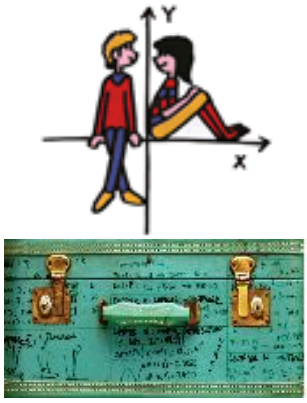
PaedDr. Lýdia Kontrová, PhD.
RNDr. Darina Stachová, PhD.

Matematický kufrík



Vydala Žilinská univerzita v Žiline

2012

Uvedená publikácia bola vydaná v rámci grantového projektu KEGA s názvom
„Informačný vek modifikuje metódy a formy vyučovania matematiky“
(MŠVVaŠ SR KEGA 046 ŽU – 4/2011)

Predhovor

Cieľom predkladaného textu ***Matematický kufrík*** je uľahčiť študentom stredných škôl prípravu na prijímacie skúšky z matematiky, a tiež štúdium matematiky na vysokej škole.

Problematika prechodu študentov stredných škôl na vysoké školy, a s tým súvisiaca schopnosť (neschopnosť) študentov nadviazať na vedomosti z matematiky získané na nižšom stupni vzdelávania sa v posledných rokoch dostáva do popredia záujmu odborníkov, školských inštitúcií, verejnosti aj vysokých škôl.

V dnešnej stále viac sa diferencujúcej sieti stredných škôl, čo do rozsahu a obsahu vyučovania matematiky, chceme ponúknuť študentom stručný prehľad stredoškolskej matematiky, základných pojmov, definícií a vzťahov, ktoré sú nutným východiskom pri ďalšom štúdiu matematiky na vysokej škole.

Predkladaný text sa skladá z trinástich kapitol. Dvojica autoriek spracovala jednotlivé kapitoly nasledovne: kapitoly I. až VIII. – PaedDr. Lýdia Kontrová, PhD., kapitoly IX. až XIII. – RNDr. Darina Stachová, PhD.

Pri tvorbe materiálu sme sa opierali o dlhoročné skúsenosti pri vyučovaní študentov prvých ročníkov technických vysokých škôl, a akcentovali sme témy a pojmy, ktorých znalosť je nutná pri štúdiu vyššej matematiky.

Každá kapitola textu obsahuje základné pojmy a fakty týkajúce sa pojednávanej problematiky a v prípade niektorých tém ako sú rovnice, nerovnice či funkcie, aj niekoľko ilustračných príkladov.

Naše poďakovanie patrí recenzentom Prof. RNDr. Jozefovi Fulierovi, CSc a doc. PaedDr. Jánovi Gunčagovi, PhD. za pozorné prečítanie rukopisu, za ich cenné pripomienky a rady, ktoré pomohli zvýšiť kvalitu celého učebného textu.

Autorky

OBSAH

Predhovor 3
1 Výroky a množiny 7
1.1 Výroky 7
1.2 Logická výstavba matematiky 9
1.3 Základné množinové vzťahy a operácie 11
2 Teória čísel 13
2.1 Číselné množiny 13
2.2 Vlastnosti celých čísel 14
2.3 Základné zákony aritmetiky 16
2.4 Komplexné čísla 16
2.5 Intervaly 23
3 Algebrické výrazy 24
3.1 Algebrický výraz – základné pojmy 24
3.2 Mnohočleny 24
3.3 Úprava racionálnych lomených výrazov 25
3.4 Úprava iracionálnych výrazov 27
3.5 Absolútna hodnota reálneho čísla 27
4 Rovnice a nerovnice 29
4.1 Rovnice 29
4.1.1 Lineárne rovnice 29
4.1.2 Kvadratické rovnice 30
4.1.3 Iracionálne rovnice 32
4.1.4 Rovnice s absolútnou hodnotou 33
4.2 Nerovnice 34
4.2.1 Lineárne nerovnice 35
4.2.2 Kvadratické nerovnice 36
5 Sústavy lineárnych rovníc 38
5.1 Metódy riešenia sústav lineárnych rovníc 38
6 Funkcie 44
6.1 Funkcie – základné pojmy 44
6.2 Vlastnosti funkcie 45
6.3 Lineárna funkcia 49
6.4 Kvadratická funkcia 49
6.5 Lineárna lomená funkcia 52
6.6 Mocninové funkcie 54
6.7 Exponenciálna funkcia 56
6.8 Logaritmická funkcia 58
6.9 Exponenciálne rovnice 60
6.10 Logaritmické rovnice 63
6.11 Exponenciálne a logaritmické nerovnice 64
7 Trigonometria 66
7.1 Goniometrické funkcie 66
7.1.1 Oblúková a stupňová miera 67
7.1.2 Funkcie sínus, kosínus, tangens a kotangens 67
7.1.3 Vlastnosti goniometrických funkcií 68

7.1.4 Goniometrické identity 73
7.2 Goniometrické rovnice 74
7.3 Goniometrické nerovnice 78
8 Postupnosti **80**
8.1 Vlastnosti postupností 80
8.2 Aritmetická postupnosť 84
8.3 Geometrická postupnosť 85
8.4 Nekonečný rad 86
9 Planimetria **89**
9.1 Uhol 89
9.2 Trojuholník 91
9.3 Kružnica a kružnicový oblúk 99
9.4 Množiny bodov danej vlastnosti v rovine 104
10 Stereometria **108**
10.1 Základné pojmy 108
10.2 Vzájomné polohy útvarov v priestore 109
10.3 Polohové konštrukčné úlohy 124
10.4 Metrické vlastnosti útvarov v priestore 125
10.5 Metrické konštrukčné úlohy 128
10.6 Objemy a povrchy telies 129
10.7 Súmernosti v priestore 134
11 Analytická geometria **138**
11.1 Súradnicová sústava 138
11.2 Vektory 138
11.3 Rovnice rovinných útvarov 141
11.3.1 Rovnice priamky v rovine 142
11.3.2 Rovnice kužeľosečiek 143
11.4 Analytické vyjadrenia polôh lineárnych a kvadratických útvarov 147
11.5 Rovnice útvarov v priestore 149
11.6 Analytické vyjadrenia vzájomných polôh priamok a rovín v priestore 151
12 Kombinatorika **154**
12.1 Variácie bez opakovania 154
12.2 Permutácie bez opakovania 155
12.3 Kombinácie bez opakovania 156
12.4 Variácie s opakovaním 157
12.5 Permutácie s opakovaním 157
12.6 Kombinácie s opakovaním 157
13 Pravdepodobnosť a štatistika **158**
13.1 Pravdepodobnosť 158
13.2 Štatistika 160
13.2.1 Základné pojmy 160
13.2.2 Spracovanie štatistického súboru 161
13.2.3 Charakteristiky štatistického súboru 164
13.2.4 Kovariancia a korelácia 166
Použitá literatúra **169**

1 Výroky a množiny

1.1 Výroky

Výrok je veta, o pravdivosti ktorej možno jednoznačne rozhodnúť. Pravdivosť, resp. nepravdivosť výroku označujeme jeho **pravdivostnou hodnotou**.
Pravdivostná hodnota pravdivého výroku je 1, pravdivostná hodnota nepravdivého výroku je 0.
Označenie výrokov: $A, B, \dots, P, Q, \dots$.
Označenie pravdivostnej hodnoty výroku A: $h(A)$, $\{A\}$.
Zložené výroky
Nech A, B sú výroky. Potom

a) negáciou výroku *A* nazývame výrok $\neg A$ (označujeme tiež *non* A, $\overline{A}$, A') a čítame „nie je pravda, že A ";
b) konjunkciou výrokov A, B nazývame výrok $A \wedge B$ a čítame „A a súčasne B", „A a B ";
c) disjunkciou výrokov A, B nazývame výrok $A \vee B$ a čítame „A alebo B ";
d) implikáciou výrokov A, B nazývame výrok $A \Rightarrow B$ a čítame „A implikuje B", „ak A, potom B ", „z A vyplýva B";
e) ekvivalenciou výrokov A, B nazývame výrok $A \Leftrightarrow B$ a čítame „ A práve vtedy, keď B ", „ A vtedy a len vtedy, keď B".
Pravdivostné hodnoty zložených výrokov a) – e) definujeme **tabuľkami pravdivostných hodnôt:**

A	$\neg A$
1	0
0	1

Tab. 1.1

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Tab. 1.2

Poznámka. Pri implikácii $\boldsymbol{A \Rightarrow B}$ výrok A nazývame **postačujúcou podmienkou** pre výrok B. Pretože implikácia je pravdivá aj v prípade, keď výrok A je nepravdivý a výrok B pravdivý, aby platilo tvrdenie B, *stačí* ale *nie je nutné*, aby platil predpoklad A.
Výrok B nazývame **nutnou podmienkou** pre výrok A. Podmienka „prirodzené číslo je väčšie ako dva", je nutná podmienka pre deliteľnosť tromi.
Nech A, B, C sú výroky. Potom platí

1. $\{A \vee (\neg A)\} = 1$ — zákon vylúčenia tretieho
2. $\{A \wedge (\neg A)\} = 0$ — zákon sporu
3. $(\neg(\neg A)) \Leftrightarrow A$ — zákon dvojitej negácie
4. $(A \wedge A) \Leftrightarrow A$, $(A \vee A) \Leftrightarrow A$ — idempotentnosť
5. $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$, $(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$ — komutatívne zákony
6. $(A \wedge (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge C)$,
   $(A \vee (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \vee C)$ — asociatívne zákony
7. $(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$,

$(A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$ distributívne zákony

8. $(\neg(A \wedge B)) \Leftrightarrow ((\neg A) \vee (\neg B))$

$(\neg(A \vee B)) \Leftrightarrow ((\neg A) \wedge (\neg B))$ de Morganove pravidlá

9. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg B) \Rightarrow (\neg A))$ transpozícia implikácie

10. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg A) \vee B)$

11. $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$

12. $\{B\} = 0 \Rightarrow \{A \wedge B\} = 0$ agresívnosť nepravdivého výroku

13. $\{B\} = 0 \Rightarrow \{A \vee B\} = \{A\}$ neutrálnosť nepravdivého výroku

14. $\{B\} = 1 \Rightarrow \{A \vee B\} = 1$ agresívnosť pravdivého výroku

15. $\{B\} = 1 \Rightarrow \{A \wedge B\} = \{A\}$ neutrálnosť pravdivého výroku.

Pri formuláciách matematických tvrdení sa používajú **kvantifikátory:**

$\forall$ **všeobecný (veľký) kvantifikátor -** čítame: „pre každý prvok platí..., alebo pre všetky....

$\exists$ **existenčný (malý) kvantifikátor -** čítame: „existuje taký prvok,...“ .

$\exists!$ čítame: “existuje práve jeden prvok...“ .

Ak kvantifikovaný výrok obsahuje viac kvantifikovaných premenných, aplikujú sa v poradí od posledného kvantifikátora. Kvantifikátory rovnakého druhu sú zámenné, poradie kvantifikátorov rôzneho druhu nie je možné meniť.

Nech výraz $V(x_1, x_2, ...x_k)$ premenných $x_1, x_2, ... , x_k$, je definovaný na nejakej množine $\boldsymbol{M}$. Ak po dosadení ľubovoľného prvku z množiny $\boldsymbol{M}$ do výrazu $\boldsymbol{V}(x_1, x_2, ... x_k)$ dostaneme výrok, potom výraz nazývame **výroková forma.** Množinu $\boldsymbol{D}(V)$ všetkých prvkov $(x_1, x_2, ... , x_k)$, pre ktoré je výraz $V(x_1, x_2, ... x_k)$ výrokom, nazývame **definičným oborom** $\boldsymbol{D(V)}$ výrokovej formy $\boldsymbol{V}$. Množinu všetkých prvkov $(c_1, c_2, \dots , c_k) \in \boldsymbol{D}(\boldsymbol{V})$, pre ktoré je výrok $V(c_1, c_2, \dots , c_k)$ pravdivý, nazývame **oborom pravdivosti** výrokovej formy $\boldsymbol{V}$. **Označujeme:** $\boldsymbol{P(V)}$.
Určením počtu prvkov z definičného oboru výrokovej formy, dostávame tzv. **kvantifikované výroky.**

Príklad. Nech je daná výroková forma $\boldsymbol{V}(x)$: $x^2 + 1 \geq 0$, $x \in \boldsymbol{R}$.
Použitím všeobecného kvantifikátora z nej dostávame kvantifikovaný pravdivý výrok:
Pre každé $x \in \boldsymbol{R}$ platí $x^2 + 1 \geq 0$.
Kvantifikovaný nepravdivý výrok dostávame z výrokovej formy $\boldsymbol{U}(x)$: $x^2 < -1$, $x \in \boldsymbol{R}$ použitím existenčného kvantifikátora: Existuje také $x \in \boldsymbol{R}$, že platí $x^2 < -1$.
Kvantifikovaný pravdivý výrok dostávame z výrokovej formy $\boldsymbol{A}(x)$: $x^2 = 0$, $x \in \boldsymbol{R}$ použitím kvantifikátora jednoznačnej existencie: Existuje práve jedno $x \in \boldsymbol{R}$ tak, že platí $x^2 = 0$.

Výrokové formy $\boldsymbol{V}(x)$, $\boldsymbol{U}(x)$, $\boldsymbol{A}(x)$ sú výrokovými formami jednej premennej x.
Výroková forma $\boldsymbol{B}(x,y,z)$: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 10$, $x,y,z \in \boldsymbol{R}$ je výrokovou formou troch premenných.

Negovanie kvantifikovaných výrokov. Kvantifikované výroky negujeme tak, že všeobecný kvantifikátor nahradíme existenčným, resp. existenčný kvantifikátor nahradíme všeobecným kvantifikátorom a záver - tvrdenie jeho negáciou. Napr.

$$(\neg\ (\forall x \in \boldsymbol{U} : V(x))) \Leftrightarrow (\exists x \in \boldsymbol{U} : \neg\ V(x)),$$
$$(\neg\ (\exists x \in \boldsymbol{U} : V(x))) \Leftrightarrow (\forall x \in \boldsymbol{U} : \neg\ V(x)).$$

Príklad. Zapíšeme negáciu výroku $\exists x \in \boldsymbol{R}\ \ \forall y \in \boldsymbol{R}$: $x + 1 \geq y$.

$\forall x \in \boldsymbol{R}\ \ \exists\ y \in \boldsymbol{R}$: $x + 1 < y$.

1.2 Logická výstavba matematiky

Základom logickej výstavby matematiky je **sústava axióm.** Axiómy sú výroky, ktorých pravdivosť predpokladáme. Pojmy, ktoré sa v axiómach používajú, a ktoré nie sú definované, nazývame **primitívne** (*základné*) *pojmy*. Sústava axióm by mala byť

1. **bezo sporná** (zo sústavy axióm nemôžeme vyvodiť výrok a súčasne jeho negáciu),
2. **nezávislá** (nemôžeme odvodiť axiómu z ostatných axióm),
3. **úplná** (zo sústavy axióm je možné dokázať pravdivosť, alebo nepravdivosť každého matematického výroku príslušnej matematickej teórie, ktorý nie je axiómou).

K zavedeniu ďalších matematických pojmov slúži **definícia**. Definíciu vyslovujeme v tvare implikácie, ale má význam ekvivalencie (tichá dohoda v odbornej literatúre). Definícia určuje názov nového matematického pojmu a jeho charakteristické vlastnosti pomocou pojmov základných, alebo už definovaných.

Matematická veta je pravdivý výrok, ktorý je možné pomocou pravidiel matematickej logiky odvodiť – dokázať z axióm, definícií a už známych dokázaných viet. Pre pomocné matematické vety sa používa názov **lema.**

Väčšina matematických viet, ktoré dokazujeme má tvar implikácie $A \Rightarrow B$. Logický proces, ktorým dokazujeme pravdivosť matematickej vety, sa nazýva **dôkaz vety.**

V matematike sa používajú tri typy dôkazov:

1. Dôkaz priamy.

2. Dôkaz nepriamy.

3. Dôkaz sporom.

ad 1) **Pri priamom dôkaze** implikáciu $A \Rightarrow B$ dokážeme pomocou reťazca pravdivých implikácií

$$\boldsymbol{A \Rightarrow B_1 \Rightarrow \ldots \quad \ldots \Rightarrow B_n \Rightarrow B.}$$

Príklad. Dokážeme vetu: Súčet dvoch párnych prirodzených čísel je párne prirodzené číslo, teda: $\forall x, y \in \boldsymbol{N}$: ak $x = 2n \wedge y = 2k \Rightarrow x + y = 2v$, $(\forall\ n, k, v \in \boldsymbol{N})$.

Riešenie. Nech $x = 2n$, $y = 2k \Rightarrow x + y = 2n + 2k = 2(n + k) = 2v$.

✓

ad 2) **Nepriamy dôkaz** spočíva v dôkaze platnosti implikácie $\boldsymbol{(\neg B) \Rightarrow (\neg A)}$, ktorá je s implikáciou $A \Rightarrow B$ ekvivalentná.

Príklad. Dokážeme vetu: Ak x^2 je párne číslo, potom je aj x párne číslo.

Riešenie. Dokážeme obmenenú vetu: Ak x nie je párne číslo, potom x^2 nie je párne. Nech je teda x nepárne číslo. Čiže $x = 2k + 1$, pre nejaké vhodné $k \in \boldsymbol{Z}$ a potom číslo
$x^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2m + 1$ je nepárne číslo .

✓

ad 3) Pri **dôkaze** implikácie $\boldsymbol{A \Rightarrow B}$ **sporom**, dokážeme že platí implikácia $\boldsymbol{(A \wedge \neg B) \Rightarrow C}$, kde pravdivostná hodnota $\{C\} = 0$, ktorá je ekvivalentná s implikáciou $A \Rightarrow B$. Predpokladajúc pravdivosť výroku A a nepravdivosť výroku B, teda prídeme k sporu, čím je implikácia $A \Rightarrow B$ dokázaná.

Príklad. Dokážeme vetu:
Pre každé prirodzené číslo n platí: ak 3 delí n, potom 3 delí aj n^2.

Riešenie. Zapíšeme negáciu vety: Existuje aspoň jedno prirodzené číslo n, pre ktoré platí: 3 delí n a zároveň 3 nedelí n^2.
Ak 3 delí n, potom existuje také $k \in \boldsymbol{N}$: $n = 3k \Rightarrow n^2 = 9k^2 \Rightarrow n^2 = 3.3k^2$.
Označme $3k^2 = m$. Z rovnosti $n^2 = 3m$ je zrejmé, že číslo n^2 je deliteľné troma, čo je však spor s tvrdením, že 3 nedelí n^2. Ukázali sme pravdivosť implikácie $\boldsymbol{(A \wedge \neg B) \Rightarrow C}$, kde $\{C\} = 0$, ktorá je ekvivalentná s implikáciou $\boldsymbol{A \Rightarrow B}$ čím je veta dokázaná.

