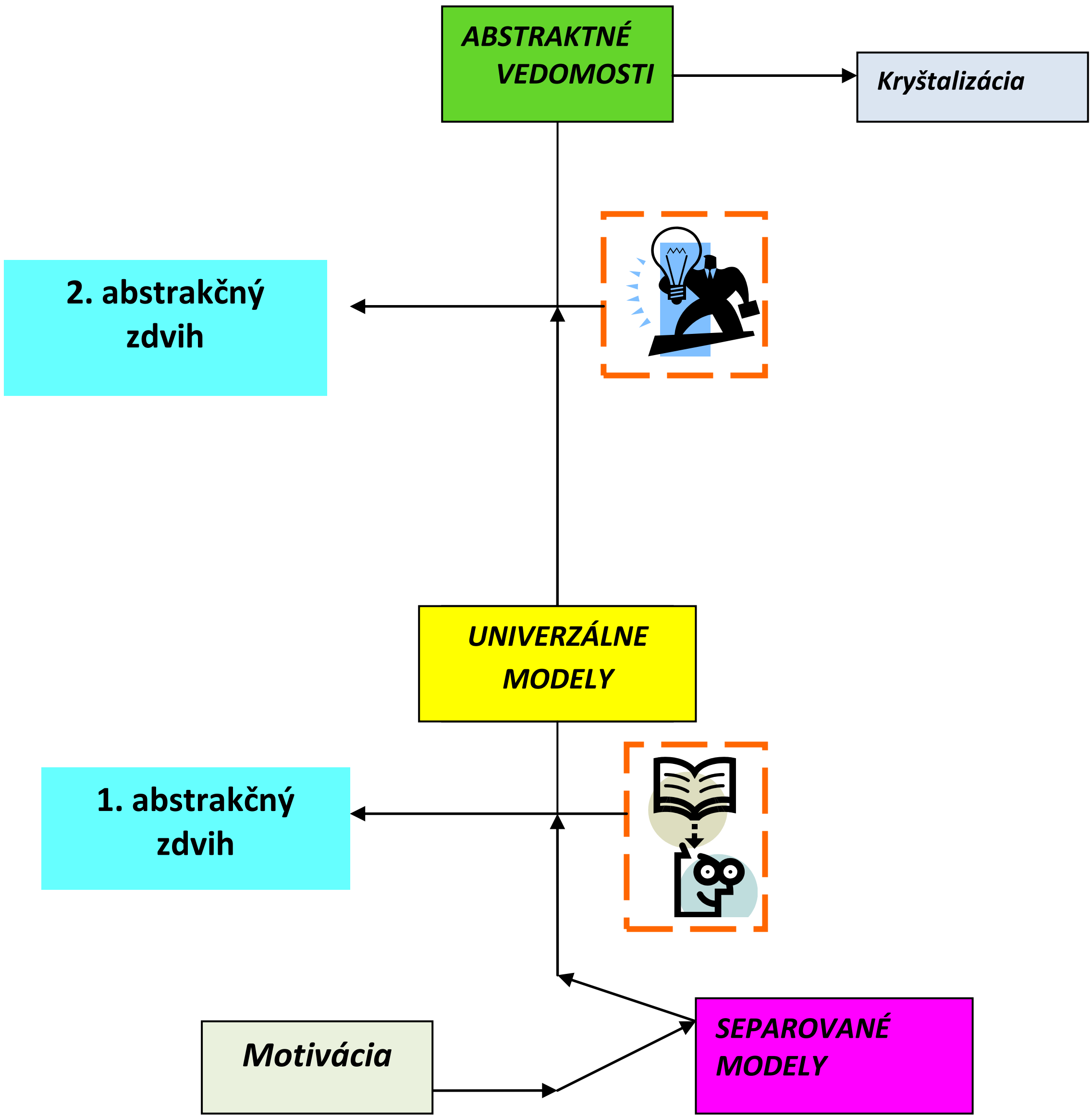
V. Jamka

Cesta k poznatkovej štruktúre žiaka

Učenie môžeme chápať v súlade s Jiřím Marešem ako *proces konštruovania poznatkových štruktúr*. Takýto názor koresponduje s názorom na matematiku ako na štruktúru pozostávajúcu z axióm, definícií a viet podložených dôkazmi. Osvojovanie matematických schopností je úzko spojené s duševným výkonom žiaka a jeho podstatnou súčasťou je *proces abstrakcie.*

Poznávací proces bol skúmaný mnohými bádateľmi. V tejto prednáške uvádzame *konštruktívny prístup* inšpirovaný prácou M. Hejného. Vychádza z toho, že v poznávacom procese človek zväčša najskôr vníma a pochopí niekoľko *konkrétnych príkladov,* všíma si a hľadá čo majú spoločné, až následne dochádza k obecnejším a abstraktným poznatkom.

Obrázok 1: Schéma poznávacieho procesu



Celú prvú fázu poznávacieho procesu a prechod k univerzálnym a abstraktným modelom musí sprevádzať názorný prístup učiteľa, aby podporil vznik kvalitnej predmetnej predstavy matematického pojmu.
Jadrom poznávacieho procesu sú ***dva mentálne zdvihy***.

