Kľúčové slová: ***názornosť vo vyučovaní matematiky, formy, prostriedky a metódy znázorňovania v matematike***

„Skutočný učiteľ matematiky kladie dôraz predovšetkým na otázku „prečo“, čiže na pochopenie vecí a snaží sa vychovávať žiaka k samostatnému mysleniu, považuje za ideál výučby odovzdať študentom porozumenie, motiváciu a myšlienky.“

A. Renyi

Názornosť vo vyučovaní matematiky

V mnohých oblastiach súkromného a profesionálneho života, pri analýze problémov v mnohých vedných odboroch, hrajú vizuálne znázornenia situácií dôležitú úlohu (zoberme len tvorbu internetových stránok, rôznych ponukových listov, prezentácií, atď.) tu všade sa vytvára priestor pre matematickú interpretáciu a vizualizáciu reality, ktorá sa javí v súčasnosti ako veľmi podstatná a nezanedbateľná vedomosť.

Položme si preto otázku, aké sú možnosti, prostriedky a formy znázorňovania matematických pojmov v súčasnosti, ako vytvárať názornejšie didaktické postupy vyučovania matematických pojmov, ktoré sú z hľadiska osvojovania si vedomostí žiakmi zrozumiteľnejšie a efektívnejšie.

Súčasná doba, ktorej podstatnou črtou je zavádzanie informačno - komunikačných technológií do všetkých oblastí života, prináša podstatné zmeny aj do vyučovania matematiky. Medzi dnes najviac diskutované problémy z hľadiska didaktiky matematiky patrí implementácia počítačov do vyučovania. Hlavne na stredných školách, temer výlučne úlohu vizuálnej prezentácie matematických pojmov zabezpečuje počítač, so svojimi nespočetnými možnosťami. Preto je potrebné vedieť využívať tieto zdroje, a skvalitniť prostredníctvom nich pedagogickú prácu.

Definícia názornosti

Nech je daná množina M a r, s, ... sú relácie na nej definované. Potom štruktúru S = < M, r, s ,... > môžeme považovať za popis alebo model určitej udalosti. Označme $S' = < M', r', s',\ldots >$ obraz štruktúry S v morfizme m. Tento model budeme považovať za názornejší než model S vtedy a len vtedy, ak subjekt získava z neho informácie efektívnejšie než z modelu S. Názornejší model je teda pre určitý subjekt zrozumiteľnejší, než model pôvodný.

Formy, metódy, spôsoby a prostriedky, ako určitý model pretransformovať na model názornejší sú rôznorodé. (Kuřina, 2000)

Zaujímavý je tiež názor Ondráčka, ktorý pod mierou názornosti rozumie „množstvo pomôcok použitých v určitom úseku učiva“. Pod optimálnou názornosťou si predstavuje „nevyhnutné množstvo expozícií tých stránok skutočností, ktoré majú vo vyučovacom procese po stránke logicko – didaktickej rozhodujúci podiel na vytváraní myšlienkovej štruktúry, ktorá vedie k pochopeniu podstaty a zovšeobecneniu javov“.

Názornosť znamená tiež náhradu verbálneho alebo symbolického vyjadrenia vyjadrením ikonickým, v ktorom symboly navodzujú cez zrakový vnem charakter popisovaných súvislostí.

Formy, prostriedky, metódy a spôsoby znázorňovania

Súčasná didaktika matematiky vyvinula rôzne efektívne spôsoby názornej a grafickej reprezentácie matematických myšlienok. V prvom rade sú to veľmi výkonné rôznorodé matematické symboliky, ktoré rozhodujúco ovplyvnili pokrok matematickej vedy. Radia sa k nim:

- rozličné spôsoby písania čísel,
- množinovo – teoretický formalizmus,
- sugestívna Leibnitzova symbolika diferenciálneho a integrálneho počtu,
- karteziánske grafy relácií a funkcií ako forma znázorňovania závislosti veličín,
- matice ako objekty vznikajúce z číselných schém,
- sumačná symbolika.