✓

Pri dôkaze výrokovej formy, ktorej oborom pravdivosti sú všetky prirodzené čísla od istého prirodzeného čísla n_0 počnúc, teda pri dôkaze vety typu
„Pre $\forall n \in \boldsymbol{N}$, $n \geq n_0$: $V(n)$“ používame **metódu matematickej indukcie**. Dôkaz metódou matematickej indukcie spočíva v dvoch krokoch.
I. krok. Dokážeme, že platí výrok $V(n_0)$.
II. krok. Predpokladáme, že $\forall\ n \in \boldsymbol{N}$, $n \geq n_0$ platí výrok $V(n)$, tzv. *indukčný predpoklad*, a dokážeme, že $\forall n \in \boldsymbol{N}$, $n \geq n_0$ je implikácia $V(n) \Rightarrow V(n + 1)$ pravdivá.
Ak teda dokážeme, že $\{V(n_0)\} = 1$ a za indukčného predpokladu dokážeme platnosť implikácie
$\forall n \in \boldsymbol{N}$, $n \geq n_0$:$\{V(n) \Rightarrow V(n + 1)\} = 1$, potom výrok $V(n)$ platí pre každé prirodzené číslo $n \geq n_0$.

Príklad. Dokážeme, že pre každé prirodzené číslo n platí

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Riešenie.
I. krok. Pre $n = 1$ dostaneme $V(1)$

$$1^2 = \frac{1(1+1)(2.1+1)}{6}$$

$$1 = 1$$

a preto $\{V(1)\} = 1$.

II. krok. Predpokladáme, že $V(n)$ platí pre nejaké $n = k \in \boldsymbol{N}$

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \qquad \text{indukčný predpoklad } (IP)$$

a dokážeme, že $V(n)$ platí aj pre $n = k + 1$, t.j.

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)((k+1)+1)(k(k+1)+1)}{6},$$

teda má platiť rovnosť

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Úpravou ľavej strany poslednej rovnosti s využitím indukčného predpokladu postupne dostaneme

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = (1^2 + 2^2 + \ldots + k^2) + (k+1)^2 \overset{IP}{=}$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} =$$

$$= \frac{(k+1)(k(2k+1)+6(k+1))}{6} = \; = \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}, \text{ čo je}$$

pravá strana uvedenej rovnosti.

Podľa princípu matematickej indukcie to znamená, že pre každé $n \in \boldsymbol{N}$ platí

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

✓

1.3 Základné množinové vzťahy a operácie

Množinou rozumieme súhrn objektov základného priestoru, ktorý je chápaný ako samostatný celok.

Množina je **určená,** ak o každom objekte základného priestoru je možné jednoznačne rozhodnúť, či patrí, alebo nepatrí do množiny.

Objekt, ktorý patrí množine, sa nazýva **prvkom množiny.**

Označenie množín: ***A, B, ..., M,*** ...

Prvky množiny označujeme: *a, b, ..., m, ...*

Ak prvok ***a* patrí množine *A*, píšeme *a* ∈ *A*,** ak **prvok *b* nepatrí množine *A*** píšeme ***b* ∉ *A*.**

Množina, ktorá obsahuje aspoň jeden prvok, sa nazýva **neprázdna množina.**

Množina, ktorá neobsahuje žiadny prvok, sa nazýva **prázdna množina. Označujeme ∅ .**

Množina, ktorá má konečný počet prvkov, sa nazýva **konečná množina**.

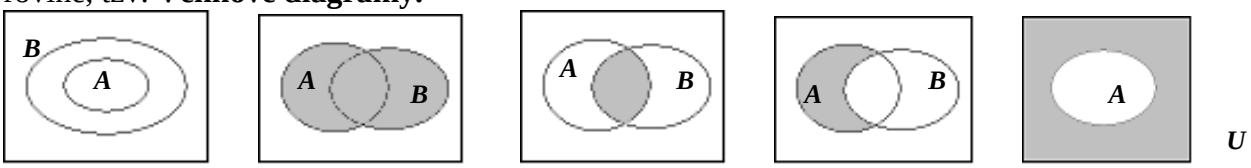
Množina, ktorá nie je konečná, sa nazýva **nekonečná množina.**

Množinu môžeme určiť

1. **Vymenovaním prvkov** množiny (v prípade konečných množín).
   Napríklad: ***A*** = {1, 3, 5,7, 11}.
2. **Definovaním spoločnej vlastnosti**, ktorú majú práve prvky danej množiny.
   Napríklad: ***D*** = { $x = 3k$; $k \in \boldsymbol{N}$} je množina všetkých násobkov čísla 3.

Nech ***U*** je základná (univerzálna) množina a ***A, B*** sú jej ľubovoľné množiny.

Množina *A* sa rovná množine *B*, ak každý prvok množiny ***A*** je súčasne prvkom množiny ***B*** a každý prvok množiny ***B*** je súčasne prvkom množiny ***A*. Označujeme *A* = *B*.**
Množina *A* je podmnožinou množiny *B*, ak každý prvok množiny ***A*** je súčasne prvkom množiny ***B*.** Ak ***A*** je podmnožinou ***B*** a existuje prvok množiny ***B***, ktorý nepatrí ***A***, hovoríme, že ***A* je vlastná podmnožina množiny *B*.**
Označujeme $A \subset B$. Vzťah $A \subset B$ nazývame **množinová inklúzia**.
Zjednotenie množín *A*, *B* je množina všetkých prvkov, ktoré patria množine ***A*** alebo množine ***B***. **Označujeme $A \cup B$.**
Prienik množín *A*, *B* je množina všetkých prvkov, ktoré patria množine ***A*** a súčasne patria do množiny ***B*. Označujeme $A \cap B$.** Ak $A \cap B = \emptyset$**,** hovoríme, že množiny ***A***, ***B*** sú **disjunktné.**
Rozdielom množín *A*, *B* je množina všetkých prvkov, ktoré patria množine ***A*** a súčasne nepatria množine ***B*. Označujeme $A - B$**.
Doplnok (komplement) množiny *A* vzhľadom na množinu ***U*, $A \subset U$,** je množina všetkých prvkov množiny ***U*,** ktoré nepatria množine ***A*. Označujeme A^C**.
Pre názornú predstavu pri operáciách s množinami používame grafické znázornenie množín v rovine, tzv. **Vennove diagramy.**



$A \subset B$ $\quad$ $A \cup B$ $\quad$ $A \cap B$ $\quad$ $A - B$ $\quad$ A^C

Obr. 1.3.1

Príklad. Určme všetky prvky množiny ***M*,** ak platí:
$M = \{x \in N: x \leq 100 \wedge x$ je prvočíslo $\wedge$ 9 delí $(x + 1)\}$.

Riešenie. Pretože číslo 9 delí $(x + 1)$, je $(x + 1) = 9k$ pre nejaké $k \in N$, čo znamená, že $x = 9k - 1$ pre nejaké $k \in N$. Vypíšeme všetky prirodzené čísla $x \leq 100$ s touto vlastnosťou: 8, 17, 26, 35, 44, 53, 62, 71, 80, 89, 98. Z nich sú prvočíslami práve tieto čísla: 17, 53, 71, 89.
Potom $M = \{17, 53, 71, 89\}$.

✓

Príklad. Dané sú množiny $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$, $C = \{2, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Nájdime množiny: a) $A \cap B$, $B - C$, b) $A \cap B \cap C$, c) $A \cup B$, d) $A \cup B \cup C$.

Riešenie. Hľadané množiny sú
a) $A \cap B = \{5, 7\}$, $B - C = \{4\}$
b) $A \cap B \cap C = \{5, 7\}$
c) $A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
d) $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

✓

Nech ***A***, ***B*** sú dve neprázdne množiny. Množinu všetkých usporiadaných dvojíc (a, b), pre ktoré platí: $a \in A$, $b \in B$ nazývame **karteziánsky súčin množín *A*, *B*.**
Označujeme $A \times B$.

Príklad. Nech $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$. Určme karteziánske súčiny $A \times B$ a $B \times A$.

Riešenie. $A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$
$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$.

✓

2 Teória čísel

2.1 *Číselné množiny*

Jedným z najdôležitejších pojmov matematiky je pojem čísla. Pojem čísla sa postupne rozširoval a prehlboval v súlade s potrebami vyvíjajúcej sa ľudskej spoločnosti.
Množina všetkých čísel určitého druhu, na ktorej sú definované bez obmedzenia operácie sčitovania a násobenia, sa nazýva **číselný obor** (číselná množina).
Označenia najdôležitejších číselných oborov (množín):
$\boldsymbol{N}$ množina **prirodzených čísel** $\{1, 2, 3, \ldots\}$
$\boldsymbol{N_0}$ množina **nezáporných celých čísel** $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
$\boldsymbol{Z}$ množina **celých čísel** $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
$\boldsymbol{Q}$ množina **racionálnych čísel** $\left\{\ldots, -\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{5}, \frac{13}{11}, 3, \ldots\right\}$
$\boldsymbol{R}$ množina **reálnych čísel** $\left\{\ldots, \sqrt[3]{-24}, -\sqrt{8}, -1, -\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{5}, \frac{13}{11}, \sqrt{5}, 3, \pi \ldots\right\}$
$\boldsymbol{C}$ množina **komplexných čísel** $\{1 + 3i, -4i, 8, \ldots\}$
Platí množinová inklúzia $\boldsymbol{N \subset N_0 \subset Z \subset Q \subset R \subset C}$.

Rozdelenie čísel – základná schéma

Reálne čísla
$\{-10; -2{,}3; \log 7; \pi; \sqrt{11}; \ldots\}$

Racionálne čísla
$\left\{-52{,}\overline{7}; -3; 2{,}136; \frac{6}{11}; \ldots\right\}$

Iracionálne čísla
$\left\{-\sqrt{23}; \pi; 4{,}567; \log(11); \ldots\right\}$

Celé čísla
$\{-10; -2; 0; 7; 107; \ldots\}$

Necelé čísla
$\left\{-\frac{8}{3}; -1{,}234; 1{,}\overline{3}; 5{,}21; 2\frac{21}{3}; \ldots\right\}$

Záporné čísla
$\{\ldots -3; -2; -1\}$

Nula
$\{0\}$

Prirodzené čísla
$\{1; 2; 3; \ldots\}$

Charakteristiky číselných množín (oborov)

- Množina prirodzených čísel je uzavretá vzhľadom na operácie sčítania a násobenia, tzn. výsledkom týchto operácií je opäť číslo prirodzené.
- Rozšírením množiny prirodzených čísel o nulu a záporné celé čísla vytvoríme číselnú množinu, ktorá je uzavretá aj vzhľadom na operáciu odčítania; sčítaním, odčítaním a násobením dvoch celých čísel dostaneme opäť celé číslo. Dostaneme tak **množinu všetkých celých čísel**, označujeme ju $\boldsymbol{Z} = \{...,-2,-1,0,1,2,...\}$.
- Podiel dvoch celých čísel však nie je vždy celé číslo. Pridaním všetkých zlomkov rozšírime množinu celých čísel tak, aby aj delenie celého čísla celým číslom (rôznym od nuly) bolo uskutočniteľné. Dostaneme množinu všetkých racionálnych čísel ***Q.*** Racionálne číslo je každé číslo, ktoré možno vyjadriť v tvare zlomku $\frac{p}{q}$, kde p a q sú nesúdeliteľné celé čísla a q je prirodzené číslo. V množine všetkých racionálnych čísel sa dajú vždy uskutočniť všetky štyri základné počtové operácie - sčítanie, odčítanie, násobenie, delenie.
- Iracionálne čísla sú čísla, ktoré sa nedajú vyjadriť v tvare zlomku dvoch celých čísel. Takýmito číslami sú napríklad čísla $\sqrt{2}, \sqrt{7}, \pi, ...$, ktoré sú charakterizované nekonečným neperiodickým desatinným rozvojom.
- Zjednotením racionálnych a iracionálnych čísel vytvoríme množinu reálnych čísel ***R.***

2.2 Vlastnosti celých čísel

Podiel čísel $a : b$, $a \in \boldsymbol{Z}$, $b \in \boldsymbol{N}$ môžeme zapísať v tvare

$$\frac{a}{b} = c + \frac{z}{b},$$

kde c, z sú celé čísla.
Ak je podiel $a : b$ celé číslo ($z = 0$ a súčasne $a = b.c$), potom hovoríme, že číslo ***a*** **je deliteľné číslom *b*** bezo zvyšku alebo tiež **„*b* delí *a*“** a zapisujeme $\boldsymbol{b} \mid \boldsymbol{a}$. Číslo ***b*** nazývame **deliteľom čísla *a*.**
Ak podiel $a : b$ nie je celé číslo, potom hovoríme, že **„*b* nedelí *a*“.** Číslo ***c*** budeme nazývať **čiastočným podielom** a číslo ***z*** budeme nazývať **zvyškom.**
Nech a, b sú ľubovoľné celé čísla, $b > 0$. Vždy môžeme nájsť také celé čísla ***c*** a ***z,*** že platí:

$$a = b.c + z \qquad 0 \leq z < b.$$

Základné vlastnosti relácie „*a* delí *b*“

Pre čísla $a, b, c, x, y, k \in \boldsymbol{Z}$ platí:
$1 \mid a$,
$a \mid a$,
$(a \mid b \wedge b \mid a) \Rightarrow a = b$,
$(a \mid b \wedge a \mid c) \Rightarrow a \mid (bx \pm cy)$,
$a \mid b \Rightarrow a \mid kb$,
$(a \mid b \wedge b \mid c) \Rightarrow a \mid c$ (tranzitívnosť),
$ab \mid c \Rightarrow (a \mid c \vee b \mid c)$.

Znaky deliteľnosti celých čísel

Číslo *a* je deliteľné

2 ⇔ ak je párne; t.j. jeho posledná cifra je 0, 2, 4, 6, 8;
3 ⇔ ak je jeho ciferný súčet deliteľný troma;
4 ⇔ jeho posledné dvojčíslie je deliteľné štyrmi;
5 ⇔ jeho posledná cifra je 0 alebo 5;
6 ⇔ číslo je deliteľné dvoma a súčasne troma;
8 ⇔ jeho posledné trojčíslie je deliteľné číslom 8;
9 ⇔ jeho ciferný súčet je deliteľný 9;
10 ⇔ číslo končí cifrou 0;
25 ⇔ číslo končí niektorým z dvojčísel 00, 25, 50, 75;
100 ⇔ číslo končí dvojčíslím 00.

Ak má prirodzené číslo $\boldsymbol{n} > 1$ aspoň jedného deliteľa $\boldsymbol{d}$, pre ktorého platí $1 < d < n$, nazývame číslo $\boldsymbol{n}$ zloženým číslom. V opačnom prípade ho nazývame prvočíslom. Číslo 1 nezaraďujeme do žiadnej z týchto skupín.
Prvočíslo *p* má práve dvoch deliteľov 1 a ***p***. **Zložené čísla** sú prirodzené čísla, ktoré majú aspoň troch rôznych deliteľov.
Prvočísla menšie ako 100 sú tieto: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.
Prvočísla tvoria základné „stavebné kamene“, z ktorých sú ostatné prirodzené čísla „poskladané“ pomocou operácie násobenia. Hovorí o tom základná veta aritmetiky.
Každé prirodzené číslo $\boldsymbol{n} \geq 2$ možno práve jedným spôsobom zapísať v tvare $n = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}....p_k^{\alpha_k}$, kde $p_1 < p_2 < ... < p_k$ sú navzájom rôzne prvočísla a α_1, α_2, ... , α_k sú prirodzené čísla. Tento rozklad nazývame **rozkladom čísla na prvočinitele.**
Napríklad: $60 = 2^2.\ 3.\ 5.$
Pre každé zložené prirodzené číslo $n > 1$ platí, že jeho najmenší deliteľ rôzny od 1 je prvočíslo neprevyšujúce $\sqrt{n}$. Ak je teda číslo n zložené, musí mať prvočíselného deliteľa v intervale $(1, \sqrt{n})$. Stačí preto postupne deliť číslo n prvočíslami z tohto intervalu.

Súdeliteľné čísla

Ak $d \mid a$ a aj $d \mid b$, nazývame číslo d **spoločným deliteľom** čísel a,b.
Kladné celé číslo D je **najväčším spoločným deliteľom** čísel a, b, ak:
1. $D \mid a$ a $D \mid b$,
2. Ak d je také kladné celé číslo, pre ktoré $d \mid a$ a $d \mid b$, potom $d \mid D$.
Najväčšieho spoločného deliteľa čísel a, b označujeme $D(a,b)$. Dve čísla a, b nazývame **súdeliteľné**, ak majú okrem čísla 1 aspoň jedného ďalšieho spoločného deliteľa.

Príklad. Vezmime čísla 36 a 60.
Číslo 36 má tieto kladné delitele: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.
Číslo 60 má tieto kladné delitele: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.
Spoločnými deliteľmi čísel 36 a 60 sú: 1, 2, 3, 4, 6, 12.
Vidíme, že najväčším spoločným deliteľom čísel 36 a 60 je číslo 12.

Všimnime si, že všetky ostatné spoločné delitele delia číslo 12, ktoré je najväčším spoločným deliteľom.

Nesúdeliteľné čísla

Dve čísla a, b nazývame **nesúdeliteľné**, ak $D(a,b) = 1$ a teda čísla a, b nemajú okrem čísla 1 ďalšieho spoločného deliteľa.

Nech $a \mid n$ a aj $b \mid n$, potom n nazývame **spoločným násobkom** čísel a, b. Najmenší spoločný násobok čísel a, b označujeme $N(a,b)$.

Kladné celé číslo N je **najmenším spoločným násobkom čísel** a, b, ak:

1. $a \mid N$ a $b \mid N$,
2. Ak n je také kladné celé číslo, pre ktoré $a \mid n$ a $b \mid n$, potom $N \mid n$.

Príklad. Vezmime čísla 36 a 60.

Číslo 36 má tieto kladné násobky: 36, 72, 108, 144, 180, 216, 252, 288, 324, 360, 396, 432, 468, 504, 540, 576, 612, 648, 684, 720, 756, ...

Číslo 60 má tieto kladné delitele: 60, 120, 180, 240, 300, 360, 420, 480, 540, 600, 660,...

Spoločnými násobkami čísel 36 a 60 sú: 180, 360, 540, 720, ...

Vidíme, že najmenším kladným spoločným násobkom čísel 36 a 60 je číslo 180.

Všimnime si, že všetky ostatné spoločné násobky sú násobkom čísla 180, ktoré je najmenším spoločným násobkom.

