Prednáška č.5

Kľúčové slová: ***didaktické zásady vo vyučovaní matematiky, osvojovanie si matematických poznatkov a matematického jazyka, rozvoj matematického myslenia***

„Myslím, že vyučovanie matematiky, tak ako každé vyučovanie, by sa malo riadiť aspoň touto zásadou: V nadväznosti na prirodzenú túžbu mládeže by ju malo viesť pomaly k vyšším poznatkom a nakoniec k abstraktným formuláciám po tej istej ceste, po ktorej sa ľudstvo vyšvihlo z pôvodného stavu naivity k vyššiemu poznaniu.“

F. Klein

Didaktické zásady vo vyučovaní matematiky

Zásada vedeckosti

- *učivo má zodpovedať súčasnému stavu matematiky ako vedy,*
- *ide o rešpektovanie logiky a systému poznatkov, aby sa nové odvodzovalo z už známeho,*
- *stupne vedeckosti treba zladiť s úrovňou schopností žiakov*

Čo môže urobiť učiteľ:

- *dbá o korektnosť formulácií definícií matematických pojmov a viet, o správne používanie matematického jazyka*
- *vedie žiakov k tomu, aby sa kriticky pozerali na každé tvrdenie, zdôvodňovali ho, dokazovali.*

Zásada uvedomelosti (uvedomelého osvojovania si učiva)

- *Ddôraz nato, aby sa žiaci zmocňovali vedomostí uvedomene a aktívne,*
- *snaha o hlboké pochopenie učiva a schopnosť používať ho v nových situáciách.*

Čo môže urobiť učiteľ:

- *overovanie si, či žiaci dostatočne učivu porozumeli,*
- *dôraz na aplikáciu spätnej väzby,*
- *predchádzanie formalizmu vo vyučovaní matematiky.*

- ***Zásada primeranosti***
  - ***Obsah a rozsah matematického učiva, jeho náročnosť a spôsob vyučovania zodpovedá stupňu psychického rozvoja žiaka a podmienkam, v ktorých sa vyučovanie koná.***
  - ***V školskej matematike kvalita určuje kvantitu. (menej a dôkladne)***

Čo môže urobiť učiteľ:

  - ***Dôsledne dbá na usporiadanie učiva v didaktickej postupnosti, vychádza z poznatkov o psychickom rozvoji žiaka.***

- ***Zásada názornosti***
  - ***Všeobecná zásada názornosti kladie požiadavku, aby si žiaci utvárali predstavy a pojmy na základe bezprostredného vnímania predmetov a javov reálneho sveta. Matematika je však abstraktná veda – študuje zidealizované objekty a vzťahy medzi nimi. Je preto nevyhnutné, využiť každú možnosť na znázornenie matematických objektov (pojmov).***
  - ***Pre názornosť môže poslúžiť aj opis objektu, vzťahu, výklad dôkazu, algoritmu***

Čo môže urobiť učiteľ:

Môže využívať vo vyučovaní všetky dostupné prostriedky názornosti ako sú:

a) ***náčrty***
b) ***grafy***
c) ***schémy***
d) ***tabuľky***
e) ***modely***
f) ***množinovo-logicky jazyk***
g) ***IKT***
h) ***mentálne mapy.***

- ***Zásada sústavnosti***
  - ***Zásada sústavnosti v školskej matematike vyžaduje, aby sa základy matematiky a jej teórie vysvetľovali v logickom usporiadaní. Matematika má prísnu vnútornú logickú štruktúru a jej väzby sa musia premietnuť aj do učebného predmetu. Roztrieštenie učiva a jeho neusporiadanosť je neprípustná***
- ***Zásada dôkladnosti***
  - ***Zásada dôkladnosti vo vyučovaní matematiky žiada, aby učivo bolo osvojované v potrebnom rozsahu a v postačujúcej hĺbke.***
  - ***Matematické znalosti sú účinné len vtedy, ak ich konzument je schopný samostatne a správne uplatňovať osvojený aparát všade tam, kde je jeho použitie možné a účelné.***

Čo môže urobiť učiteľ:
Upozorňuje žiaka na kontext určitých preberaných matematických pojmov s pojmami ďalšími a na možnosti aplikácií preberaných pojmov.