Priebeh poznávacieho procesu, s uplatnením princípu názornosti v ňom, prezentujeme na príklade zavedenia súčtu prvých n - členov aritmetickej postupnosti. Učivo je zaradené do výučby po vyučovacích hodinách, na ktorých boli už vysvetlené pojmy: aritmetická postupnosť, diferencia aritmetickej postupnosti, vzťahy medzi členmi aritmetickej postupnosti.

Motivácia

Môžeme začať prezentáciou anekdoty o slávnom matematikovi K.F.Gaussovi, v ktorej sa hovorí, že keď navštevoval národnú školu, žiaci jeho triedy dostali za úlohu vypočítať súčet:

1 + 2 + 3 + ...+ 100 =

Učiteľ sa domnieval, že si urobí krátku pauzu. Toto mu však zmaril žiak Gauss, ktorý sa vzápätí prihlásil so správnym výsledkom 5050.

Separované modely

Separovanými modelmi sú v tomto prípade konkrétne aritmetické postupnosti. Necháme určovať žiakov súčty konkrétnych aritmetických postupností s menším počtom sčítancov. (napr.: 1 + 2 + 3 + ...+ 10 + 11 + 12 =)

Ďalej im navrhneme „šikovný spôsob zápisu“ podľa príkladu mladého Gaussa:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 + & 2 + & 3 + & \dots\dots\dots & + 99 + & 100 \\ 100 + & 99 + & 98 + & \dots\dots\dots & + \ 2 + & 1 \\ \hline 101 & 101 & 101 & & 101 & 101 \end{array}$$

Teraz už zväčša sami študenti vypočítajú : $s_{100} = \frac{(101.100)}{2} = 5050.$

Nechajme žiakov overiť daný postup na ďalších typoch aritmetických postupností;

***(napr. pre súčet členov postupnosti*: -30; -27; -24;-21;-18; -15; -12; -9; -6; -3).**

1. abstrakčný zdvih:

Vyzveme študentov, aby zapísali vzťah pre n členov aritmetickej postupnosti z príkladu o Gaussovi. Bez akýchkoľvek ťažkostí študenti navrhnú vzorec na základe úvahy:

Nakoľko $s_n = 1 + 2 + \dots + n = n + (n - 1) + \dots + 2 + 1$

platí teda $2s_n = (1 + n).n$;

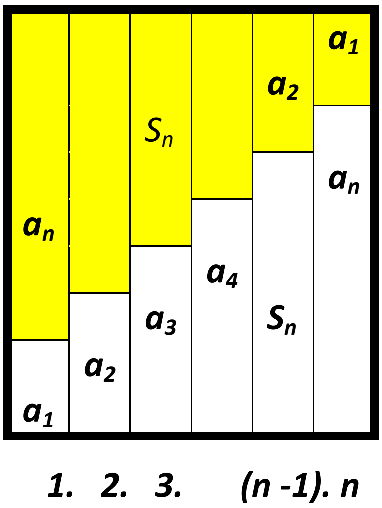
odkiaľ dostávame: $s_n = n.\frac{(1+n)}{2}$

Univerzálne modely

Následne upozorníme študentov, že v predchádzajúcom prípade sa jednalo o špeciálny typ aritmetickej postupnosti s diferenciou 1 a prvým členom a_1 = 1, a že úvahu treba rozšíriť na obecný typ aritmetickej postupnosti $\{a_n\}$ s diferenciou d a prvým členom a_1. Aký tvar bude mať vzorec teraz? Úvahy študentov usmerňujeme otázkami ako: ktoré fakty o aritmetickej postupnosti musia byť známe, aby sme mohli vypočítať súčet konečného počtu jej členov?

Môžeme vhodne využiť aj geometrický model, pomocou ktorého prídeme názorne k vzorcu pre n členov aritmetickej postupnosti, ak narysujeme jej členy ako obdĺžniky so šírkou 1 a výškou rovnajúcou sa hodnote príslušného člena postupnosti a_n.

Obrázok 2. Súčet členov aritmetickej postupnosti



Dvojnásobok súčtu radu $2s_n$ sa rovná obsahu obdĺžnika s rozmermi (n) a $(a_1 + a_n)$. Na základe obrázku študenti zapíšu hľadaný vzorec:

$$s_n = \frac{n.(a_1 + a_n)}{2} \qquad (1)$$

*Na tomto mieste študenti konštatujú, že **pre každú aritmetickú postupnosť platí vzorec (1)** čím prekonávajú **druhý abstrakčný zdvih** a vytvára sa u nich **abstraktná vedomosť.***

Teraz je vhodné, aby učiteľ zaradil do výučby exaktný matematický dôkaz vzorca.