Medzi číslami $N(a,b)$, $D(a,b)$ platí vzťah

$$a.b = D(a, b).\ N(a, b).$$

2.3 Základné zákony aritmetiky

1. **Komutatívny zákon** (zamieňanie poradia): $a + b = b + a$, $a \,.\, b = b \,.\, a$
2. **Asociatívny zákon** (združovanie do skupín): $(a + b) + c = a + (b + c)$, $(a \,.\, b) \,.\, c = a \,.\, (b \,.\, c)$
3. **Distributívny zákon** (roznásobenie súčtu): $a \,.\, (b + c) = a \,.\, b + a \,.\, c$

Pravidlá o znamienkach

Násobenie	$a \,.\, b = a \,.\, b$	$a \,.\, (-b) = -(a \,.\, b)$
	$(-a) \,.\, (-b) = a \,.\, b$	$(-a) \,.\, b = -(a \,.\, b)$
Delenie	$a : b = a : b$	$a : (-b) = -(a : b)$
	$(-a) : (-b) = a : b$	$(-a) : b = -(a : b)$

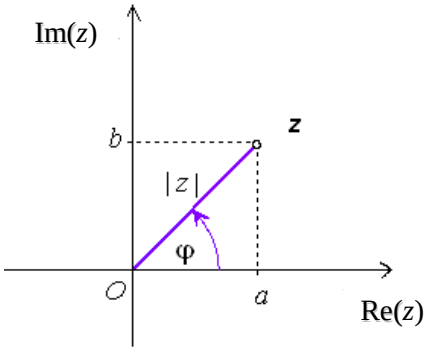
2.4 Komplexné čísla

Mnohé matematické úlohy nemajú riešenie v množine reálnych čísel. Jednoduchá kvadratická rovnica $x^2 + 1 = 0$ nemá riešenie v množine $\boldsymbol{R}$, jej diskriminant je záporné číslo $D = -4$.

Množinu reálnych čísel rozšírime na takú množinu čísel, ktorá obsahuje všetky reálne čísla a súčasne v nej má uvedená rovnica (a tiež všetky kvadratické rovnice, ktorých diskriminant D < 0) riešenie.
Komplexným číslom nazývame číslo v tvare usporiadanej dvojice reálnych čísel.
Množinu $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} = \boldsymbol{C}$ nazývame množinou všetkých komplexných čísel.
Nech $z = (a, b)$, kde $a, b \in \boldsymbol{R}$, je komplexné číslo. Číslo $\boldsymbol{a}$ je **reálna časť komplexného čísla, označujeme $\boldsymbol{a}$ = Re(z),** číslo $\boldsymbol{b}$ je **imaginárna časť komplexného čísla, označujeme $\boldsymbol{b}$ = Im(z).**
Komplexné číslo $\boldsymbol{i} = (0, 1)$ nazývame **imaginárna jednotka**.

2.4.1 Geometrická interpretácia množiny komplexných čísel *C* - Gaussova rovina

Nech je v rovine $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ daná karteziánska sústava súradníc, potom možno každému komplexnému číslu $z = (a, b)$ priradiť práve jeden bod roviny X= $[a, b]$. Tento bod je **obraz komplexného čísla *z***. Súradnicová rovina spolu s obrazmi komplexných čísel sa nazýva rovina komplexných čísel alebo **Gaussova rovina**.
Súradnicová os x sa nazýva **reálna os**, súradnicová os y sa nazýva **imaginárna os**.



Obr. 2.4.1

2.4.2 Algebrický tvar komplexného čísla

Každá usporiadaná dvojica (a, b) reálnych čísel a a b určuje práve jedno komplexné číslo, ktoré môžeme zapísať v tvare $z = a + bi$. Tomuto zápisu hovoríme **algebrický tvar komplexného čísla**.
Komplexné čísla, ktoré majú reálnu časť $a = 0$ a $b \neq 0$ nazývame aj **rýdzo imaginárne komplexné čísla.** (Napríklad: $-2i$, $10i$,...).
Pre mocniny komplexného čísla $\boldsymbol{i}$ platí:
$i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, $i^6 = -1$**,...**
teda $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$, kde $k \in \boldsymbol{Z}$.
Každé reálne číslo patrí do množiny komplexných čísel, platí: $\boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{C}$, pričom pre imaginárnu časť reálneho čísla platí $b = 0$.
Ku každému komplexnému číslu $z = a + bi$ môžeme priradiť **komplexne združené (konjugované) číslo $\bar{z} = a - bi$.**

Operácie s komplexnými číslami v algebrickom tvare

Ak $z_1 = (a + bi)$ a $z_2 = (c + di)$ sú komplexné čísla v algebrickom tvare, tak pre sčítanie, odčítanie, násobenie a delenie komplexných čísel platia tieto pravidlá

1. $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$
2. $z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i,$
3. $z_1 . z_2 = (a + bi).(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i,$
4. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a+bi}{c+di} = \dfrac{(a+bi).(c-di)}{(c+di).(c-di)} = \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} + \dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i, \quad z_2 \neq 0.$

Pre komplexne združené čísla $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$ platí

$$z + \bar{z} = 2a$$

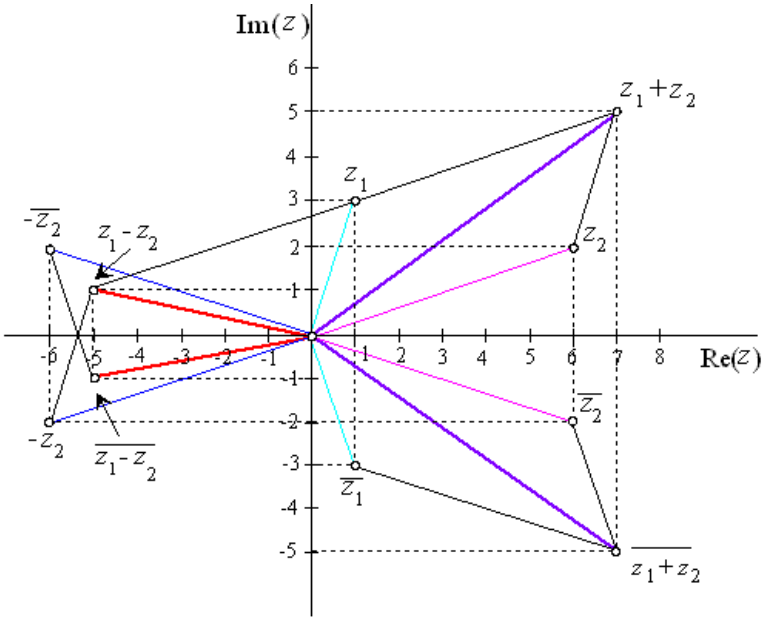
$$z.\ \bar{z} = a^2 + b^2$$

$$\overline{(\bar{z})} = z$$

$$z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in R$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}.\ \overline{z_2}.$$



Obr. 2.4.2

2.4.3 Goniometrický a exponenciálny tvar komplexného čísla

Absolútna hodnota komplexného čísla $z = a + bi$ je nezáporné reálne číslo $|z|$, pre ktoré platí

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Geometricky vyjadruje absolútna hodnota $|z|$ komplexného čísla $z = a + bi$ vzdialenosť obrazu komplexného čísla z od začiatku súradnicovej sústavy v Gaussovej rovine.
Reálne číslo φ, pre ktoré platí

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{|z|},$$

sa nazýva **argument (amplitúda) komplexného čísla** $z = a + bi$, $z \neq 0$, a označujeme ho **arg z.** Je to veľkosť uhla, ktorý zviera sprievodič bodu [a, b] s kladnou reálnou poloosou x.
Platí **arg** $z = \varphi + 2k\pi$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.
Medzi argumentmi komplexného čísla $z \neq 0$ existuje práve jeden, ktorý spĺňa podmienku $0 \leqq \varphi < 2\pi$ a tento nazývame **hlavným argumentom (amplitúdou) komplexného čísla** z a označujeme ho **Arg** z.

Komplexné číslo $z = a + bi \neq 0$ môžeme zapísať v tvare

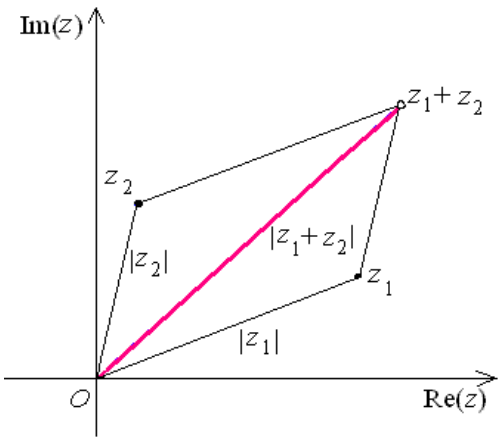
$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

ktorý nazývame **goniometrický tvar komplexného čísla** z.
Každé komplexné číslo z, pre ktoré platí $|z| = 1$, sa nazýva **komplexná jednotka**. Obrazy všetkých komplexných jednotiek vytvoria v Gaussovej rovine jednotkovú kružnicu (so stredom v začiatku súradnicového systému a polomerom $r = 1$).
Nech z_1 a z_2 sú komplexné čísla v goniometrickom tvare: $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Potom platí

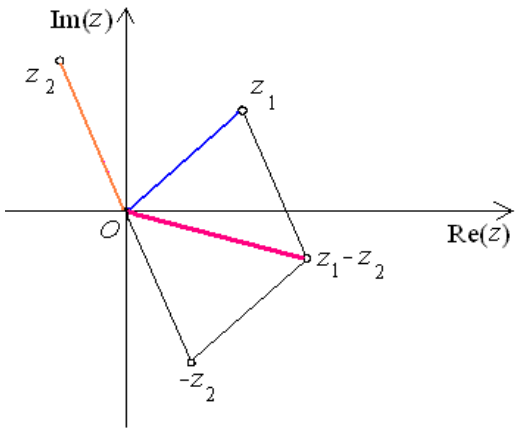
$$z_1 . z_2 = |z_1|.|z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{|z_1|}{|z_2|}\right)(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)), \quad z_2 \neq 0.$$

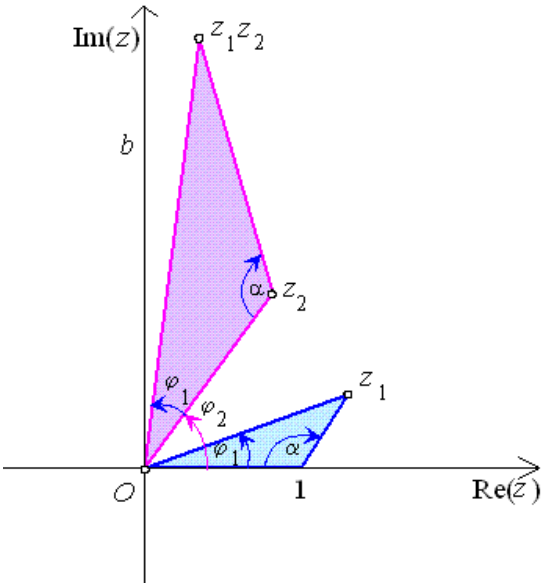
Obrázky 2.4.3 – 2.4.6 geometricky interpretujú vzťahy, ktoré platia pre súčet, rozdiel, súčin podiel komplexných čísel, vlastnosti komplexného čísla a čísla k nemu komplexne združeného.



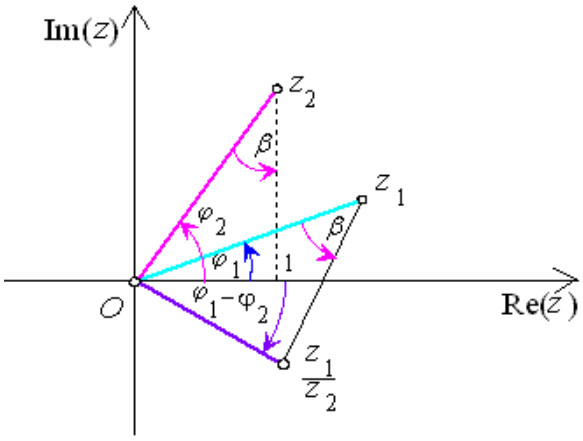
Obr. 2.4.3



Obr. 2.4.4



Obr. 2.4.5



Obr. 2.4.6

Príklad. Zapíšeme dané komplexné čísla v goniometrickom tvare: a) $3i$, b) $-1-i$.

Riešenie. a) Zrejme $|3i| = \sqrt{0^2+3^2} = 3$ a pre argument φ komplexného čísla $3i$ platí

$\cos\varphi = \frac{0}{3} = 0, \quad \sin\varphi = \frac{3}{3} = 1.$

Riešením je $\varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Za argument čísla $3i$ zvolíme hodnotu $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Dostávame $$3i = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

b) Absolútna hodnota komplexného čísla $-1-i$ je $|-1-i| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$ a pre argument φ platí $\cos\varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

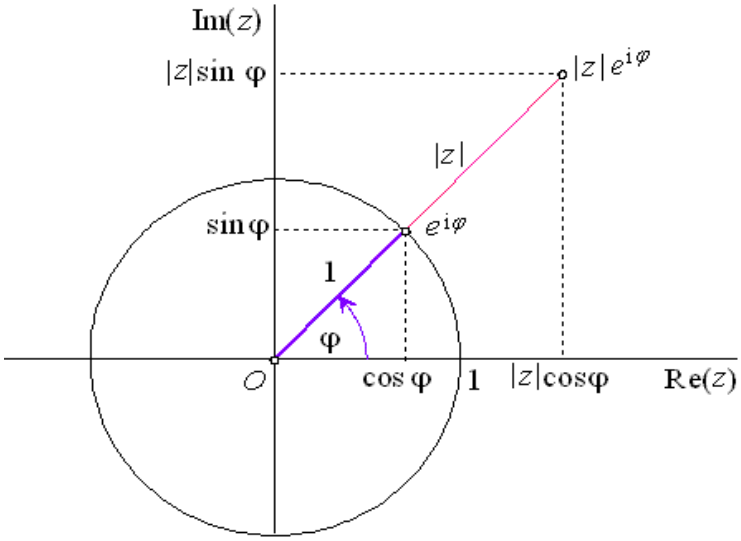
Riešením je $\varphi = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Dostávame $-1-i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$.

✓

Exponenciálny tvar komplexného čísla. Každé komplexné číslo z je možné zapísať v exponenciálnom tvare nasledovným spôsobom

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi}.$$



Obr. 2.4.7

2.4.4 Umocňovanie a odmocňovanie komplexných čísel

Moivreova veta

Ak $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ je nenulové komplexné číslo, tak pre každé prirodzené číslo n platí

$$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)).$$

Odmocnina z komplexného čísla

$\sqrt[n]{\boldsymbol{z}}$ je na množine komplexných čísel definované n – značne na rozdiel od množiny reálnych čísel, v ktorej je $\sqrt[n]{\boldsymbol{z}}$ definovaná jednoznačne. Nech $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ je ľubovoľné nenulové komplexné číslo, ktorého hlavným argumentom je φ, potom je $\sqrt[n]{\boldsymbol{z}}$ každý z n koreňov binomickej rovnice $x^n = z$ $(z \in \boldsymbol{C}, n \in \boldsymbol{N})$.

Korene tejto rovnice môžeme vyjadriť v tvare

$$x_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) \qquad (*)$$

kde za k dosadzujeme postupne čísla 0, 1, 2,..., $n-1$.
N – tá odmocnina čísla $\boldsymbol{z}$ určuje $\boldsymbol{n}$ **navzájom rôznych komplexných čísel,** ktoré dostaneme zo vzťahu (*).

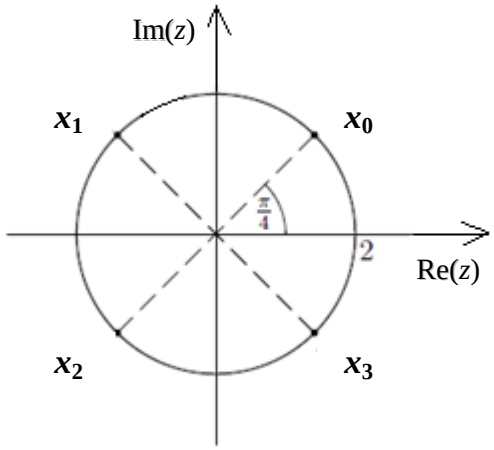
Príklad. Vypočítajme $\sqrt[4]{-16}$.

Riešenie. Pre komplexné číslo $z = -16$ platí $a = \mathrm{Re}(z) = -16$, $b = \mathrm{Im}(z) = 0$.
Potom $|z| = 16$, $\cos\varphi = \frac{-16}{16} = -1$, $\sin\varphi = \frac{0}{16} = 0$ a teda argument $\varphi = \pi$. Potom podľa vyššie uvedeného vzťahu (*) sú $\sqrt[4]{-16}$ tie komplexné čísla x_k, pre ktoré platí

$$x_k = \sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right), \quad \text{kde} \quad k \in \{0,1,2,3\}.$$

Platí $\sqrt[4]{16} = 2$ a pre jednotlivé hodnoty k dostávame

$$\sqrt[4]{-16} = \left\{\begin{array}{ll} x_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2} & \text{pre } k=0 \\ x_1 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} & \text{pre } k=1 \\ x_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2} & \text{pre } k=2 \\ x_3 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2} & \text{pre } k=3 \end{array}\right\}$$



Obr. 2.4.8

✓

Poznámka. Vzorec (*) určuje ***n*** rôznych komplexných čísel $x_0, x_1, x_2,\ldots,x_{n-1}$. Všetky majú rovnakú absolútnu hodnotu a ich argumenty sa menia postupne o rovnakú veľkosť. Obrazy koreňov binomickej rovnice $x^n = z$, tvoria vrcholy **pravidelného *n* – uholníka,** $n \geq 3$, vpísaného do kružnice s polomerom $\sqrt[n]{|z|}$. Túto skutočnosť je možné využiť pri riešení binomickej rovnice, ak vieme odhadnúť jeden jej koreň. Ostatné korene majú obrazy vo zvyšných vrcholoch pravidelného *n* – uholníka.

2.5 Intervaly

Interval je každá množina reálnych čísel, ktorých obrazy na číselnej osi vyplnia jej súvislú podmnožinu.

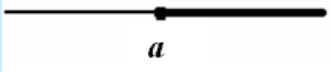
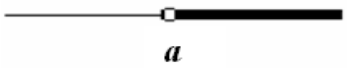
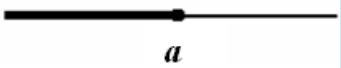
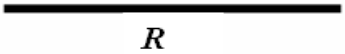
Čísla *a, b* nazývame **krajné body intervalu** alebo tiež **hranice intervalu** (dolná a horná hranica intervalu). Ľubovoľný bod intervalu, ktorý nie je jeho krajným bodom, sa nazýva **vnútorným bodom intervalu.**

Ak do intervalu patria obe jeho hranice, potom sa nazýva **uzavretý interval.**

Ak do intervalu patrí iba jedna z jeho hraníc, nazýva sa **polouzatvorený interval.**

Ak nepatrí do intervalu žiadna z jeho hraníc, potom sa nazýva **otvorený interval.**

Rôzne druhy intervalov sú popísané v Tab. 2.5.1.