Ďalšími formami znázorňovania v matematike sú:

- rozličné schémy,
- tabuľky,
- maticový počet,

- ***obrázky a transparenty ktoré majú výrazne pomôcť pri zavádzaní pojmu, popise vzťahu či dôkazu,***
- ***grafy s vrcholmi a hranami,***
- ***vývojové diagramy,***
- ***algoritmizácia úlohy,***
- ***množinové diagramy,***
- ***vhodné konkrétno – deduktívne spôsoby definovania pojmov,***
- ***mentálne a pojmové mapy,***
- ***empiricko – konštruktívne spôsoby objasňovania nových pojmov.***

Materiálne učebné prostriedky a pomôcky vzdelávania v matematike:

- ***učebnice,***
- ***pracovné listy,***
- ***tabule,***
- ***farebné kriedy,***
- ***obrazy, transparenty, nástenky, plagáty,***
- ***jednoduché a viacvrstvové priesvitky,***
- ***modely a rôzne aplikácie na magnetickej tabuly,***
- ***audiovizuálna technika :***

1) počítače s obrovským potenciálom možností,

2) projektory,

3) televízia.

Pomôcky na vyučovanie matematiky

Názorné vyučovanie matematiky predstavuje súbor prostriedkov, ktoré rozvíjajú logické a matematické myslenie.

Učebná pomôcka je v materiálnom zmysle slova predmet používaný na vyučovaní, ktorý istým spôsobom reprezentuje jav, ktorý chceme študentom priblížiť.

Použitie správnej pomôcky vo vhodnej chvíli má vo vyučovaní veľký význam.

Pomôcok nesmie byť veľa, ale ani nedostatok, treba vystihnúť správnu mieru názornosti, aby študenti na jednej strane boli síce dostatočne motivovaní a zaujatí učivom, no súčasne nie presýtení množstvom podnetov.

Dobrá učebná pomôcka napomáha ľahšiemu, rýchlejšiemu osvojovaniu vedomostí, utvára predpoklady pre vznik trvácich vedomostí na základe predmetných predstáv. Pôsobí pozitívne na ďalší rozvoj myslenia, posúva študenta vpred, zvyšuje jeho záujem, aktivizuje ho, učí ho správne pozorovať a dedukovať.

Pomôcky môžeme rozdeliť na:

- učebné pomôcky pre žiaka (modely na manipuláciu, skladanie, strihanie, meranie, rôzne šablóny na rysovanie, počítač, didaktický softvér, atď.),
- vyučovacie prostriedky pre prácu učiteľa (demonštračné pomôcky, modely, obrazy, panely, transparenty, diapozitívy, fólie, prezentácie, aplety, skripy, filmy premietané pomocou dataprojektora).

Hoci veľké množstvo týchto názorných materiálnych pomôcok môžeme už dnes nahradiť využitím ICT (Informačno-komunikačných technológií), nemálo didaktikov sa prikláňa k názoru, že rôzne panely, obrazy a transparenty s vhodne spracovanou tematikou sú nenahraditeľné vo „svojej papierovej podobe“ a nemožno ich zo stien škôl vylúčiť ani nahradiť implementovaním počítačov do výučby matematiky.

Žiakom – vizuálnym typom - totiž veľmi pomáhajú pri zafixovaní si poznatkov. Je možné aktivizovať študentov, aby sami vytvorili pomôcky či projekty k témam preberaným na vyučovaní. Študenti môžu získať pestrý materiál z Internetu, a vďaka jeho spredmetneniu na papieri a následnej demonštrácii formou nástenky či transparentu, zabezpečiť dlhodobejšie pôsobenie danej informácie na zmysly a pamäť študentov. Takto vlastnoručne vyrobený materiál má najväčšiu hodnotu a výsledkom je trvácа a neformálna vedomosť, o ktorú sa usilujeme.

Využitie teórie grafov pri vizualizácii matematických úloh

Teória grafov, ktorá chápe graf ako systém prvkov dvojakého druhu; vrcholov a hrán pre ktoré platí: každá hrana spája buď 2 rôzne vrcholy, alebo jediný vrchol sám so sebou, patrí medzi najmladšie matematické disciplíny.

Poskytuje množstvo námetov na didaktické využitie a demonštráciu matematických problémov, či už z oblasti kombinatoriky, matematickej logiky alebo pri riešení niektorých slovných úloh.

S grafom v tomto zmysle sa stretávajú už žiaci základných škôl a to nielen na matematike, ale aj v rámci ďalších predmetov; pri vetnom rozbore a určovaní vzťahov medzi vetnými členmi na slovenskom jazyku, pri zapisovaní štrukturálnych vzorcov zlúčenín v chémii a tiež na fyzike pri zakresľovaní elektrických obvodov. Študenti používajú grafy intuitívne v situácii, ktorá sa dá popísať nasledovne:

- *vyskytujú sa v nej prvky dvojakého druhu - atómy, vetné členy, na jednej strane a chemické väzby, vzťahy medzi vetnými členmi na strane druhej,*
- *prvky prvého druhu sú pospájané pomocou prvkov druhého druhu.*

Prvky prvého druhu tvoria množinu vrcholov grafu a prvky druhého druhu množinu hrán.