Dôkaz.* *Zapíšeme súčet prvých n členov aritmetickej postupnosti dvoma spôsobmi a následne ich sčítame. Dostávame :

$$s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$$
$$s_n = a_n + a_{n-1} + ... + a_1$$
$$2s_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + ...(a_n + a_1)$$

Zo vzťahov pre súčet dvoch rôznych členov aritmetickej postupnosti vyjadríme:

$a_r + a_s = a_{r+1} + a_{s-1}$

nakoľko platí: $a_{r+1} = a_r + d$; $a_{s-1} = a_s - d$;

zisťujeme, že všetky súčty v zátvorkách sa rovnajú súčtu ($a_1 + a_n$).

Počet takýchto zátvoriek je práve n. Dostávame teda vzorec : $s_n = \frac{n.(a_1 + a_n)}{2}$

Kryštalizácia.

Pod týmto pojmom sa ukrýva začlenenie nového pojmu do štruktúry matematických pojmov. V našom konkrétnom príklade ide o začlenenie pojmu súčet konečného počtu členov aritmetickej postupnosti k tematickému celku postupnosti, odhalenie súvislostí a prepojenia nového vzorca s už známymi vzorcami z tohto tematického celku bolo ilustrované pri dôkaze.

Ukázali sme, ako je možné pri zavádzaní nového pojmu zo stredoškolského učiva postupovať od konkrétneho k abstraktnému s použitím názorných prostriedkov. Samozrejme, že nie vždy sa nám podarí, hlavne na vyšších stupňoch vzdelávania problém vizualizovať pomocou vhodného obrázku, vždy je však možné použiť napríklad konkrétno-deduktívny alebo empiricko-konštruktívny spôsob výkladu nového pojmu, ktorý napomáha poznávaciemu procesu žiaka.

V nasledujúcom bližšie teoreticky vysvetlíme pojmy, ktoré sa nachádzajú v uvedenej schéme poznávacieho procesu žiaka.

Motivácia

„Niekde medzi ľahostajnosťou a vybičovanou aktivitou existuje optimálna úroveň vzbudenia pozornosti, ktorá je pre učenie najpriaznivejšia...Ako vzbudiť záujem dieťaťa o svet pojmov?...Posilniť vnútorný záujem o preberané učivo, vštepovať žiakom zmysel pre objavovanie, prekladať to, čo mu chceme povedať na myšlienkové formy a obrazy vlastné dieťaťu...“.

„Pristupuj k vyučovaniu len vtedy, ak bola predtým u žiakov silne podnietená chuť učiť sa.“ (J. A. Komenský)

Separované modely

Sú etapou konkretizácie. Model tu chápeme ako metodologický prostriedok k tomu, aby sme sa zorientovali v situácii. Túto fázu poznávacieho procesu nemožno bagatelizovať, nakoľko znalosť, ktorá nie je opretá o žiaden

separovaný (konkrétny) model, o žiadnu konkrétnu predstavu, býva obvykle silne formálna a práve takýmto znalostiam sa chceme pri výučbe matematiky vyhnúť.

Univerzálne modely

Kým etapa separovaných modelov je vyslovene etapou hľadania, je etapa univerzálnych modelov etapou nachádzania vzájomných súvislostí. Pomocou prvého mentálneho zdvihu sa myšlienka posunie od konkrétneho ku všeobecnejšiemu; dostane sa na vyššiu úroveň. Univerzálny model má všeobecnejší charakter než ľubovoľný separovaný model, predstavuje už istý komplexný návod, vzorec, či algoritmus riešenia problému. Pre etapu univerzálnych modelov je teda charakteristické isté zovšeobecnenie konkrétneho.

Abstraktná vedomosť

Abstraktné vedomosti sú v najvyššom poschodí vzdelávacieho procesu. Doprajme žiakom zažiť pocit objavu, ktorý je aktom mentálnej konštrukcie. Preveďme ich po ceste objavu dvoma abstrakčnými zdvihmi. Prvý zdvih pri budovaní pojmu je určitým zovšeobecnením konkrétnej predstavy a dáva zrod univerzálnemu modelu. Druhý je už zbavený predmetných predstáv je teda abstrakciou v pravom slova zmysle a rodí sa z neho abstraktná vedomosť.

Automatizácia

Štandardné matematické operácie, manipulatívne činnosti s číslami a matematickými objektmi (počítanie, precvičovanie rutinných výpočtov) sú výsledkom automatizácie a sú dôležitou súčasťou vyučovania matematiky.
Pri riešení zložitejších matematických úloh je naša pozornosť zameraná predovšetkým na stratégiu riešenia problému. Táto činnosť vyžaduje vysoké intelektuálne nasadenie. Na druhej strane kalkulatívne kroky robíme s nepatrným výdajom
duševnej energie, pretože úpravy číselných a algebrických výrazov máme zautomatizované.
Cieľom vyučovania matematiky má byť predovšetkým rozvoj kognitívnych schopností žiaka a preto treba nájsť správnu mieru medzi kladením dôrazu nato, aby sme naučili žiakov počítať a aby sme pritom súčasne neobetovali tomuto cieľu to podstatné – rozvoj kognitívnej štruktúry žiaka.