Množina všetkých reálnych čísel, pre ktoré platí	**Označenie**	**Grafické znázornenie n číselnej osi**
$a \leq x \leq b$	$\langle a, b\rangle$	
$a < x < b$	(a, b)	
$a \leq x < b$	$\langle a, b)$	
$a < x \leq b$	$(a, b\rangle$	
$x \geq a$	$\langle a, \infty)$	
$x > a$	(a, ∞)	
$x \leq a$	$(-\infty, a\rangle$	
$x < a$	$(-\infty, a)$	
$x \in R$	$(-\infty, \infty)$	

Tab. 2.5.1

3 Algebrické výrazy

3.1 Algebrický výraz – základný pojem

Algebrickým výrazom nazývame výraz, ktorý sa skladá z čísel a z písmen označujúcich premenné, ktoré sú spojené znakmi pre operácie sčítania, odčítania, násobenia, delenia, umocňovania a odmocňovania. Ak je to potrebné, obsahujú tiež zátvorky, ktoré určujú poradie vykonávaných operácií.
K výrazom obsahujúcim premenné pripojujeme obor premenných. Ak nie je špecifikovaný, potom sa ním rozumie celá množina ***R*.**
Definičným oborom *D* algebrického výrazu sú podmnožiny oborov premenných, pre ktoré má daný výraz zmysel.
K základným pravidlám pri určovaní definičného oboru algebrického výrazu patrí

- menovateľ zlomku musí byť rôzny od nuly,
- pod párnou odmocninou nesmie byť záporné číslo.

3.2 Mnohočleny (polynómy)

Jednočlen je výraz, ktorý vznikne súčinom konštanty a mocniny premennej.
Polynóm je súčtom niekoľkých jednočlenov. Nenulový člen s najvyššou mocninou udáva **stupeň polynómu.** Nech n je prirodzené číslo a

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$$

polynóm stupňa n s reálnymi koeficientmi $a_0, a_1, \ldots, a_n$, kde $a_0 \neq 0$. Koeficient a_0 sa nazýva **vedúci koeficient** polynómu $P_n(x)$ a koeficient a_n **absolútny člen** polynómu $P_n(x)$. Algebrickou rovnicou stupňa n rozumieme rovnicu tvaru $P_n(x) = 0$, t.j.

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n = 0$$

Riešením (koreňom) algebrickej rovnice **(koreňom polynómu)** nazývame **číslo *c***, pre ktoré platí $\boldsymbol{P_n(c) = 0}$, t.j. číslo vyhovujúce po dosadení za x algebrickej rovnici.
(*Základná veta algebry*). V obore komplexných čísel má každý nekonštantný polynóm koreň.
Číslo ***c*** nazývame **koreňom polynómu** $P_n(x)$ práve vtedy, ak existuje polynóm $Q_{n-1}(x)$ stupňa $(n-1)$ s vlastnosťou

$$P_n(x) = (x - c)\, Q_{n-1}(x).$$

Ak je ***c*** koreňom polynómu $P_n(x)$, potom lineárny polynóm $(x - c)$ s premennou x nazývame **koreňovým činiteľom prislúchajúcim ku koreňu *c*.**

Daný je **kvadratický trojčlen** $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$, pričom pre jeho koeficienty a, b, c platí $b^2 - 4ac \geq 0$. Označme jeho korene $\boldsymbol{x_1}$ a $\boldsymbol{x_2}$**.** Potom pre jeho rozklad na súčin koreňových činiteľov v obore ***R*** platí

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).}$$

Ak **absolútny člen** $\boldsymbol{c = 0}$**,** potom pre rozklad kvadratického dvojčlena $\boldsymbol{ax^2 + bx}$ na súčin koreňových činiteľov platí

$$ax^2 + bx = x(ax + b).$$

Ak $b = 0$, $a > 0$, $c > 0$, potom môžeme kvadratický dvojčlen $ax^2 - c$, rozložiť takto

$$ax^2 - c = a\left(x - \sqrt{\frac{c}{a}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{c}{a}}\right).$$

Pri úpravách algebrických výrazov a riešení algebrických rovníc používame aj tieto vzorce

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

V obore reálnych čísel $\boldsymbol{R}$ sú kvadratický dvojčlen $a^2 + b^2$ a kvadratický trojčlen $a^2 \pm ab + b^2$ nerozložiteľné na súčin lineárnych dvojčlenov.

3.3 Úprava racionálnych lomených výrazov

Pri úpravách racionálnych lomených výrazov sa používajú vyššie uvedené vzorce pre rozklad mnohočlenov a tiež vzorce pre počítanie so zlomkami. V úlohách o úpravách lomených výrazov je nutné určiť podmienky pre výraz v menovateli tak, aby menovateľ každého zlomku v pôvodných výrazoch i v upravovaných tvaroch bol rôzny od nuly.
Pri úpravách výrazov budeme používať tieto pravidlá pre operácie so zlomkami:

Rozširovanie zlomkov číslom $k \neq 0$: $\frac{a}{b} = \frac{ak}{bk}$, $b \neq 0, k \neq 0$.

Krátenie zlomkov číslom $k \neq 0$: $\frac{ak}{bk} = \frac{a}{b}$, $b \neq 0, k \neq 0$.

Sčitovanie zlomkov: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$; $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$, $b \neq 0, d \neq 0$.

Odčítanie zlomkov: $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - cb}{bd}$; $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a - c}{b}$, $b \neq 0, d \neq 0$.

Násobenie zlomkov: $\frac{a}{b} . \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$; $b \neq 0, d \neq 0$.

Delenie zlomkov: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} . \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$; $b \neq 0, d \neq 0, c \neq 0$.

Úprava zloženého zlomku: $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad}{bc}$; $b \neq 0, d \neq 0, c \neq 0$.

Pravidlá pre počítanie s mocninami

Pre prirodzené čísla ***r, s*** a pre reálne čísla ***a, b*** platí:

$$a^r . a^s = a^{r+s}$$

$$a^r : a^s = a^{r-s} \qquad a \neq 0$$

$$\left(a^r\right)^s = a^{rs}$$

$$(a . b)^r = a^r . b^r$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}; \quad b \neq 0$$

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r} \quad ; \; a \neq 0$$

Poznámka. Uvedených šesť vzorcov platí pre každé reálne číslo *r, s,* ak je súčasne $a > 0$, $b > 0$.

Ak sú *r, s* celé čísla, uvedených šesť vzorcov platí pre každé $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Pre každé reálne číslo *a* je $\left(a^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a^2} = |a|$.

Pre a ≥ 0 môžeme počítať takto: $\left(a^2\right)^{\frac{1}{2}} = a^1 = a$.

Príklad. Upravme algebrický výraz $\left(a + \frac{1}{b}\right)^{-2} \left(b - \frac{1}{a}\right)^{-3} \left(ab - \frac{1}{ab}\right)^2$.

Riešenie.

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)^{-2} \left(b - \frac{1}{a}\right)^{-3} \left(ab - \frac{1}{ab}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{ab+1}{b}\right)^{-2} \left(\frac{ab-1}{a}\right)^{-3} \left(\frac{a^2b^2-1}{ab}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{b}{ab+1}\right)^2 \left(\frac{a}{ab-1}\right)^3 \left(\frac{(ab-1).(ab+1)}{ab}\right)^2 =$$

$$= \frac{b^2}{(ab+1)^2} . \frac{a^3}{(ab-1)^3} . \frac{(ab-1)^2.(ab+1)^2}{a^2b^2} = \frac{a}{(ab-1)}.$$

Podmienky riešiteľnosti vychádzajú z toho, že všetky výrazy v menovateli musia byť nenulové, takže postupne dostávame: $b \neq 0$, $a \neq 0$, $ab \neq 1$, $ab \neq -1$.

✓

3.4 *Úprava iracionálnych algebrických výrazov*

Pri úpravách iracionálnych algebrických výrazov využívame poznatky o odmocninách a mocninách s racionálnymi mocniteľmi a pravidlá pre počtové operácie so zlomkami.
Podmienky, pre ktoré má zmysel dané úpravy výrazov robiť, predovšetkým vyjadrujú, že základy všetkých párnych odmocnín musia byť nezáporné čísla a menovatele zlomkov sa nesmú rovnať nule.

Pravidlá pre počítanie s odmocninami

$a \geq 0,\ b \geq 0,\ n \in \boldsymbol{N}$

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \qquad b \neq 0$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}, \qquad m \in N$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, \quad m \in Z$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^p}, \qquad p \in N$$

Poznámka. Odmocnina zo súčtu sa nerovná súčtu odmocnín: $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Príklad. Upravme algebrický výraz $V(x) = \dfrac{\sqrt{x}\sqrt[3]{x^2}\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[12]{x^{11}}}$.

Riešenie.

$$V(x) = \frac{\sqrt{x}\sqrt[3]{x^2}\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[12]{x^{11}}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{2}{3}}x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{11}{12}}} = \frac{x^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}}}{x^{\frac{11}{12}}} =$$

$$= x^{\frac{23}{12}-\frac{11}{12}} = x^{\frac{12}{12}} = x.$$

Za predpokladu, že $x > 0$.

✓

3.5 *Absolútna hodnota reálneho čísla*

Každému reálnemu číslu $\boldsymbol{a}$ je priradené práve jedno reálne číslo $|\boldsymbol{a}|$ takto:
$|\boldsymbol{a}| = a$ pre $a \geq 0$, $|\boldsymbol{a}| = -a$ pre $a < 0$.
Toto číslo $|\boldsymbol{a}|$ sa nazýva **absolútna hodnota** reálneho čísla $\boldsymbol{a}$.
Niektoré vlastnosti absolútnej hodnoty reálneho čísla

1) Pre $\forall a \in R: |a| \geq 0, \quad |-a| = |a|, \quad |a| \geq a, \quad |a| \geq -a.$

2) Pre $\forall a, b \in R: |a.b| = |a|.|b|, \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad pre \quad b \neq 0.$

3) Pre $\forall a, b \in R: |a+b| \leq |a| + |b|.$

4) Pre $\forall a, k \in R, \; k > 0: |a| < k \Leftrightarrow -k < a < k, \quad alebo \quad a \in (-k, k).$

5) Pre $\forall a \in R: \sqrt{a^2} = |a|.$

Geometrický význam absolútnej hodnoty reálneho čísla ***a*** je vzdialenosť obrazu čísla ***a*** na číselnej osi od začiatku, $|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|$ vzdialenosť obrazov čísel ***a, b.***

Príklad. Zjednodušme výraz $|x| + |x+2| + |x-1|$, pre $x \in (-\infty; -2)$.

Riešenie. Z definície absolútnej hodnoty reálneho čísla dostávame:
pre všetky $x \in (-\infty; -2)$ je $x < 0$ a teda $|x| = -x$; $x + 2 < 0$ a teda $|x + 2| = -(x + 2)$
a $x - 1 < 0$ a teda $|x - 1| = -(x - 1)$.
Preto pre $x \in (-\infty; -2)$ platí $|x| + |x+2| + |x-1| = -x - (x+2) - (x-1) = -3x - 1.$

✓

4 Rovnice a nerovnice

4.1 Rovnice

Nech f, g sú funkcie premennej x definované na množine $\boldsymbol{A} \subset R$.
Úlohu nájsť všetky $x \in \boldsymbol{A}$, pre ktoré funkcie $f(x)$ a $g(x)$ nadobúdajú rovnaké funkčné hodnoty zapíšeme v tvare $\boldsymbol{f(x) = g(x)}$, kde $x \in \boldsymbol{A}$ a nazveme ju **rovnicou s neznámou** x.
$f(x)$ je ľavá strana rovnice, $g(x)$ pravá strana rovnice.
Množina $\boldsymbol{A}$ sa nazýva **definičný obor** rovnice, označujeme $\boldsymbol{D}$. Číslo x, ktoré vyhovuje danej rovnici, sa nazýva **koreň alebo riešenie rovnice**.
Pod riešením rovnice rozumieme

a) ľubovoľné $x \in \boldsymbol{R}$, ktoré vyhovuje danej rovnici,
b) množina všetkých $x \in \boldsymbol{R}$, ktoré vyhovujú danej rovnici,
c) postup, algoritmus, pomocou ktorého určíme všetky korene rovnice.

Každý prechod rovnice $f_1(x) = g_1(x)$ s množinou riešení A_1 na rovnicu tvaru $f_2(x) = g_2(x)$ s množinou riešení A_2, kde $A_1 \subset A_2$ sa nazýva **dôsledková úprava rovnice** $f_1(x) = g_1(x)$.
Dôsledkové úpravy, pri ktorých získame ekvivalentnú rovnicu s danou rovnicou, t.j. rovnicu s tou istou množinou riešení, sa nazývajú **ekvivalentné úpravy rovnice**.

Ekvivalentné úpravy rovníc sú:
EU 1 - riešenie rovnice sa nezmení, ak k obidvom stranám rovnice pripočítame rovnaké číslo.
EU 2 - riešenie rovnice sa nezmení, ak od obidvoch strán rovnice odpočítame rovnaké číslo.
EU 3 - riešenie rovnice sa nezmení, ak obidve strany rovnice vynásobíme rovnakým číslom, rôznym od nuly.
EU 4 - riešenie rovnice sa nezmení, ak obidve strany rovnice vydelíme rovnakým číslom rôznym od nuly.
Ak pri riešení rovnice používame len ekvivalentné úpravy, nemusíme robiť skúšku správnosti. Pretože dôsledkové úpravy môžu viesť k rovniciam so „širším“ definičným oborom, je potrebné vykonať skúšku správnosti dosadením vypočítaných koreňov do pôvodnej rovnice.

4.1.1 Lineárne rovnice

Rovnica $f(x) = g(x)$ s jednou neznámou $x \in \boldsymbol{R}$ sa nazýva **lineárna rovnica**, alebo aj algebrická rovnica 1. stupňa, ak je možné ju ekvivalentnými úpravami vyjadriť v tvare

$$\boldsymbol{ax + b = 0}, \text{ kde } a \in \boldsymbol{R}, b \in \boldsymbol{R}, a \neq 0.$$

Lineárna rovnica má práve jeden koreň $x = -\dfrac{b}{a}$.

Poznámka. Graficky koreň rovnice $ax + b = 0$ určíme ako priesečník priamky $y = ax + b$ s osou x.

4.1.2 Kvadratické rovnice

Rovnica $f(x) = g(x)$ s jednou neznámou $x \in \boldsymbol{C}$, sa nazýva **kvadratická rovnica**, alebo aj algebrická rovnica 2. stupňa, ak je možné ju ekvivalentnými úpravami vyjadriť v tvare

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}, \text{ kde } a \in \boldsymbol{R}, b \in \boldsymbol{R}, c \in \boldsymbol{R}, a \neq 0.$$

Výrazy ax^2, bx, c sa nazývajú **kvadratický člen**, **lineárny člen** a **absolútny člen** rovnice.

O počte koreňov rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a \neq 0$, v obore reálnych, resp. komplexných čísel rozhoduje číslo **D = $b^2 - 4ac$,** ktoré sa nazýva **diskriminant kvadratickej rovnice.**

a) Pre **D > 0** existujú **dva rôzne reálne korene** kvadratickej rovnice $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$,

b) Pre **D = 0** existuje jeden reálny **dvojnásobný koreň** kvadratickej rovnice
$x_{1,2} = -\dfrac{b}{2a}$,

c) Pre **D < 0** kvadratická rovnica nemá reálne korene, má **dva komplexne združené korene**
$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a}$.

Ak $b = 0$ alebo $c = 0$, hovoríme o **neúplnej kvadratickej rovnici,** ktorú riešime nasledovným spôsobom:

a) $\boldsymbol{ax^2 + c = 0,\ c \neq 0}$

ak $\dfrac{-c}{a} > 0$; $x_{1,2} = \pm\sqrt{\dfrac{-c}{a}}$

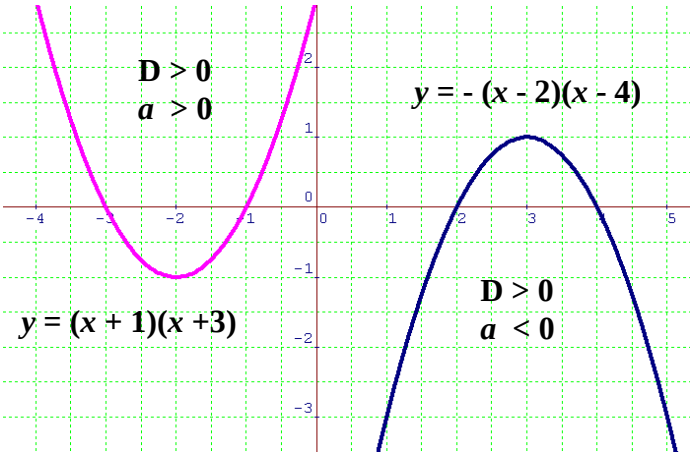
ak $\dfrac{-c}{a} < 0$; $x_{1,2} = \pm\, i\sqrt{\left|\dfrac{-c}{a}\right|}$.

b) $\boldsymbol{ax^2 + bx = 0,\ b \neq 0}$

$x(ax+b) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = \dfrac{-b}{a}$.

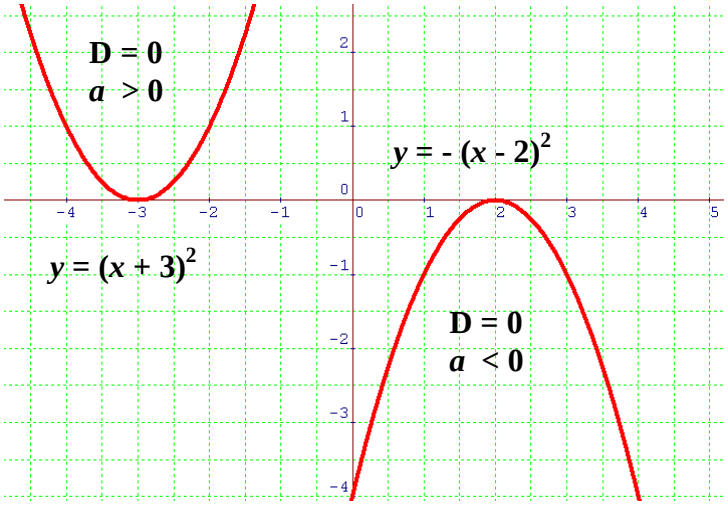
Poznámka. Grafická interpretácia: Počet reálnych koreňov rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, sa rovná počtu priesečníkov paraboly $y = ax^2 + bx + c$ s osou x. Uvádzaná grafická interpretácia je tiež výbornou pomôckou pri riešení kvadratických nerovníc.

a) Pre **D > 0** má kvadratická rovnica **dva rôzne reálne korene.**



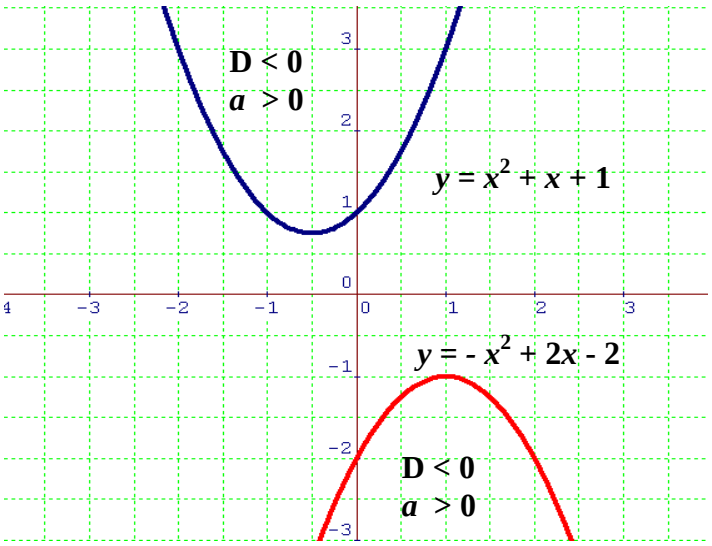
Obr. 4.1.1

b) Pre **D = 0** má kvadratická rovnica jeden reálny **dvojnásobný koreň**



Obr. 4.1.2

c) Pre **D < 0** kvadratická rovnica nemá reálne korene.