Pomocou grafov môžeme riešiť a demonštrovať všetky úlohy, v ktorých sa vyskytujú dva druhy objektov, pričom vzťahy medzi objektmi prvého typu sa dajú vyjadriť objektmi druhého typu.

Teória grafov predstavuje veľký prínos v stredoškolskej matematike v troch smeroch:

- *najzákladnejšie princípy teórie grafov možno použiť pri riešení rôznych slovných úloh,*
- *grafy sa dajú aplikovať pri štúdiu binárnych relácií ako názorná pomôcka,*
- *grafy sa dajú aplikovať pri riešení problémov z kombinatoriky,*
- *vytvárajú predpoklady pre rozvíjanie takých schopností študentov, ako je grafické znázorňovanie problémov reálneho života, v súčasnosti tak podstatné pri vytváraní rôznych prezentácií a internetových stránok.*

Výhodou teórie grafov je aj pomerne jednoduchá základná terminológia a symbolika. Už malé množstvo osvojených definícií, viet a tvrdení vytvára veľký priestor pre ich aplikáciu v úlohách. Žiaci 8. ročníka, do ktorého je podľa nových učebných osnov toto učivo zaradené, bez problémov chápu pojmy ako: orientovaná hrana, slučka, stupeň vrcholu grafu, strom, kompletný graf,

kružnica v grafe, obyčajný graf, eulerovský ťah, rovinný graf a dokážu ich použiť.

Ak konkrétnej situácii z praxe priradíme graf znázorňujúci vzájomný vzťah jednotlivých objektov; dostaneme o probléme lepší vizuálny prehľad, ktorý často napomôže k nájdeniu správneho riešenia. Práve z tohto dôvodu je teória grafov nepostrádateľným nástrojom v procese vizualizácie matematických problémov.

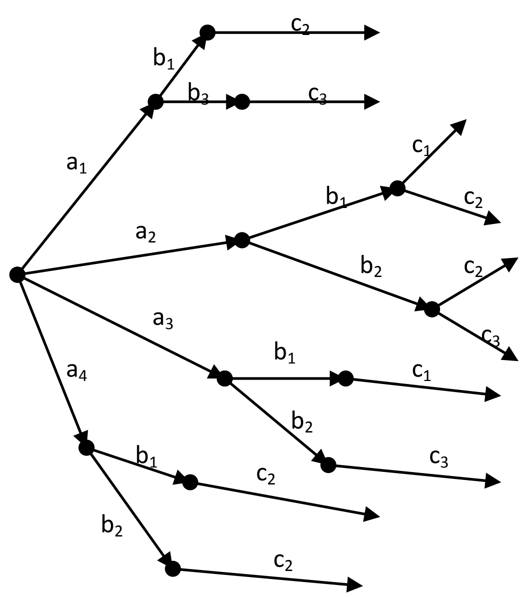
Uvedieme teraz niekoľko slovných úloh, ktoré možno jednoducho riešiť pomocou grafov.

Príklad. Posádka kozmickej lode

Pri zostavovaní posádok kozmických lodí sa objavuje problém psychologického súladu. Určite počet možností pre zostavenie 3 – člennej posádky; veliteľa + inžiniera + lekára, keď máme k dispozícii 4 kandidátov na veliteľa: a_1, a_2, a_3, a_4 , 3 kandidátov na inžiniera : b_1, b_2, b_3 a 3 kandidátov na lekára: c_1, c_2, c_3. Ďalej vieme, že a_1 je zlučiteľný s b_1 ,b_3, c_2, c_3; a_2 je zlučiteľný s b_1, b_2, c_1, c_2, c_3; a_3 je zlučiteľný s b_1, b_2, c_1, c_3 a veliteľ a_4 je zlučiteľný s b_1, b_2, b_3, c_2. Ešte treba zohľadniť, že b_1 sa nezlučuje s c_3; b_3 sa nezlučuje s c_2; b_2 sa nezlučuje s c_1.

Úlohu znázorníme grafom – stromom, z ktorého následne ľahko zistíme počet všetkých prípustných riešení: *10,* (pričom všetkých možných riešení je *P =* 4.3.3 = 32)

Obrázok: Strom riešení slovnej úlohy



Názornosť vo vyučovaní kombinatoriky

Kombinatorika, ako oblasť matematiky má svoje určité špecifiká. Jednou z jej hlavných čŕt je, že má príliš blízko k reálnemu životu, veď naša každodenná prax často závisí práve od toho, ako dokážeme triediť a kombinovať príslušné informácie.