- ***Zásada trvácnosti***

  Zásada trvácnosti požaduje, aby v škole získané vedomosti boli natoľko pevné, že by ich bolo možné kedykoľvek vybaviť si v pamäti a použiť v praxi.

Čo môže urobiť učiteľ:

- ***Je si plne vedomý zodpovednosti za výsledok svojej práce.***
- ***Musí vhodnou formou precvičovania a opakovania učiva zabezpečiť jeho upevnenie.***
- ***Vzbudzuje záujem žiaka o matematiku účinnou motiváciou a sústavnou konkretizáciou poznatkov a ich častou praktickou aplikáciou.***

- ***Zásada individuálnosti***
  - ***Zásada individuálnosti prístupu pri vyučovaní matematiky vyžaduje, aby učiteľ rešpektoval individuálne schopnosti žiaka, jeho možnosti i znalosti z matematiky.***
  - ***Hĺbka osvojovania vedomostí i tempo matematickej myšlienkovej činnosti nie je u všetkých žiakov rovnaké.***

- ***Zásada praktickosti***
  - ***Zásada spojenia teórie s praxou je požiadavka kladená na pochopenie významu matematických teórií pre prax, pre konkrétne úlohy v živote spoločnosti.***
  - ***Jednou z podstatných zložiek matematiky je riešenie problémov a matematizácia reálnych situácií.***

- ***Zásada výchovnosti***

Osvojovanie si matematického jazyka

Jednou z podmienok jasného a presného matematického myslenia, vyjadrovania a porozumenia vo vyučovaní matematiky je, aby učiteľ i žiaci používali tie isté vyjadrovacie prostriedky, aby sa opierali o tie isté predstavy a pojmy.
V matematickom jazyku sa používajú

1. Konštanty,
2. Premenné,
3. Funktory, označenia funkcií,
4. Predikáty, označenia relácií,
5. Logické symboly,
6. Pomocné symboly.

Jazyk matematiky pozostáva tiež z:

- výrokov
- výrokových formuly,
- výrokových foriem,
- matematických viet:
    - veta základná (tvar implikácie $A \Rightarrow B$),
    - veta obrátená $B \Rightarrow A$,
    - veta obmenená $B' \Rightarrow A'$,
    - veta negovaná $A \wedge B'$.

Dôkazy v matematike

V matematike sa používajú tri typy dôkazov:

1. Dôkaz priamy.
2. Dôkaz nepriamy.
3. Dôkaz sporom.

ad 1) Pri priamom dôkaze implikáciu $A \Rightarrow B$ dokážeme pomocou reťazca pravdivých implikácií

$A \Rightarrow B_1 \Rightarrow \ldots \quad \ldots \Rightarrow B_n \Rightarrow B$.

Príklad. Dokážeme vetu: Súčet dvoch párnych prirodzených čísel je párne prirodzené číslo, teda: $\forall x, y \in N$: ak $x = 2n \wedge y = 2k \Rightarrow x + y = 2v$,
$(\forall n, k, v \in N)$.

Riešenie. Nech $x = 2n$, $y = 2k \Rightarrow x + y = 2n + 2k = 2(n + k) = 2v$.

ad 2) Nepriamy dôkaz spočíva v dôkaze platnosti implikácie $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$, ktorá je s implikáciou $A \Rightarrow B$ ekvivalentná.

Príklad. Dokážeme vetu: Ak x^2 je párne číslo, potom je aj x párne číslo.