Obr. 4.1.3

Nech sú x_1, x_2 korene kvadratickej rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, resp. $x^2 + px + q = 0$ (rovnica v normovanom tvare), potom platí (Viéteho vzorce)

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{a} \quad x_1.x_2 = \frac{c}{a},$$

resp.

$$x_1 + x_2 = -p \quad \text{a} \quad x_1.x_2 = q.$$

Ak je x_1 koreňom kvadratickej rovnice, potom výraz $(x - x_1)$ sa nazýva **koreňovým činiteľom.** Zápis

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

$$resp.\ x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2).$$

sa nazýva **rozklad kvadratického trojčlena na súčin koreňových činiteľov.**

Príklad. Zistite, kedy rovnice $x^2 + px + q = 0$ a $x^2 + qx + p = 0$, $p \neq q$, majú práve jeden rovnaký (spoločný) koreň.

Riešenie. Nech x_1 je spoločný koreň oboch rovníc, x_2 je druhý koreň rovnice $x^2 + px + q = 0$ a x_3 je druhý koreň rovnice $x^2 + qx + p = 0$, $x_2 \neq x_3$. Potom pre koeficienty a korene kvadratických rovníc tvaru $x^2 + px + q = 0$ a $x^2 + qx + p = 0$ platí

$x_1 + x_2 = -p,$
$x_1 . x_2 = q,$
$x_1 + x_3 = -q,$
$x_1 . x_3 = p.$

Odtiaľ dostávame $x_1 + x_2 = -x_1 . x_3$ a tiež $x_1 + x_3 = -x_1 . x_2$.
Po úprave (rovnice odčítame) dostávame $x_1 = 1$. Spoločným koreňom oboch kvadratických rovníc je $\boldsymbol{x_1 = 1}$. Po dosadení do

$x_1 + x_2 = -p,$
$x_1 . x_2 = q .$

dostávame $1 + x_2 = -p$, $1 . x_2 = q$, a teda $p + q = -1$.
Záver. Ak pre koeficienty kvadratických rovníc $x^2 + px + q = 0$ a $x^2 + qx + p = 0$ je splnený predpoklad $p + q = -1$, potom majú tieto rovnice spoločný koreň $\boldsymbol{x = 1}$.

✓

4.1.3 Iracionálne rovnice

Iracionálnou rovnicou nazývame rovnicu obsahujúcu odmocniny z výrazov s neznámou x. Riešime ich v obore reálnych čísel.
Pri každom riešení iracionálnej rovnice najskôr určujeme podmienky riešiteľnosti – definičný obor rovnice.
Iracionálne rovnice riešime najčastejšie dôsledkovými úpravami a to tak, že umocňujeme obe strany rovnice, preto je nutnou súčasťou riešenia skúška správnosti.
Zložitejšie iracionálne rovnice riešime tiež substitučnou metódou.
V obore reálnych čísel platí

$a = b \Rightarrow a^2 = b^2,$
$a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$ alebo $a = -b.$

Príklad. Riešme rovnicu $\sqrt{x+5} + \sqrt{x-2} = 7$ v množine $\boldsymbol{R}$.

Riešenie.
Pre definičný obor rovnice platí: $x + 5 \geq 0 \wedge x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \langle 2, \infty) \Rightarrow$ $\boldsymbol{D = \langle 2, \infty)}$.

$$\sqrt{x+5} + \sqrt{x-2} = 7$$
$$\sqrt{x+5} = 7 - \sqrt{x-2}$$

Po umocnení rovnice dostávame

$$x + 5 = 49 - 14\sqrt{x-2} + x - 2$$
$$14\sqrt{x-2} = 42 \quad |:14$$
$$\sqrt{x-2} = 3$$
$$x - 2 = 9 \Rightarrow x = 11$$

Nakoniec urobíme skúšku správnosti

$L(11) = \sqrt{11+5} + \sqrt{11-2} = \sqrt{16} + \sqrt{9} = 7 = P.$

$L = P.$

Záver. Riešením rovnice je $x = 11$.

✓

Príklad. V množine ***R*** riešme rovnicu $\sqrt[3]{24+x} + \sqrt{12-x} = 6.$

Riešenie. Pre definičný obor rovnice platí $12 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 12 \Rightarrow \boldsymbol{D} = (-\infty, 12\rangle$.

Označme $\sqrt[3]{24+x} = a \wedge \sqrt{12-x} = b.$ Dostaneme sústavu troch rovníc s troma neznámymi

$a + b = 6 \wedge \sqrt[3]{24+x} = a \wedge \sqrt{12-x} = b.$

Umocnením druhej a tretej rovnice dostaneme

$a + b = 6 \;\wedge\; 24 + x = a^3 \wedge 12 - x = b^2.$

Sčítame druhú a tretiu rovnicu pričom získame dve rovnice s dvoma neznámymi.

$a + b = 6 \;\wedge\; 36 = a^3 + b^2$

Po vyjadrení neznámej b z prvej rovnice a dosadení do druhej rovnice dostaneme

$b = 6 - a \wedge 36 = a^3 + b^2$

$36 = a^3 + (6-a)^2$

$36 = a^3 + a^2 - 12a + 36$

$0 = a^3 + a^2 - 12a$

$0 = a(a^2 + a - 12)$

$0 = a(a+4)(a-3) \Leftrightarrow a = 0 \vee a = -4 \vee a = 3.$

Platí $24 + x = 0 \vee 24 + x = -64 \vee 24 + x = 27.$

Odkiaľ dostávame

$x = -24 \vee x = -88 \vee x = 3.$

Záver. Po vykonaní skúšky správnosti zistíme, že všetky tri korene $x_1 = -24$, $x_2 = -88$ a $x_3 = 3$ sú riešeniami danej rovnice.

✓

4.1.4 Rovnice s absolútnou hodnotou

Rovnice s absolútnou hodnotou sú rovnice, v ktorých sa vyskytuje neznáma x aspoň raz v absolútnej hodnote. Riešiť takúto rovnicu znamená upraviť ju na tvar, v ktorom nie je absolútna hodnota. Zopakujeme definíciu absolútnej hodnoty $|a|$ čísla a

$$|a| = \begin{cases} a & pre \quad a \geq 0, \\ -a & pre \quad a < 0. \end{cases}$$

Rovnice s absolútnou hodnotou riešime postupne na jednotlivých intervaloch. Tieto získame tak, že definičný obor rovnice ***D*** rozdelíme na čiastkové intervaly nulovými bodmi výrazov, ktoré sú v absolútnej hodnote. Riešenie rovnice získame ako zjednotenie riešení rovnice na parciálnych intervaloch.

Príklad. Riešme rovnicu $|x+3| - |x-2| = -5.$

Riešenie. Definičný obor rovnice ja celá množina ***R***.

Pretože platí $x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ a $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$, rozdelíme množinu $\boldsymbol{R}$ na tri intervaly takto: $(-\infty, -3)$, $\langle -3, 2)$, $\langle 2, \infty)$. Rovnicu riešime postupne na parciálnych intervaloch.
1.) Ak $x \in (-\infty, -3)$, potom $x + 3 < 0$, a teda $|x + 3| = -(x + 3) = -x - 3$;
$x - 2 < 0$, a teda $|x - 2| = -x + 2$.
Riešime rovnicu $-x - 3 - (-x + 2) = -5$. Po úprave dostaneme $-5 = -5$, čo je pravdivý výrok, a teda riešením rovnice na intervale $(-\infty, -3)$ je každé $\boldsymbol{x \in (-\infty, -3)}$.
2.) Ak $x \in \langle -3, 2)$, potom $x + 3 \geq 0$, a teda $|x + 3| = x + 3$;
$x - 2 < 0$, a teda $|x - 2| = -x + 2$.
Riešime rovnicu $x + 3 - (-x + 2) = -5$. Po úprave dostaneme $x = -3$. Jej riešenie $\boldsymbol{x = -3}$ patrí do intervalu $\langle -3, 2)$, a teda riešenie rovnice na intervale $\langle -3, 2)$ je $\boldsymbol{x = -3}$.
3.) Ak $x \in \langle 2, \infty)$, potom $x + 3 \geq 0$, a teda $|x + 3| = x + 3$;
$x - 2 \geq 0$, a teda $|x - 2| = x - 2$.
Riešime rovnicu $x + 3 - (x - 2) = -5$. Po úprave dostaneme $5 = -5$, čo je nepravdivý výrok, a teda žiadne $x \in \langle 2, \infty)$ nie je riešením rovnice.
Riešenie rovnice na intervale $\langle 2, \infty)$ je $\boldsymbol{\emptyset}$.

Záver. Riešením rovnice sú všetky $x \in (-\infty, -3\rangle$.

✓

4.2 Nerovnice

Nech f, g sú funkcie premennej x definované na množine $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{R}$, potom úlohu:
Určiť všetky $x \in \boldsymbol{A}$, pre ktoré platí:
$f(x) > g(x)$, resp. $f(x) < g(x)$, resp. $f(x) \geq g(x)$, resp. $f(x) \leq g(x)$, nazveme **nerovnicou s neznámou** x.
Pri riešení nerovníc je nutné rozlišovať násobenie nerovnice kladným, resp. záporným číslom, či výrazom v. Platí pre $v > 0$

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow v.\, f(x) < v.\, g(x),$$
$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow v.\, f(x) > v.\, g(x),$$

pre $v < 0$

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow v.\, f(x) > v.\, g(x),$$
$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow v.\, f(x) < v.\, g(x).$$

Umocňovať môžeme nerovnicu alebo nerovnosť len pre nezáporné čísla!

$$0 \leq a < b \Rightarrow a^2 < b^2$$

V inom prípade uvedená implikácia neplatí.
Napríklad: $-5 < 2$, ale neplatí $25 < 4$.
Upozornenie: Pri riešení nerovníc je tiež vždy potrebné určiť definičný obor nerovnice.

Ekvivalentné úpravy nerovníc:

1. vzájomná výmena strán nerovnice so súčasnou zmenou znaku nerovnosti na obrátený,
2. nahradenie ľubovoľnej strany nerovnice výrazom, ktorý sa jej rovná v celom definičnom obore nerovnice, pričom znak nerovnosti sa nezmení,
3. pripočítaním toho istého čísla alebo výrazu s neznámou, ktorý je definovaný v celom obore riešenia, k obom stranám nerovnice, pričom znak nerovnosti sa nemení,
4. vynásobenie oboch strán nerovnice kladným číslom alebo kladným výrazom s neznámou, pričom znak nerovnosti sa nemení,
5. vynásobenie oboch strán nerovnice záporným číslom alebo záporným výrazom s neznámou, pritom znak nerovnosti sa zmení na obrátený,
6. umocnenie oboch strán nerovnice prirodzeným mocniteľom, ak sú obe strany nerovnice nezáporné, pritom znak nerovnosti sa nemení,

7. odmocnenie oboch strán nerovnice prirodzeným odmocniteľom, ak sú obe strany nerovnice nezáporné, pričom znak nerovnosti sa nemení,
8. zlogaritmovanie oboch strán nerovnice pri tom istom základe väčšom ako 1, ak sú obe strany nerovnice kladné, pritom znak nerovnosti sa nemení.

Pri riešení nerovníc je často najvýhodnejšie upraviť nerovnicu do tvaru, kde výraz v tvare súčinu, resp. podielu na jednej strane nerovnice porovnávame s nulou, tzn. danú nerovnicu vyjadríme v anulovanom tvare, v ktorom jedna strana nerovnice je totožná s nulou. Následne používame pravidlá pre riešenie rovníc a nerovníc v súčinovom a podielovom tvare:

$A(x).B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0 \ \vee \ B(x) = 0$
$A(x)/B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0 \ \wedge \ B(x) \neq 0$
$A(x).B(x) \geq 0 \Leftrightarrow (A(x) \geq 0 \wedge B(x) \geq 0) \vee (A(x) \leq 0 \wedge B(x) \leq 0)$
$A(x).B(x) \leq 0 \Leftrightarrow (A(x) \leq 0 \wedge B(x) \geq 0) \vee (A(x) \geq 0 \wedge B(x) \leq 0)$
$A(x)/B(x) \leq 0 \Leftrightarrow (A(x) \geq 0 \wedge B(x) < 0) \vee (A(x) \leq 0 \wedge B(x) > 0)$
$A(x)/B(x) \geq 0 \Leftrightarrow (A(x) \geq 0 \wedge B(x) > 0) \vee (A(x) \leq 0 \wedge B(x) < 0)$.

4.2.1 Lineárne nerovnice

Lineárnou nerovnicou s neznámou $x \in \boldsymbol{R}$ nazývame každú nerovnicu tvaru $ax + b < 0$, $ax + b \leq 0$, $ax + b > 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b \neq 0$, kde a, b sú ľubovoľné reálne čísla, pričom $a \neq 0$.

Pri riešení lineárnej nerovnice nerovnicu upravíme na tvar
$ax < -b$, $ax \leq -b$, $ax > -b$, $ax \geq -b$.

Potom môžu nastať tieto prípady:

Ak $a < 0$, potom z nerovnosti $ax < -b$ dostávame $x > -\frac{b}{a}$,

resp. z nerovnosti $ax > -b$ dostávame $x < -\frac{b}{a}$.

Ak $a > 0$, potom z nerovnosti $ax < -b$ dostávame $x < -\frac{b}{a}$, resp. z nerovnosti $ax > -b$ dostávame $x > -\frac{b}{a}$.

Príklad. Riešme nerovnicu $\frac{5-x}{x-1} + \frac{1+4x}{2x+2} \leq 1$.

Riešenie. Najskôr určíme podmienky riešiteľnosti danej nerovnice.

Musí platiť $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ a súčasne $2x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$, definičným oborom nerovnice sú všetky reálne čísla okrem čísel 1 a -1; $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{R} - \{1, -1\}$.

Pri riešení nerovnice tohto typu je treba rozlišovať pri vynásobení nerovnice spoločným menovateľom, teda výrazom $(x - 1)(2x + 2)$, či je tento výraz kladný alebo záporný. Tento riešiteľský postup je možné nahradiť vynulovaním pravej strany nerovnice a následným upravením ľavej strany nerovnice do tvaru podielu.

Počítame

$$\frac{5-x}{x-1}+\frac{1+4x}{2x+2}\le 1$$
$$\frac{5-x}{x-1}+\frac{1+4x}{2x+2}-1\le 0$$
$$\frac{(5-x)(2x+2)+(1+4x)(x-1)-(x-1).(2x+2)}{(x-1).(2x+2)}\le 0$$
$$\frac{10x+10-2x^2-2x+x-1+4x^2-4x-2x^2+2-2x+2x}{2(x-1).(x+1)}\le 0$$
$$\frac{5x+11}{2(x-1)(x+1)}\le 0$$

Určíme nulové body jednotlivých činiteľov - sú nimi body $-1,\ 1, -\frac{11}{5}$. Rozdelíme nimi definičný obor nerovnice na štyri intervaly a zistíme znamienka jednotlivých činiteľov na parciálnych intervaloch. Údaje zapíšeme do tabuľky

	$\left(-\infty, -\frac{11}{5}\right\rangle$	$\left(-\frac{11}{5}, -1\right)$	$(-1, 1)$	$(1,\infty)$
$5x + 11$	-	+	+	+
$x - 1$	-	-	-	+
$x + 1$	-	-	+	+
$\frac{5x+11}{2(x-1)(x+1)}$	-	+	-	+

Tab. 4.2.1

Záver. Riešením nerovnice sú všetky $x\in\left(-\infty,-\frac{11}{5}\right)\cup(-1,1)$.

✓

Táto metóda riešenia nerovnice sa niekedy nazýva aj metódou nulových bodov a je použiteľná pre rôzne typy nerovníc.

4.2.2 Kvadratické nerovnice

Kvadratickou nerovnicou nazývame výrokovú formu niektorého z týchto tvarov: $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \ge 0$, $ax^2 + bx + c \le 0$, vo všetkých prípadoch $a, b, c \in \boldsymbol{R}$, $a \ne 0$.

Vyriešiť kvadratickú nerovnicu znamená nájsť všetky $x \in \boldsymbol{R}$, pre ktoré je daná nerovnosť splnená, t.j. po dosadení ktorých sa daná výroková forma stane pravdivým výrokom.

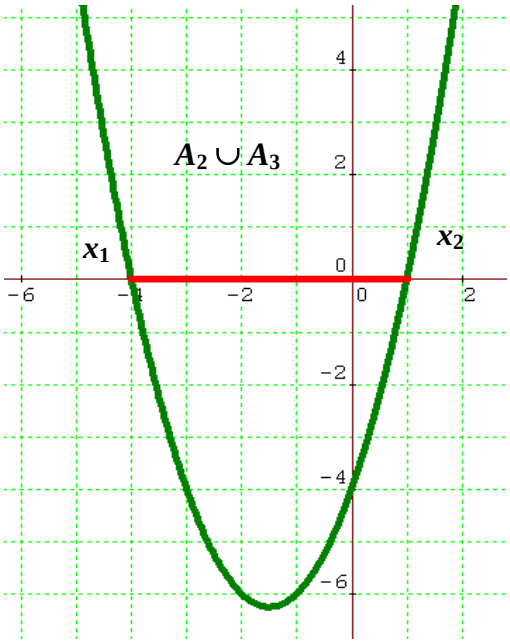
Pri riešení kvadratických nerovníc využívame poznatky o kvadratických rovniciach a kvadratických funkciách. Podobne ako pri kvadratických rovniciach množina riešení kvadratickej nerovnice závisí od znamienka diskriminantu $D = b^2 - 4ac$. Tabuľka 4.2.2 zhrňuje prehľad všetkých prípadov, ktoré môžu nastať. Označme

$\boldsymbol{A}_1 = (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$,
$\boldsymbol{A}_2 = (x_1, x_2)$,
$\boldsymbol{A}_3 = \{x_1, x_2\}$,
kde x_1, x_2 sú korene príslušnej kvadratickej rovnice.

	D < 0 ***a* < 0**	**D < 0** ***a* > 0**	**D = 0** ***a* < 0**	**D = 0** ***a* > 0**	**D > 0** ***a* < 0**	**D > 0** ***a* > 0**
$ax^2 + bx + c > 0$	$\emptyset$	R	$\emptyset$	$R - \{x_1\}$	A_2	A_1
$ax^2 + bx + c \geq 0$	$\emptyset$	R	$\{x_1\}$	R	$A_2 \cup A_3$	$A_1 \cup A_3$
$ax^2 + bx + c < 0$	R	$\emptyset$	$R - \{x_1\}$	$\emptyset$	A_1	A_2
$ax^2 + bx + c \leq 0$	R	$\emptyset$	R	$\{x_1\}$	$A_1 \cup A_3$	$A_2 \cup A_3$

Tab. 4.2.2

Príklad. Na obr. 4.1.4 je znázornené grafické riešenie nerovnice $x^2 + 3x - 4 \leq 0$.
Platí: $x^2 + 3x - 4 \leq 0 \Leftrightarrow (x + 4)(x - 1) \leq 0$ a $x_1 = -4$, $x_2 = 1$ sú korene príslušnej kvadratickej rovnice.