Možno práve tým, že v kombinatorike je potrebné experimentovanie, originálnosť, tvorivosť, spôsobuje študentom nemalé problémy. Často, ako sami hovoria, chýba im „záchytný bod“, spoľahlivý algoritmus, ktorý by vyriešil nastolené problémy. Aj preto študenti netaja svoj odpor k tejto oblasti matematiky. Ich vedomosti bývajú zväčša veľmi formálne, a preto aj ťažko aplikovateľné.

Metódy využívané pri výučbe kombinatoriky sú odlišné od klasickej matematiky, veľký význam má grafické znázornenie a experimentovanie, ktoré je veľmi efektívne. Práve z vyššie uvedených dôvodov chceme v ďalšom venovať pozornosť vizualizácii niektorých pojmov z kombinatoriky.

Študenti často síce ovládajú príslušné vzorce, ale používajú ich s ťažkosťami, pričom im unikajú vzájomné súvislosti medzi nimi. Toto je možné odstrániť dôkladným a názorným vysvetlením vzťahov medzi jednotlivými vzorcami. Pri úvahách o neobľúbenosti kombinatoriky sme si uvedomili, že táto môže byť spôsobená aj rôznorodosťou jej aplikácií; totiž tým, že množiny, ktorých počet máme určiť môžu byť opísané rôznymi spôsobmi. Toto študentov veľmi zneisťuje.

Študentom, ktorí už ovládajú základné pravidlá kombinatoriky a majú isté vedomosti o variáciách, kombináciách a permutáciách čísla, je možné názornou prezentáciou Pascalovho trojuholníka poukázať na vzájomné prepojenie viacerých kombinatorických pojmov, na ich využitie aj v ďalších oblastiach matematiky, predstaviť túto tému celistvejšie a podporiť tak vznik neformálnych a trvácejších vedomostí..

Prvýkrát sa stretávajú žiaci s kombinatorikou na základnej škole, v 6. a 7. ročníku. V tomto období riešia rôzne jednoduchšie úlohy pomocou názorných schém, bez použitia vzorcov. Mnohí si túto metódu osvoja a využívajú ju aj na strednej škole pri riešení náročnejších úloh.

Príklad.

Spomedzi piatich ľudí treba vybrať troch na pozíciu riaditeľ, tajomník a hovorca. Koľkými spôsobmi je to možné zrealizovať?

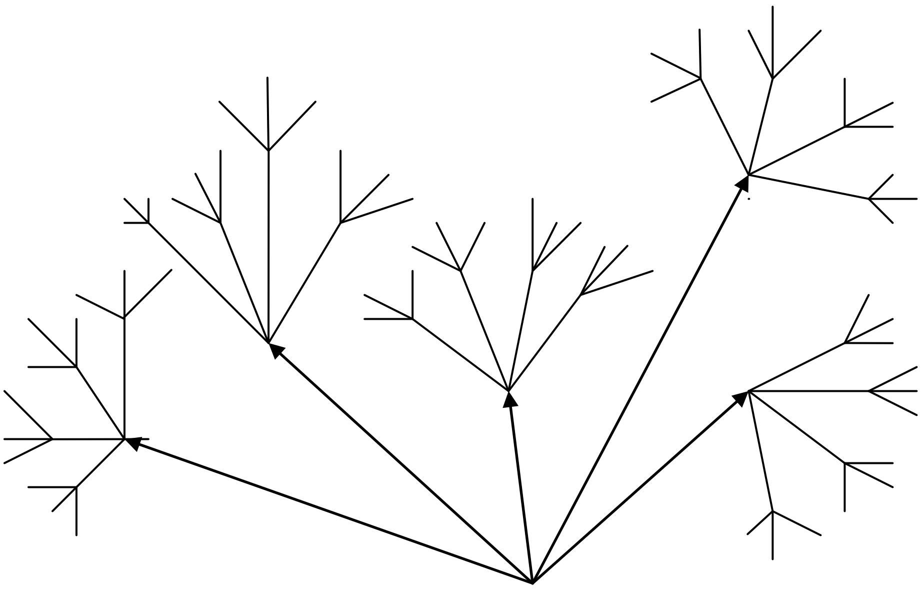
Žiak 7. ročníka postupuje nasledovne: Zakreslí schému - riaditeľa môžeme vybrať piatimi spôsobmi, tajomníka štyrmi spôsobmi a hovorcu tromi spôsobmi.

Teda spolu je to *P = 5.4.3 = 60 možností*.