Riešenie. Dokážeme obmenenú vetu: Ak x nie je párne číslo, potom x^2 nie je párne. Nech je teda x nepárne číslo. Čiže $x = 2k + 1$, pre nejaké vhodné $k \in Z$ a potom číslo
$x^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2m + 1$ je nepárne číslo .

ad 3) Pri dôkaze implikácie $A \Rightarrow B$ sporom, dokážeme že platí implikácia

$(A \wedge \neg B) \Rightarrow C$, kde pravdivostná hodnota $\{C\} = 0$, ktorá je ekvivalentná s implikáciou $A \Rightarrow B$. Predpokladajúc pravdivosť výroku A a nepravdivosť výroku B, teda prídeme k sporu, čím je implikácia $A \Rightarrow B$ dokázaná.

Príklad. Dokážeme vetu:
Pre každé prirodzené číslo n platí: ak 3 delí n, potom 3 delí aj n^2.

Riešenie. Zapíšeme negáciu vety: Existuje aspoň jedno prirodzené číslo n, pre ktoré platí: 3 delí n a zároveň 3 nedelí n^2.
Ak 3 delí n, potom existuje také $k \in N$: $n = 3k \Rightarrow n^2 = 9k^2 \Rightarrow n^2 = 3.3k^2$.
Označme $3k^2 = m$. Z rovnosti $n^2 = 3.m$ je zrejmé, že číslo n^2 je deliteľné troma, čo je však spor s tvrdením, že 3 nedelí n^2. Ukázali sme pravdivosť implikácie $(A \wedge \neg B) \Rightarrow C$, kde $\{C\} = 0$, ktorá je ekvivalentná s implikáciou $A \Rightarrow B$ čím je veta dokázaná.

Pri dôkaze výrokovej formy, ktorej oborom pravdivosti sú všetky prirodzené čísla od istého prirodzeného čísla n_0 počnúc, teda pri dôkaze vety typu „Pre $\forall n \in N$, $n \geq n_0$: $V(n)$“ používame metódu matematickej indukcie. Dôkaz metódou matematickej indukcie spočíva v dvoch krokoch.
I. krok. Dokážeme, že platí výrok $V(n_0)$.
II. krok. Predpokladáme, že $\forall n \in N$, $n \geq n_0$ platí výrok $V(n)$, tzv. indukčný predpoklad, a dokážeme, že $\forall n \in N$, $n \geq n_0$ je implikácia $V(n) \Rightarrow V(n+1)$ pravdivá.
Ak teda dokážeme, že $\{V(n_0)\} = 1$ a za indukčného predpokladu dokážeme platnosť implikácie
$\forall n \in N$, $n \geq n_0$: $\{V(n) \Rightarrow V(n+1)\} = 1$, potom výrok $V(n)$ platí pre každé prirodzené číslo $n \geq n_0$.

Základné zložky matematickej činnosti

Medzi základné matematické činnosti patrí : pozorovanie, pokus, porovnávanie, indukcia, analógia, zovšeobecňovanie a abstrakcia.

- **Pozorovanie;** je metóda skúmania, pri ktorej vyčleňujeme a fixujeme vlastnosti a vzťahy jednotlivých objektov a javov obklopujúceho nás sveta. (treba odlišovať pozorovanie a vnímanie).

- **Porovnávanie;** je myšlienková operácia založená na určení zhody alebo rozdielu medzi skúmanými objektmi. Porovnanie ako metóda sa často *používa pri štúdiu matematických vlastností objektov, ako aj pri stanovaní samotných týchto vlastností. (Porovnávať môžeme iba objekty, ktoré spolu určitým spôsobom súvisia, porovnávanie musí prebiehať systematicky, porovnávanie podľa rovnakých vlastností musí byť úplné).*

- *Pokus; experiment je taká metóda skúmania objektov a javov, pri ktorej zasahujeme do ich prirodzeného stavu a študujeme ich v umelo vytvorených podmienkach. Každý pokus je spojený s pozorovaním. Moderné počítačové technológie umožňujú simuláciu pokusov a vytvárajú podmienky pre uplatňovanie týchto metód.*