Obr. 4.1.4

Podľa tabuľky 4.2.2 platí: $ax^2 + bx + c \leq 0$, $\mathbf{D > 0}$, $\boldsymbol{a > 0}$, $\boldsymbol{A_2} = (-4, 1)$, $\boldsymbol{A_3} = \{-4, 1\}$, $\boldsymbol{x_1 = -4, x_2 = 1}$. Riešením nerovnice je množina $\boldsymbol{A_2 \cup A_3} = \langle -4, 1\rangle$.

5 Sústavy lineárnych rovníc

5.1 Sústavy lineárnych rovníc s dvoma neznámymi

Sústavu lineárnych rovníc s dvoma neznámymi má tvar

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned} \qquad (5.1)$$

kde $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2 \in \boldsymbol{R}$ sú **koeficienty sústavy**.
Riešením sústavy je taká usporiadaná dvojica čísel $[x, y]$, ktorá patrí do oborov pravdivosti oboch rovníc sústavy.

5.2 Metódy riešenia sústav lineárnych rovníc

1. Sčítacia (adičná) metóda

Riešme sústavu dvoch rovníc s dvoma neznámymi (5.1), pričom koeficienty pri neznámych sú nenulové čísla. Ak prvú z rovníc vynásobíme $\boldsymbol{a_{22}}$ a druhú $(-\boldsymbol{a_{12}})$, tak

$$\begin{aligned} a_{11}a_{22}x + a_{12}a_{22}y &= b_1a_{22} \\ -a_{12}a_{21}x - a_{12}a_{22}y &= -a_{12}b_2. \end{aligned}$$

Obe rovnice sčítame a dostaneme

$$a_{11}a_{22}x - a_{12}a_{21}x = b_1a_{22} - b_2a_{12}.$$

Z čoho

$$x = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \qquad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0.$$

Ak $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$, sústava buď nemá riešenie, alebo ich má nekonečne veľa. Podobne, ak prvú rovnicu vynásobíme $\boldsymbol{a_{21}}$ a druhú $(-\boldsymbol{a_{11}})$ a tieto rovnice sčítame, dostaneme

$$y = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Príklad. Riešme sústavu dvoch rovníc s dvoma neznámymi

$$\begin{aligned} 7x + 12y &= 71 \\ 21x - 4y &= 93. \end{aligned}$$

Riešenie. Využijeme ekvivalentné úpravy; vynásobíme druhú rovnicu číslom 3:

$$\begin{aligned} 7x + 12y &= 71 \\ 63x - 12y &= 279. \end{aligned}$$

Sčítaním rovníc dostaneme

$$\begin{aligned} 70x &= 350 \\ x &= 5. \end{aligned}$$

Opäť vyjdeme zo sústavy rovníc. Prvú rovnicu násobíme číslom 3, druhú číslom (−1)

$$\begin{aligned} 21x + 36y &= 71 \\ -21x + 4y &= -93. \end{aligned}$$

Ak sčítame posledné dve rovnice, po úprave dostaneme

$$y = 3.$$

Záver. Po vykonaní skúšky správnosti zisťujeme že usporiadaná dvojica $\bar{x} = [5, 3]$ je naozaj riešením uvedenej sústavy rovníc.

✓

2. Dosadzovacia (substitučná) metóda

Pri riešení sústavy rovníc postupujeme tak, že z ľubovoľnej rovnice vyjadríme niektorú neznámu, dosadíme do druhej (pri sústave dvoch rovníc s dvoma nezámymi), resp. do dvoch ďalších rovníc (pri sústave troch rovníc s 3 neznámymi) namiesto príslušnej neznámej. Tým sa počet rovníc aj počet neznámych zníži o jednu. Tak pokračujeme dovtedy, kým neostane jediná rovnica. Riešenia sústavy dostaneme spätným dosadzovaním riešení poslednej rovnice do predchádzajúcich rovníc.

Príklad. Riešme sústavu dvoch rovníc s dvoma neznámymi

$$\begin{aligned} 4x + y &= 40 \\ x - y &= 5. \end{aligned}$$

Riešenie. Z druhej rovnice vyjadríme neznámu $x = 5 + y$ a dosadíme do prvej rovnice

$$\begin{aligned} 4(5 + y) + y &= 40 \\ 20 + 4y + y &= 40 \\ 5y &= 20 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

Spätným dosadením riešenia $y = 4$ do druhej rovnice dostaneme $x = 9$.

Záver. Po vykonaní skúšky správnosti zisťujeme že usporiadaná dvojica $\bar{x} = [4, 9]$ je riešením uvedenej sústavy rovníc.

✓

3. Porovnávacia metóda

V riešení sústavy rovníc s dvoma neznámymi postupujeme tak, že z oboch rovníc vyjadríme tú istú neznámu a obe vyjadrenia dáme do rovnosti. Z takto získanej rovnice vypočítame hodnotu druhej neznámej. Z niektorej rovnice potom vypočítame hodnotu prevej neznámej.

Príklad. Riešme porovnávacou metódou sústavu dvoch rovníc

$$\begin{aligned} 7x - y &= 99 \\ 2x - y &= 24. \end{aligned}$$

Z prvej rovnice vyjadríme $y = 7x - 99$.
Z druhej rovnice vyjadríme $y = 2x - 24$.
Obe vyjadrenia dáme do rovnosti

$$\begin{aligned} 7x - 99 &= 2x - 24 \\ 5x &= 75 \\ x &= 15 \\ y &= 7.15 - 99 \\ y &= 6. \end{aligned}$$

Riešením uvedenej sústavy rovníc je usporiadaná dvojica čísel $\bar{x} = [15, 6]$.

4. Riešenie sústav lineárnych rovníc pomocou determinantov

Vyriešime sústavu troch rovníc s tromi neznámymi

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3. \end{aligned}$$

Determinant sústavy je

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Ak $D = 0$, sústavu nevieme vyriešiť pomocou determinantov a podobne ako pri dvoch rovniciach s dvoma neznámymi má sústava buď nekonečný počet riešení, alebo nemá žiadne riešenie.

Ak $D \neq 0$, sústava má práve jedno riešenie

$$x = \frac{D_x}{D} \qquad y = \frac{D_y}{D} \qquad z = \frac{D_z}{D},$$

kde

$$D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Pri výpočte determinantov použijeme **Sarussovo pravidlo**

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{32}a_{31}.$$

Pri sústave dvoch rovníc s dvoma neznámymi použijeme determinanty s dvomi riadkami a dvoma stĺpcami a riešime ju tak isto ako sústavu troch rovníc s troma neznámými.

Príklad. Riešme pomocou determinantov sústavu dvoch rovníc

$$\begin{aligned} x + 2y &= -3 \\ 2x - y &= -1. \end{aligned}$$

Určíme postupne

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1.(-1) - 2.2 = -5$$

$$D = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = (-3).(-1) - (-1).2 = 5$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1.(-1) - (-3).2 = 5.$$

Dostávame

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-5}{5} = -1, \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-5}{5} = -1.$$

Riešením sústavy je jediná usporiadaná dvojica $\bar{x} = [-1, -1]$.

Príklad. Určme, pre aké hodnoty parametra $m \in \boldsymbol{R}$ majú sústavy

a) $mx + 2y = 3$, $x + 4y = 4$ b) $mx + 2y = 1$, $2x + my = 10$ c) $x + y = m$, $x - 3y = 5$

práve jedno riešenie.

Riešenie. Sústavy rovníc a), b), c) riešime pomocou determinantov. Postupne určíme determinanty sústav a zistíme, pre aké $m \in \boldsymbol{R}$ sú tieto rôzne od nuly.

a) $D = \begin{vmatrix} m & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4m - 2.$

$$D \neq 0 \iff 4m - 2 \neq 0 \iff 4m \neq 2 \iff m \neq \frac{1}{2}.$$

Jediné riešenie sústavy a) **e**xistuje práve vtedy, ak $m \in \boldsymbol{R} \wedge m \neq \frac{1}{2}$.

b) $D = \begin{vmatrix} m & 2 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m^2 - 4.$

$$D \neq 0 \iff m^2 - 4 \neq 0 \iff m \neq 2 \wedge m \neq -2$$

Jediné riešenie sústavy b) **e**xistuje práve vtedy, ak $\boldsymbol{m \in R \wedge m \neq -2 \wedge m \neq 2}$.

c) $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -4$, $D \neq 0$ pre každé $\boldsymbol{m \in R}$.

Jediné riešenie sústavy c) existuje pre ľubovoľné $\boldsymbol{m \in R}$.

✓

5. Grafické riešenie sústav lineárnych rovníc

Nech má sústava lineárnych rovníc tvar

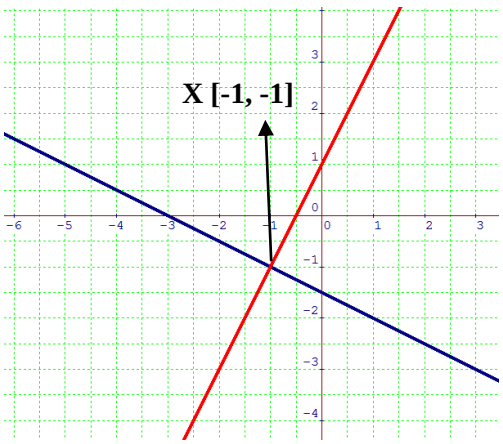
$$a_{11}x + a_{12}y = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y = b_2.$$

pričom $[a_{11}, a_{12}] \neq [0, 0]$, $[a_{21}, a_{22}] \neq [0, 0]$ (Inak by to nebola rovnica). Karteziánskym grafom oboru pravdivosti výrokovej formy $a_{11}x + a_{12}y = b_1$ je priamka v danej súradnicovej sústave. Druhej rovnici analogicky zodpovedá priamka s rovnicou $a_{21}x + a_{22}y = b_2$. Súradnice spoločných bodov oboch priamok tvoria riešenia danej sústavy. Pretože dve priamky v rovine môžu mať: práve jeden spoločný bod, žiadny spoločný bod alebo nekonečný počet spoločných bodov, má sústava práve jedno riešenie, žiadne riešenie alebo nekonečný počet riešení.

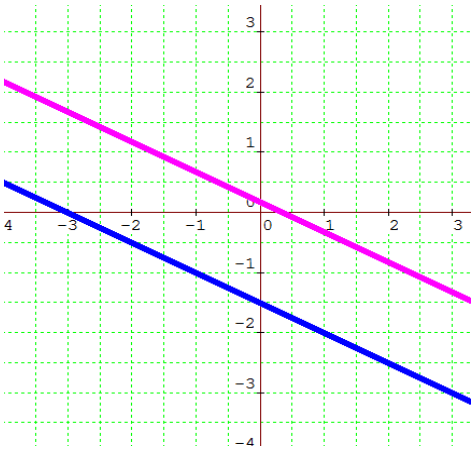
Príklad. Graficky riešme sústavy rovníc

a) $x + 2y = -3$, $2x - y = -1$ b) $x + 2y = -3$, $3x + 6y = 1$ c) $x + 2y = -3$, $3x + 6y = -9$.

a) Narysujeme postupne obe priamky (Obr. 5.1), ktoré zodpovedajú prvej a druhej rovnici sústavy. Priesečníkom priamok je bod $[-1, -1]$.
Sústava rovníc má práve jedno riešenie, kterým je usporiadaná dvojica čísel $\bar{x} = [-1, -1]$, teda platí $x = -1$ a $y = -1$.



Obr. 5.1

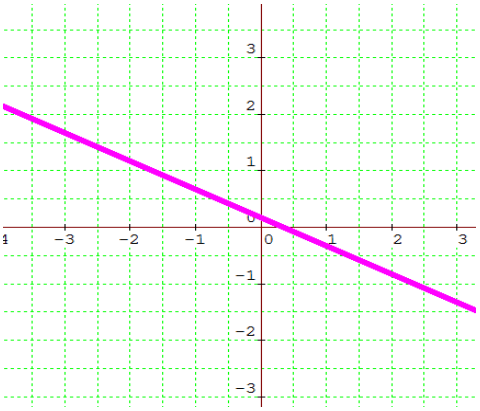


Obr. 5.2

b) Opäť narysujeme priamky zodpovedajúce prvej a druhej rovnici sústavy.
Dostávame dve rovnobežné priamky. Sústava rovníc nemá riešenie, neexistuje taká usporiadaná dvojica reálnych čísel *x*, *y*, ktorá spĺňa obe rovnice sústavy, (po úpravách dostávame nepravdivý výrok 0 = 10), čo koreluje s grafickou interpretáciou - neexistujú totiž žiadne spoločné body priamok (Obr. 5.2).

c) Ak riešime analyticky sústavu c) dostávame po úprave pravdivý výrok 0 = 0. Sústava má nekonečne veľa riešení (za *x*, *y* môžeme dosadiť akékoľvek čísla a dostaneme pravdivý výrok).

Ak narysujeme priamky zodpovedajúce rovniciam sústavy, registrujeme, že sú totožné (Obr. 5.3).



Obr. 5.3

6 Funkcie

6.1 Funkcie – základné pojmy

Funkcia *f*, definovaná na množine $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{R}$ je predpis, ktorý každému číslu z množiny $\boldsymbol{A}$ priradí práve jedno reálne číslo. Množina $\boldsymbol{A}$ sa nazýva **definičný obor funkcie,** označujeme $\boldsymbol{D}(f)$**.**

Obor hodnôt funkcie *f* je množina všetkých $y \in \boldsymbol{R}$**,** ku ktorým existuje aspoň jedno *x* z definičného oboru funkcie *f* také, že platí $y = f(x)$, označujeme ho $\boldsymbol{H}(f)$.

Zápis $y = f(x)$ vyjadruje funkčný predpis závislosti premennej *y* na premennej *x*.

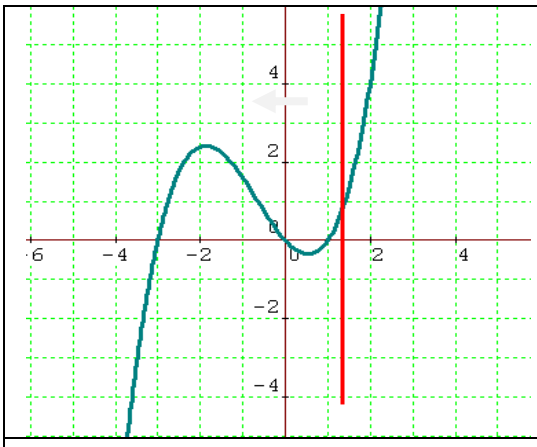
Premennú ***x*** nazývame **nezávislá premenná**, používame tiež označenie argument funkcie, nadobúda hodnoty z $\boldsymbol{D}(f)$**.** Premenná ***y*** je **závislá premenná,** $y \in \boldsymbol{H}(f)$.

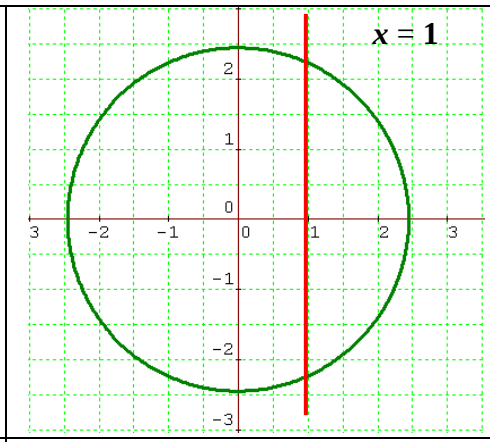
Hodnotu funkcie *f* v bode x_0 označíme $f(x_0)$ a nazývame **funkčnou hodnotu** funkcie *f* v bode x_0.

Graf funkcie *f* v zvolenej súradnicovej sústave O_{xy} je množina všetkých bodov X[x, $f(x)$], kde *x* patrí do definičného oboru funkcie *f* a *y* je hodnota funkcie *f* v čísle *x*.

V skutočnosti načrtneme len časť grafu funkcie na zvolenom intervale $I \subset \boldsymbol{D}(f)$**.**

Príklad.





Na obrázku vidíme graf funkcie. Ku každému *x* prislúcha práve jedno *y*. Každá priamka rovnobežná s osou *y* pretína graf funkcie **najviac v jednom bode.**	V tomto prípade uvedená krivka nie je grafom funkcie. Napríklad pre $x = 1$ existujú dve rôzne hodnoty *y*. Toto platí pre všetky $x \in (-3, 3)$. Každá priamka $x = x_0$, $x_0 \in (-3, 3)$ pretne graf v **dvoch rôznych bodoch**.

Obr. 6.1.1

6.2 Vlastnosti funkcií

6.2.1 Ohraničená a neohraničená funkcia

Funkcia *f* sa nazýva **ohraničená zhora** na množine ***M***, ak existuje také číslo $h \in \boldsymbol{R}$, že pre všetky $x \in \boldsymbol{M}$ platí $f(x) \leq h$.

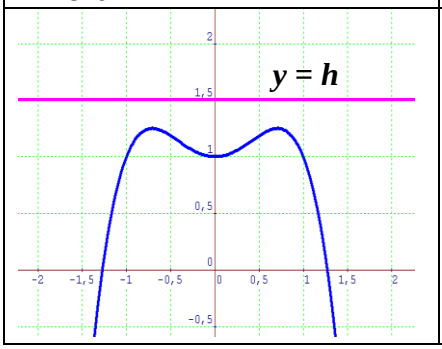
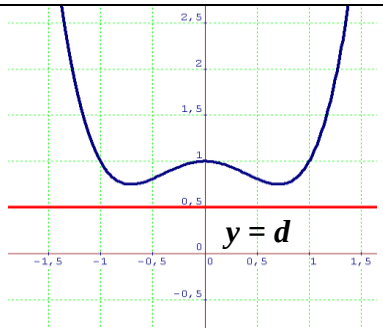
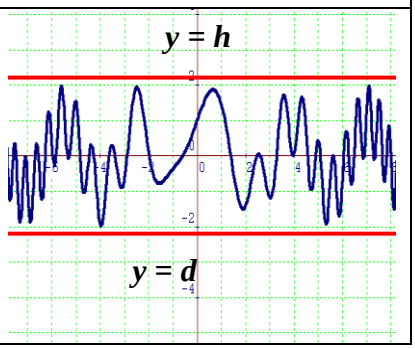
Funkcia *f* sa nazýva **ohraničená zdola** na množine ***M,*** ak existuje také číslo $d \in \boldsymbol{R}$, že pre všetky $x \in \boldsymbol{M}$ platí $f(x) \geq d$.

Funkcia *f* sa nazýva **ohraničená** na množine ***M,*** ak je ohraničená zdola a súčasne zhora.