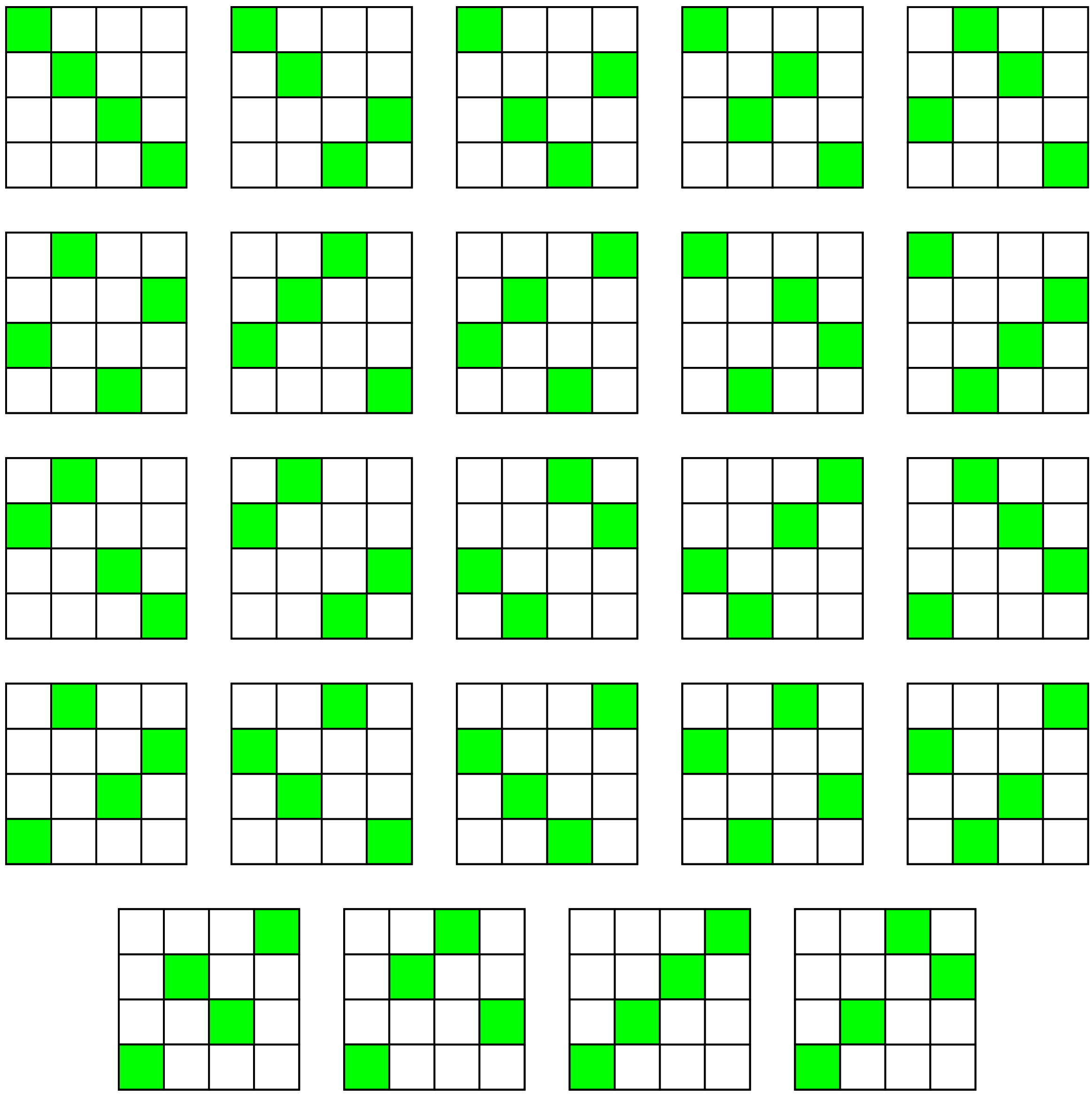
Ak sa žiaci naučili takto problém rozanalyzovať, bude pre nich jednoduché prejsť k abstraktnému vzorcu pre variácie *k-tej triedy* z čísla *n bez opakovania*

$$V(n,k) = n.\ (n-1).(n-2)....(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}.$$

Pri prezentácii tohto vzorca je vhodné poukázať aj na jeho „príbuzenský vzťah" so základným pravidlom kombinatorického súčinu, s ktorým veľmi úzko súvisí.



Príklad. Určte graficky všetky permutácie P(4)!



Obrázok: **Lucasovo figurálne zobrazenie permutácií**