- *Konkretizácia a zovšeobecňovanie; konkretizácia a zovšeobecňovanie spolu s ich vzájomným vzťahom tvoria základ matematického myslenia. Pri práci s matematickým problémom môžeme použiť rôzne typy konkretizácie. Aby sme problém pochopili je možné v prvej fáze využiť náhodnú konkretizáciu. Aby sme odhalili ideu, podstatu riešenia, použijeme systematickú konkretizáciu, ktorá môže rozhodujúcou mierou prispieť k objaveniu zákonitosti. IKT nám umožní mnohonásobnú konkretizáciu na všetkých úrovniach: chaotickú, systematickú, rafinovanú, či strategickú, na základe ktorej je možné správne dedukovať na všeobecne platné matematické tvrdenia. Práve v procese tvorivého experimentovania s konkrétnymi modelmi študenti zväčša najľahšie odhaľujú nové matematické pojmy.*

- *Zovšeobecnením (generalizáciou) sa rozumie prechod od zvláštneho k všeobecnému, od menej všeobecného k všeobecnejšiemu poznatku, a taktiež výsledok tohto procesu.*
- *Protikladom zovšeobecnenia je vymedzenie – špecializácia.*

- *Analógia; podľa Stefana Banacha je percepcia analógie a jej využívanie základným elementom matematickej tvorivosti. Pravdou je, že analógia zohráva kľúčovú úlohu vo vyučovaní matematiky, bez odvolávania sa na ňu by vyučovanie nebolo vôbec možné. Okolo každého matematického pojmu je možné koncentrovať mnohoraké aktivity študentov smerujúce k posilneniu percepcie analógie. Aktivitu žiaka v procese výučby podporujeme práve tým, že ho nabádame hľadať čo sa zmenilo a čo nie pri istej transformácii pojmu, registrovať vzájomné vzťahy medzi zvláštnym a všeobecným a tak dospieť k pochopeniu*

pojmu. Počítačové technológie sú tu neodmysliteľnou zložkou vyučovacieho procesu.

- ***Schematizovanie;** Hans Freudenthal považuje túto matematickú činnosť za dôležitý element matematického vzdelávania. Proces matematizácie je často provokovaný prostredníctvom schém, obrázkov, modelov geometrických simulácií, grafov, diagramov, organigramov či mentálnych máp. Didaktické softvery, tabuľkové procesory (ako MS Excel), či prezentačné techniky (napr. Power Point), umožňujú dnes už realizovať tieto aktivity precíznejšie, estetickejšie na vysokej profesionálnej úrovni. Môžu ich vytvárať sami študenti, čím sa dostávajú do pozície „učiacich sa vykonávaním činnosti“, (túto metódu nazývame aj „learning by doing“), patrí podľa výskumov k najefektívnejším; (má až 75% podiel pri osvojovaní si nových poznatkov).*

- ***Dedukcia a indukcia;** v školskej matematike sa využíva neúplná indukcia ako heuristická metóda objavovania nových právd. Pri objasňovaní nového pojmu postupujeme od jedného špeciálneho prípadu k zovšeobecneniu pojmu. V súčasnosti ponúkajú počítačové technológie možnosti vytvárania interaktívnych apletov, dynamické, grafické a numerické modely rozkladu úlohy na špecifické prípady. Uľahčujú tak následnú hierarchizáciu a zovšeobecnenie výsledkov a vplyvov zmenených parametrov na riešenie skúmaného javu.*

- ***Vytváranie algoritmov;** racionálne využívanie rôznych algoritmov; Matematické pojmy majú často operatívny charakter. Študenti sú veľmi otvorení pre takýto spôsob myslenia; často sa viac zaujímajú o to, ako sa to skonštruuje, alebo ako dostaneme ten výsledok, (myslia tým aká postupnosť činností ich privedie k výsledku), než aby sa pýtali, čo to znamená, prečo práve takto treba postupovať. Študenti veľmi radi formulujú aj definície ako reťazec operácií, prípadne ako riešenie problému.*