Geometrický význam ohraničenosti funkcie

Ak je funkcia f na množine $\boldsymbol{M} \subseteq \boldsymbol{D}(f)$ ohraničená zhora, leží jej graf pre každé číslo $x \in \boldsymbol{M}$ stále pod priamkou $y = h$ alebo na nej.
Ak je funkcia f na množine $\boldsymbol{M} \subseteq \boldsymbol{D}(f)$ ohraničená zdola, leží jej graf pre každé číslo $x \in \boldsymbol{M}$ stále nad priamkou $y = d$ alebo na nej.
Ak je funkcia f na množine $\boldsymbol{M} \subseteq \boldsymbol{D}(f)$ ohraničená, leží jej graf pre každé číslo $x \in \boldsymbol{M}$ stále medzi priamkami $y = h$ a $y = d$ alebo na nich.

Príklad.

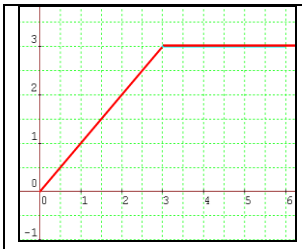
Funkcia f je **ohraničená zhora**	Funkcia f je **ohraničená zdola**	Funkcia f je **ohraničená**
		

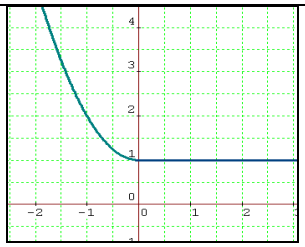
Obr. 5.2.1

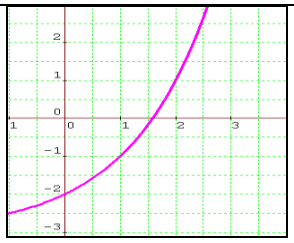
6.2.2 Monotónnosť funkcie

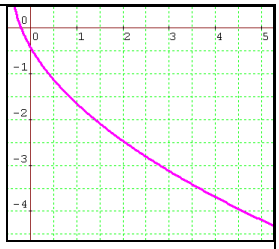
Nech je daná funkcia f a množina $\boldsymbol{M}$, ktorá je časťou jej definičného oboru ($\boldsymbol{M} \subseteq \boldsymbol{D}(f)$).
Funkcia f sa nazýva **rastúca na množine** $\boldsymbol{M}$ práve vtedy, ak pre všetky $x_1, x_2 \in \boldsymbol{M}$, také, že $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) < f(x_2)$.
Funkcia f sa nazýva **klesajúca na množine** $\boldsymbol{M}$ práve vtedy, ak pre všetky $x_1, x_2 \in \boldsymbol{M}$, také, že $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) > f(x_2)$.
Funkcia f sa nazýva **nerastúca na množine** $\boldsymbol{M}$ práve vtedy, ak pre všetky $x_1, x_2 \in \boldsymbol{M}$, také, že $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \geq f(x_2)$.
Funkcia f sa nazýva **neklesajúca na množine** $\boldsymbol{M}$ práve vtedy, ak pre všetky $x_1, x_2 \in \boldsymbol{M}$, také, že $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \leq f(x_2)$.
Takéto funkcie na množine $\boldsymbol{M}$ sa súhrnne nazývajú **monotónne na** $\boldsymbol{M} \subseteq D(f)$.
Funkcie, ktoré sú len rastúce alebo len klesajúce na množine $\boldsymbol{M} \subseteq D(f)$ sa nazývajú **rýdzo monotónne na** $\boldsymbol{M} \subseteq D(f)$.

Príklad.


Neklesajúca funkcia


Nerastúca funkcia


Rastúca funkcia

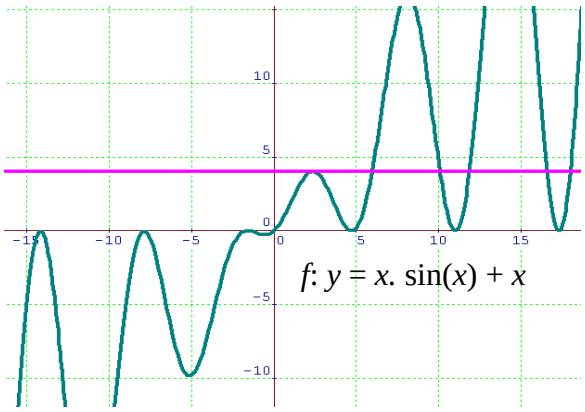

Klesajúca funkcia

Obr. 6.2.2

6.2.3 Prostá funkcia

Funkcia f sa nazýva **prostá na množine** $\boldsymbol{M} \subseteq \boldsymbol{D}(f)$ práve vtedy, ak pre všetky $x_1, x_2 \in \boldsymbol{M}$ také, že $x_1 \neq x_2$ je $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Príklad.



Obr. 6.2.3

Funkcia f na obrázku 6.2.3 nie je prostá. Z grafu funkcie vidieť, že existujú rôzne $x_1, x_2 \in D(f)$, $x_1 \neq x_2$, v ktorých sú funkčné hodnoty funkcie f rovnaké.
Ak je funkcia f na množine $\boldsymbol{M} \subseteq D(f)$ rýdzo monotónna, tak potom je na množine $\boldsymbol{M} \subseteq D(f)$ prostá.

6.2.4 Rovnosť funkcií

Hovoríme, že funkcia f sa rovná funkcii g, ak:

1. $D(f) = D(g)$.
2. Pre každé $x \in D(f)$ platí $f(x) = g(x)$.

6.2.5 Párna a nepárna funkcia

Funkcia f sa nazýva **párnou** práve vtedy, ak platí:

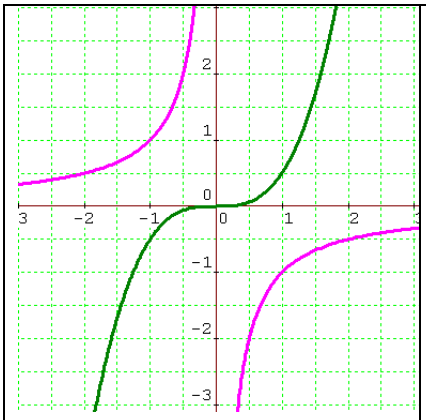
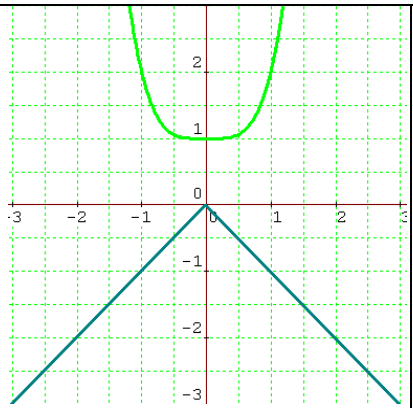
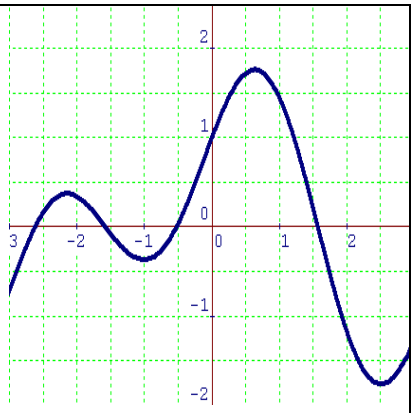
1. pre všetky $x \in D(f)$ je tiež $-x \in D(f)$,
2. pre všetky $x \in D(f)$ je $f(-x) = f(x)$.

Graf párnej funkcie je osovo súmerný podľa **osi** $\boldsymbol{y}$.
Funkcia f sa nazýva **nepárnou** práve vtedy, ak platí:

1. pre všetky $x \in D(f)$ je tiež $-x \in D(f)$,
2. pre všetky $x \in D(f)$ je $f(-x) = -f(x)$.

Graf nepárnej funkcie je stredovo súmerný podľa začiatku súradnicovej sústavy $\boldsymbol{O_{xy}}$.
Ak nie je splnená žiadna z uvedených podmienok, potom funkcia nie je ani párna ani nepárna.

Príklad.

		
Grafy **nepárnych funkcií**	Grafy **párnych funkcií**	Graf funkcie, ktorá nie je ani **párna ani nepárna**

Obr. 6.2.4

6.2.6 Periodická funkcia

Funkcia f sa nazýva **periodická** práve vtedy, ak existuje také číslo $p > 0$, že pre každé $x \in D(f)$, platí:

1. $(x + p) \in D(f)$, aj $(x - p) \in D(f)$.
2. $f(x + p) = f(x)$.

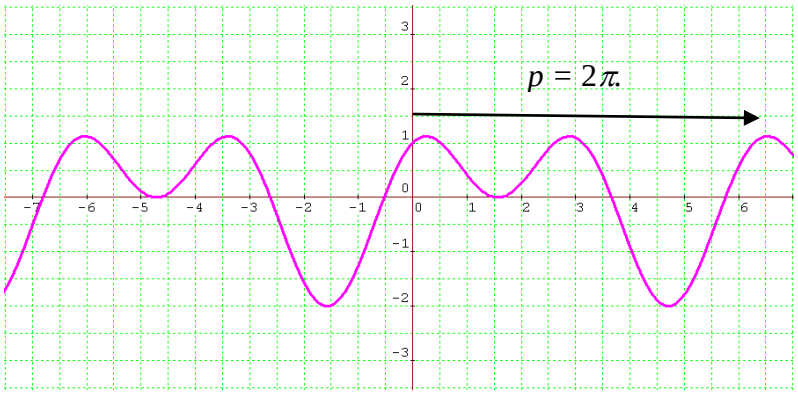
Číslo ***p*** sa nazýva **perióda funkcie *f*.**

Ak má funkcia f periódu p, má podľa definície aj periódu $2p$, $3p$, atď., teda všetky prirodzené násobky čísla p sú tiež periódou funkcie f. Najmenšiu periódu $p > 0$ funkcie f, nazývame aj **základnou periódou funkcie *f*.**

Graf periodickej funkcie sa pravidelne (periodicky) opakuje po intervaloch, ktorých dĺžka sa rovná základnej perióde p.

Najvýznamnejšie periodické funkcie sú funkcie goniometrické.

Príklad. Funkcia $y = \sin(x) + \cos(2x)$ je periodická so základnou periódou $p = 2\pi$.



Obr. 5.2.5

6.2.7 Inverzná funkcia

Nech je f prostá funkcia na $D(f)$ a nech $H(f)$ je obor funkčných hodnôt funkcie f. Potom existuje inverzná funkcia f^{-1} definovaná vzťahom:

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y),$$

ktorá každému $y \in H(f)$ priradí práve to $x \in D(f)$, pre ktoré je $f(x) = y$.
Platí $D(f^{-1}) = H(f)$ a $H(f^{-1}) = D(f)$, $y = f\left[f^{-1}(y)\right]$, $x = f^{-1}\left[f(x)\right]$. Grafy funkcií f a f^{-1} sú osovo súmerné podľa priamky $y = x$.
Inverzná funkcia existuje iba k prostej funkcii a tiež je prostou funkciou.
Funkcie f a f^{-1} sú navzájom inverzné, teda platí $(f^{-1})^{-1} = f$.
Tiež platí, že inverzná funkcia k rastúcej funkcii je rastúcou funkciou a inverzná funkcia ku klesajúcej funkcii je klesajúcou funkciou.
Ak chceme k danej funkcii utvoriť inverznú funkciu stačí v predpise funkcie $y = f(x)$ vymeniť medzi sebou premenné x, y a potom vyjadriť y.

Príklad. Nech je daná funkcia $f: y = \sqrt{x} + 2$, $D(f) = \langle 0, \infty)$, $H(f) = \langle 2, \infty)$. Funkcia f je prostá na celom $D(f)$, a teda k nej existuje inverzná funkcia f^{-1}. Inverznú funkciu utvoríme nasledujúcim spôsobom. – mmm

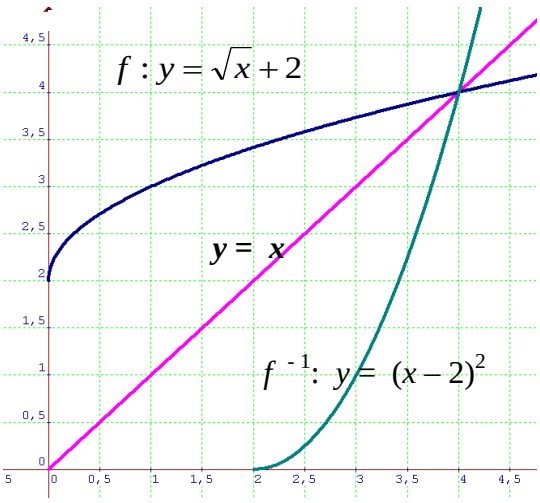
V predpise funkcie $f: y = \sqrt{x} + 2$ vymeníme premenné: $x = \sqrt{y} + 2$ a následne vyjadríme premennú $\boldsymbol{y}$.

$$x = \sqrt{y} + 2, \quad y \geq 0$$

$$x - 2 = \sqrt{y}$$

$$(x-2)^2 = y$$

Dostali sme predpis funkcie $f^{-1}: y = (x-2)^2$, $D(f^{-1}) = \langle 2, \infty)$, $H(f^{-1}) = \langle 0, \infty)$.
Na obrázku 5.2.6 vidíme grafy funkcií $f: y = \sqrt{x} + 2$ a $f^{-1}: y = (x-2)^2$ sú osovo súmerné podľa priamky $\boldsymbol{y = x}$.

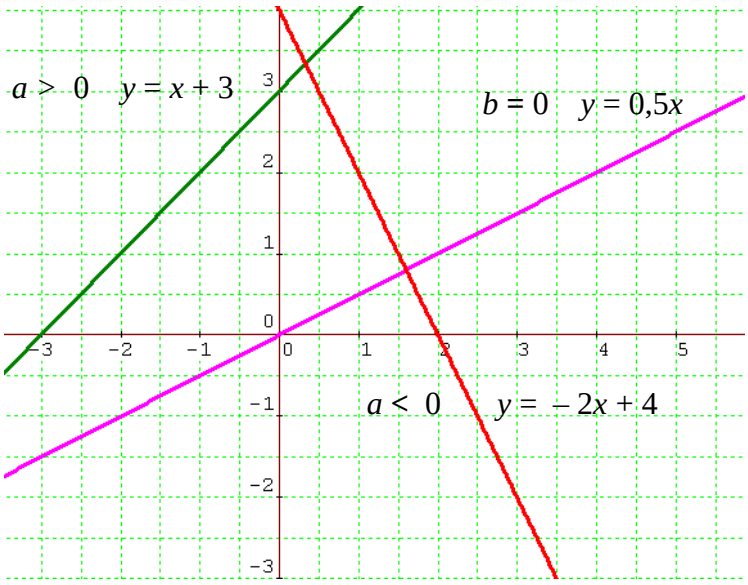


Obr. 6.2.6

6.3 Lineárna funkcia

Lineárnou funkciou sa nazýva každá funkcia definovaná na množine ***R***, ktorá je daná predpisom $y = ax + b$, $a, b \in \boldsymbol{R}$, $a \neq 0$. Definičným oborom a oborom hodnôt lineárnej funkcie je množina ***R***.
Grafom lineárnej funkcie je **priamka** rôznobežná s osou *y*.

Príklad. Na obrázku 6.3.1 sú grafy lineárnych funkcií pre rôzne hodnoty koeficientu *a*.



Obr. 6.3.1

Pre $\boldsymbol{a} > 0$, $b \in \boldsymbol{R}$ je lineárna funkcia rastúca na ***R***, prostá a neohraničená.
Pre $\boldsymbol{a} < 0$, $b \in \boldsymbol{R}$ je lineárna funkcia klesajúca na ***R***, prostá a neohraničená.

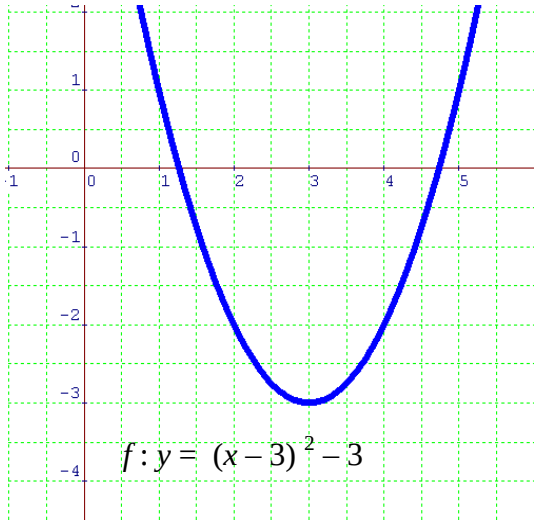
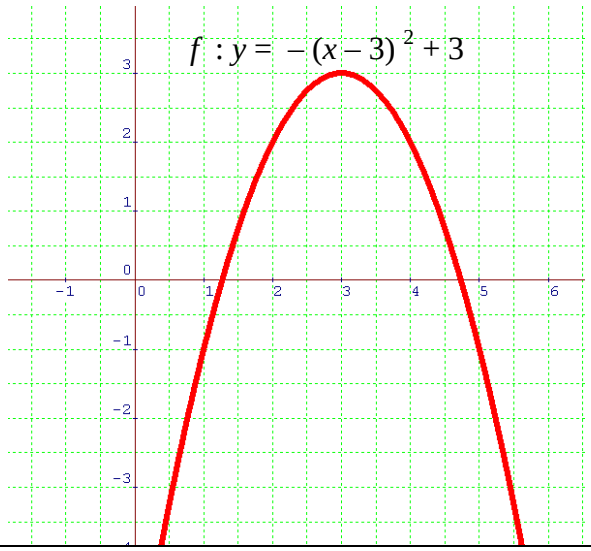
Lineárnu funkciu $y = ax$, t.j. funkciu, v ktorej $\boldsymbol{b} = 0$, nazývame **priama úmernosť** – graf priamej úmernosti prechádza začiatkom súradnicovej sústavy.

6.4 Kvadratická funkcia

Kvadratickou funkciou nazývame každú funkciu definovanú na množine ***R***, ktorá je daná predpisom $y = ax^2 + bx + c$, kde $a, b, c \in \boldsymbol{R}$, $a \neq 0$.
Výrazy $\boldsymbol{ax^2}$, $\boldsymbol{bx}$, $\boldsymbol{c}$ sa nazývajú **kvadratický člen, lineárny člen, absolútny člen.**
Definičným oborom kvadratickej funkcie je množina ***R***.