- ***Abstrakcia;** je myšlienkové odtrhnutie všeobecne dôležitých podstatných vlastností vyčlenených v priebehu zovšeobecnenia od ďalších, pre naše štúdium nepodstatných vlastností skúmaných vzťahov alebo objektov.*

Typy matematického myslenia

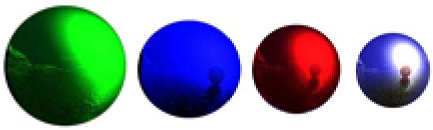
- *Konkrétne myslenie (viazané na konkrétne predmety, modely).*

  Podľa stupňa dynamickosti rozlišujeme

- ***Statické konkrétne myslenie***

Je neoperatívne, využíva sa na vytváranie názornej predstavy, vnímanie, pozorovanie, porovnávanie.

Príklad.



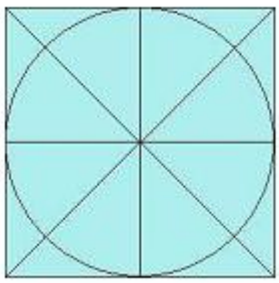
Ktorá guľôčka je najväčšia?

- ***Dynamické konkrétne myslenie***

Príklad. Na váhach sú dva valčeky vyvážené troma guľôčkami a jedným valčekom. Ak na jednu misku váh dáme jeden valček, koľkými guľôčkami ho vyvážime?

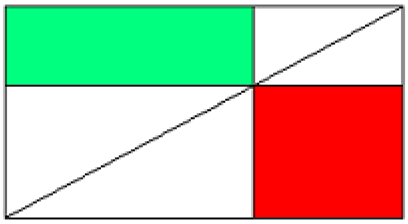
- ***Konkrétne abstraktné statické myslenie***

Príklad. ***Koľko trojuholníkov, (štvoruholníkov) je na obrázku?***



- ***Konkrétne abstraktné dynamické myslenie***

Príklad. ***Ktorý z vyfarbených štvoruholníkov má väčší obsah?***



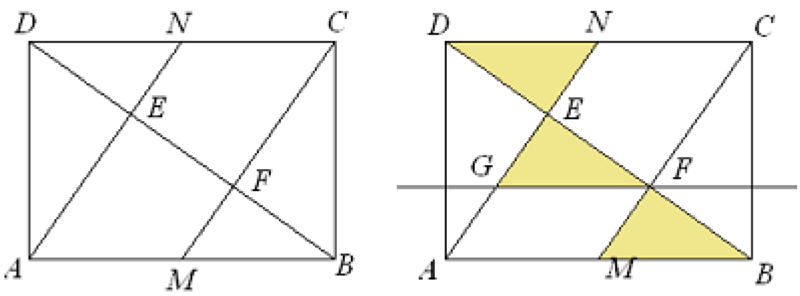
- ***Abstraktné myslenie***

$$x^2-6x+8=0$$
$$x^2-2\cdot 3x+3^2-3^2+8=0$$
$$(x-3)^2-1^2=0$$
$$(x-3-1)\cdot(x-3+1)=0$$
$$(x-4)\cdot(x-2)=0$$
$$x_1=4$$
$$x_2=-2$$

$$ax^2+b+c=0,\quad a\neq 0$$
$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$
$$x^2-2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0$$
$$\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{(2a)^2}=0,\ \text{kde } D=b^2-4ac.$$
$$\left(x-\frac{b}{2a}+\sqrt{D}\right)\left(x-\frac{b}{2a}-\sqrt{D}\right)=0,$$

- ***Funkčné myslenie***
- ***Geometrické myslenie***
- ***Intuitívne myslenie***

Príklad. ***Delia body E, F uhlopriečku BD obdĺžnika ABCD na tri zhodné úsečky?***



Príklad intuitívne vytvorenej hypotézy.

Je číslo a_n tvaru $a_n = n^3 + 2n$ deliteľné číslom 3?

n	1	2	3	4	...
$a_n=n^3+2n$	3	12	33	72	...