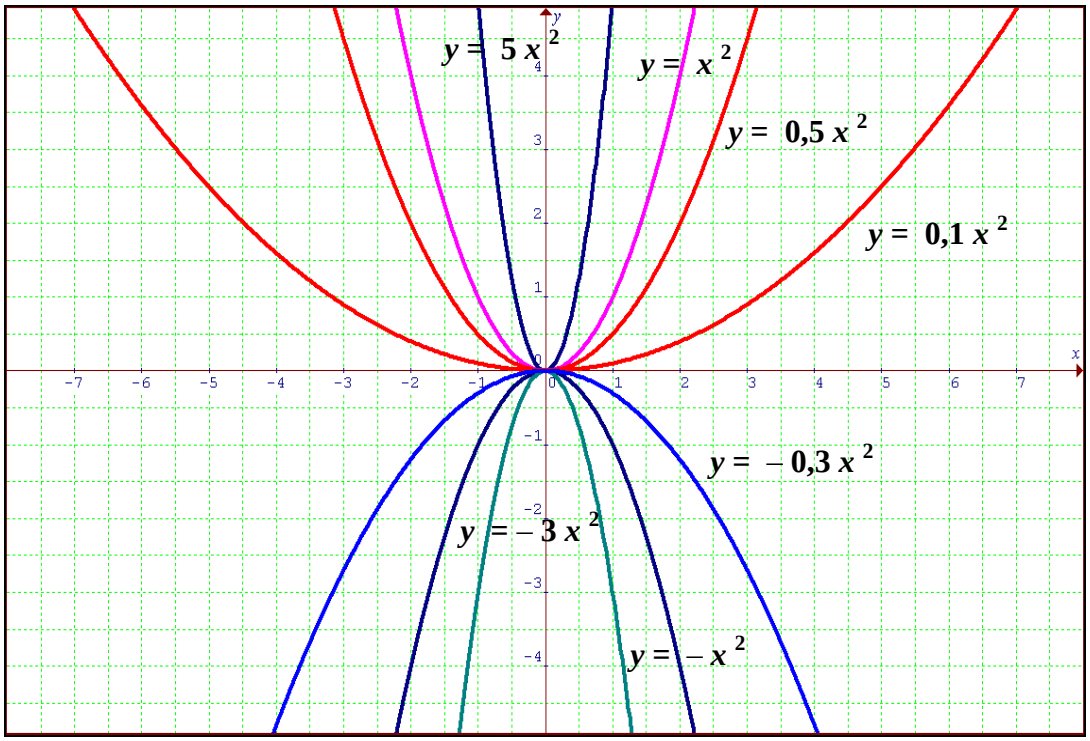
Grafom kvadratickej funkcie $y = ax^2 + bx + c$, $x \in \boldsymbol{R}$, $a \neq 0$, je **parabola**, ktorej vrcholom je bod $\left[\frac{-b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right]$ a osou priamka $x = \frac{-b}{2a}$.

Vlastnosti kvadratických funkcií v závislosti na hodnote koeficientu ***a*** ($a < 0$ alebo $a > 0$) sú na Obr. 6.4.1

	Pre $\boldsymbol{a} > 0$ ✓ $D(f) = \boldsymbol{R}$, ➢ $H(f) = \left\langle c - \frac{b^2}{4a}; \infty \right)$, ➢ funkcia je rastúca na intervale $\left\langle -\frac{b}{2a}; \infty \right)$, ➢ funkcia je klesajúca na intervale $\left(-\infty; -\frac{b}{2a} \right\rangle$, ➢ funkcia je zdola ohraničená, ➢ funkcia nie je prostá, ➢ funkcia nie je periodická.
	Pre $a < 0$ ➢ $D(f) = \boldsymbol{R}$, ➢ $H(f) = \left(-\infty; c - \frac{b^2}{4a} \right\rangle$, ➢ funkcia je rastúca na intervale $\left(-\infty; -\frac{b}{2a} \right\rangle$, ➢ funkcia je klesajúca na intervale $\left\langle -\frac{b}{2a}; \infty \right)$, ➢ funkcia je zhora ohraničená, ➢ funkcia nie je prostá, ➢ funkcia nie je periodická.

Obr. 6.4.1

Príklad. Na Obr. 6.4.2 sú grafy kvadratických funkcií pre rôzne hodnoty koeficientu ***a.***



Obr. 6.4.2

Ak potrebujeme v súradnicovej sústave načrtnúť graf funkcie $y = ax^2 + bx + c$, $x \in \boldsymbol{R}$, $a \neq 0$, je výhodné určiť najskôr vrchol paraboly, ktorá je jej grafom. Označme ho $V[x_v, y_v]$. Môžeme to urobiť napríklad týmto spôsobom:

Najskôr upravíme predpis funkcie na druhú mocninu dvojčlena, t.j. zapíšeme ho v tvare
$y = ax^2 + bx + c = a(x - x_v)^2 + y_v$.
Všeobecný postup pri úprave na druhú mocninu dvojčlena je

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c\right) =$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + a\left(-\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-D}{4a}.$$

Odkiaľ dostávame

$$x_v = -\frac{b}{2a}; \qquad y_v = \frac{-D}{4a}.$$

V špeciálnom prípade môžeme tiež postupovať takto:
Ak je diskriminant $D = b^2 - 4ac$ kladný, potom kvadratická funkcia $y = ax^2 + bx + c$, $x \in \boldsymbol{R}$, $a \neq 0$, má dva rôzne nulové body x_1 a x_2 (x – ové súradnice priesečníkov grafu funkcie s osou x). Pre súradnice vrcholu V paraboly, ktorá je grafom danej kvadratickej funkcie $y = ax^2 + bx + c$, potom platí
x – ová súradnica x_v vrcholu paraboly $V[x_v, y_v]$ je aritmetickým priemerom hodnôt x_1, x_2 a y – ovú súradnicu y_v následne vypočítame ako hodnotu funkcie f v čísle x_v.

Ak uvážime, že $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, potom

$$x_v = \frac{x_1+x_2}{2} = -\frac{b}{2a}, \qquad y_v = f(x_v) = \frac{-D}{4a}, \qquad V = \left[-\frac{b}{2a}; \frac{-D}{4a}\right].$$

Príklad. Určme súradnice vrcholu paraboly, ktorá je grafom funkcie $f: y = x^2 - x - 2$.

a) Úpravou na druhú mocninu dvojčlena dostaneme

$$x^2 - x - 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}.$$

Dostávame $x_v = \dfrac{1}{2}$, $y_v = -\dfrac{9}{4}$, $V = \left[\dfrac{1}{2}; -\dfrac{9}{4}\right]$.

b) Pomocou nulových bodov funkcie dostaneme

$a = 1$, $b = -1$, $c = -2$, $D = 9$, $x_1 = -1$, $x_2 = 2$,

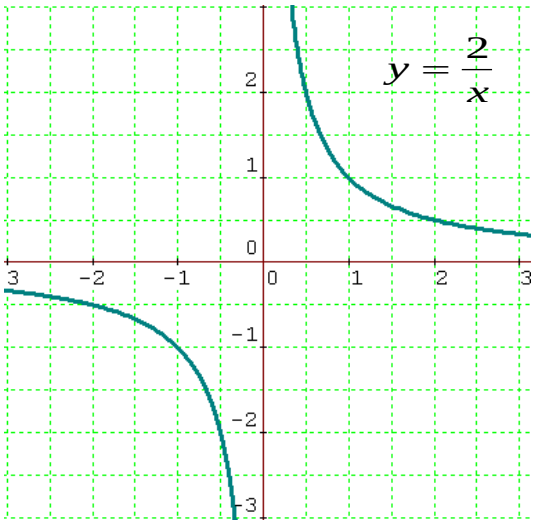
$$x_v = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{1}{2}, \qquad y_v = \frac{-D}{4a} = -\frac{9}{4}, \qquad V = \left[\frac{1}{2}; -\frac{9}{4}\right].$$

6.5 *Lineárna lomená funkcia*

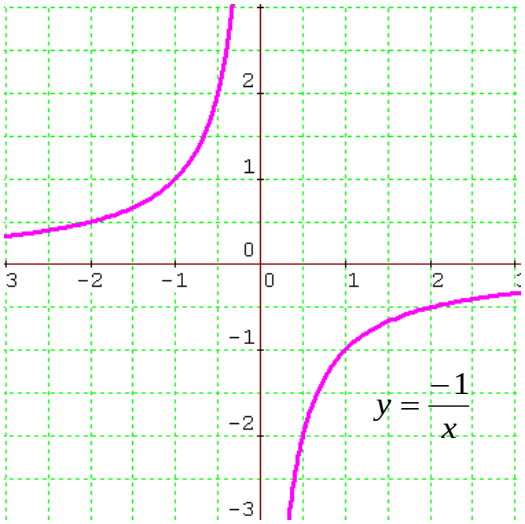
6.5.1 Nepriama úmernosť

Nepriama úmernosť sa nazýva každá funkcia definovaná na množine $\boldsymbol{R} - \{0\}$ predpisom $y = \dfrac{k}{x}$, kde $k \in \boldsymbol{R} - \{0\}$.

Grafom nepriamej úmernosti je **rovnoosá hyperbola** so stredom S[0, 0].
Súradnicové osi sú jej asymptoty (hyperbola sa k týmto priamkam približuje, ale nepretne ich, ani sa ich nedotkne).
Graf nepriamej úmernosti je súmerný podľa začiatku súradnicového systému.



Obr. 6.5.1



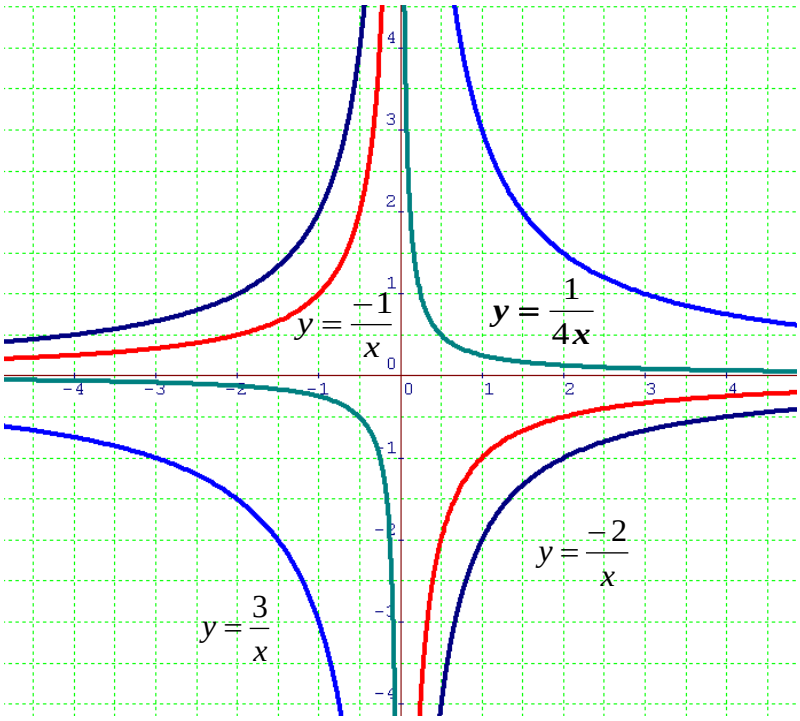
Obr. 6.5.2

Nepriama úmernosť je nepárna funkcia.

Funkcia $y = \frac{k}{x}$, $k \in R$, $k \neq 0$, je prostá na celom definičnom obore $D(f) = (-\infty,\ 0) \cup (0, \infty)$, $H(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, a teda k nej existuje inverzná funkcia. Táto má predpis

$$f^{-1} : y = \frac{k}{x}, \quad D(f^{-1}) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty).$$

Príklad. Obrázok 6.5.3 znázorňuje, ako sa mení priebeh funkcie $y = \frac{k}{x}$ v závislosti na konštante k. Zvolíme pre k postupne hodnoty –1, –2, 3, $\frac{1}{4}$ a zodpovedajúce grafy zakreslíme do jedného súradnicového systému.



Obr. 6.5.3

Ak je $k > 0$, potom je funkcia na intervale $(-\infty, 0)$ klesajúca a tiež je klesajúca na intervale $(0, \infty)$. Vetvy hyperboly sa nachádzajú v I. a III. kvadrante.
Ak je $k < 0$, potom je funkcia na intervale $(-\infty, 0)$ rastúca a tiež je rastúca na intervale $(0, \infty)$. Vetvy hyperboly sa nachádzajú v II. a IV. kvadrante.

6.5.2 Lineárna lomená funkcia

Lineárnou lomenou funkciou nazývame každú funkciu definovanú na množine $R - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ predpisom $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, kde $a, b, c, d \in \mathbf{R}$; $c \neq 0$ a $ad - bc \neq 0$.

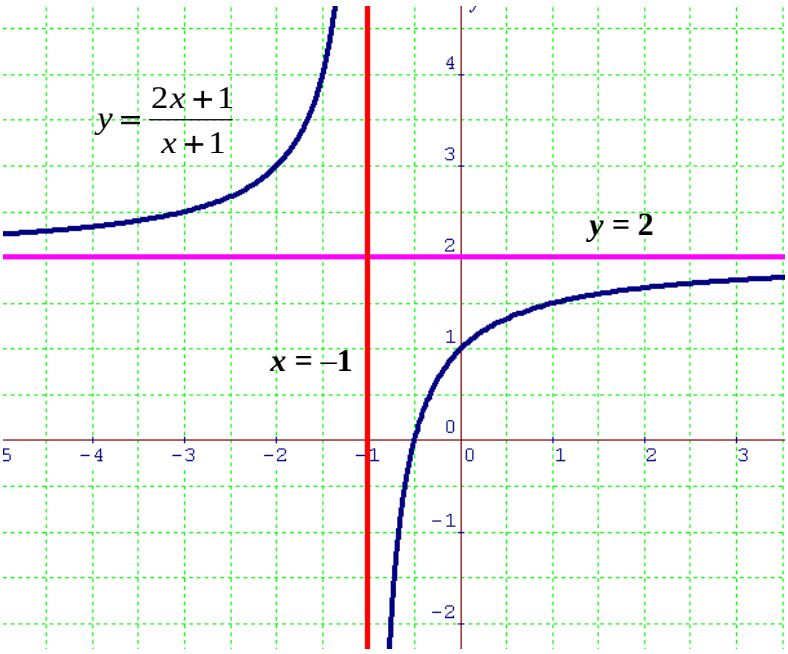
Grafom lineárnej lomenej funkcie je rovnoosá hyperbola, ktorú získame z grafu funkcie $y = \frac{k}{x}$ pomocou posunutia tak, že najprv funkčný predpis lineárnej lomenej funkcie ***f*** upravíme na tvar $f : y = \frac{k}{x - x_0} + y_0$. Asymptoty grafu tejto funkcie prechádzajú bodom S[x_0, y_0] rovnobežne so súradnicovými osami.

Príklad. Zostrojme graf funkcie $f : y = \frac{2x+1}{x+1}$.

Riešenie. Definičným oborom funkcie je ***D***(*f*) = (– ∞, – 1) ∪ (– 1, ∞). Funkciu upravíme na tvar

$$y = \frac{2x+1}{x+1} = \frac{2x+2-1}{x+1} = \frac{2(x+1)-1}{x+1} = 2 - \frac{1}{x+1}.$$

Dostaneme predpis $y = \frac{-1}{x+1} + 2$. Stredom hyperboly je bod S[–1, 2], $k = -1$ a rovnice asymptot sú: $x = -1$, $y = 2$.



Obr. 6.5.4

✓

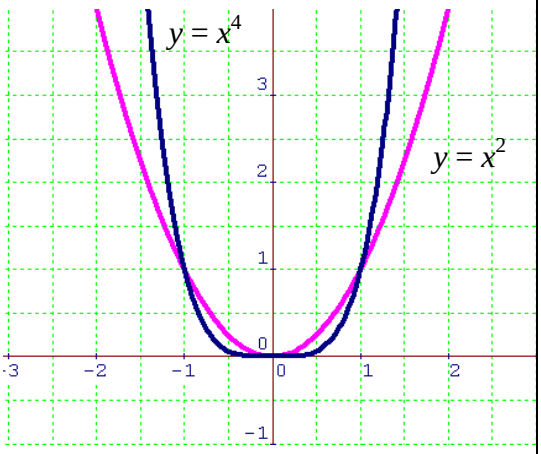
6.6 Mocninové funkcie

Mocninová funkcia je typ elementárnej funkcie jednej premennej tvaru $f : y = x^{\alpha}$, kde $\alpha \in \boldsymbol{R}$ je dané číslo. Najznámejším príkladom mocninovej funkcie je špeciálny prípad $\alpha = 1$, lineárnej funkcie $y = x$ a $\alpha = 2$, kvadratickej funkcie $y = x^2$. Podľa stupňa mocniny

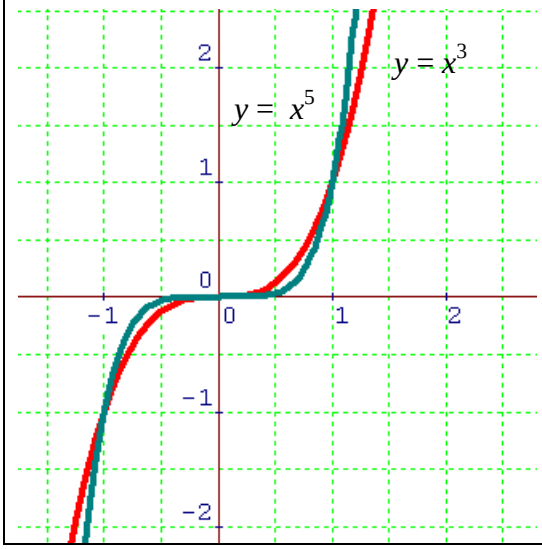
premennej sa rozlišujú mocninové funkcie rôznych druhov. Rozlíšime niektoré prípady mocninových funkcií a popíšeme ich vlastnosti.

6.6.1 Mocninová funkcia s prirodzeným exponentom

Funkciu $y = x^n$, kde n je prirodzené číslo, definovanú na množine $(-\infty, \infty)$, nazývame mocninovou funkciou s prirodzeným exponentom.
Vlastnosti mocninovej funkcie s prirodzeným exponentom prezentuje Tab. 6.6.1 a Tab. 6.6.2.

Ak je *n* párne číslo  	➢ definičný obor $D(f) = \boldsymbol{R}$, ➢ obor hodnôt $H(f) = \langle 0, \infty)$, ➢ funkcia je klesajúca na intervale $(-\infty, 0\rangle$, ➢ funkcia je rastúca na intervale $\langle 0, \infty)$, ➢ funkcia je párna, ➢ funkcia nie je prostá, ➢ funkcia je zdola ohraničená, ➢ graf funkcie prechádza bodmi [0, 0] a [1, 1], ➢ Napríklad: $y = x^4$, $y = x^2$.

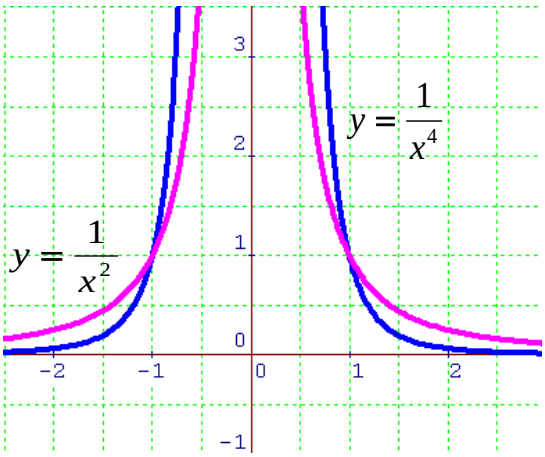
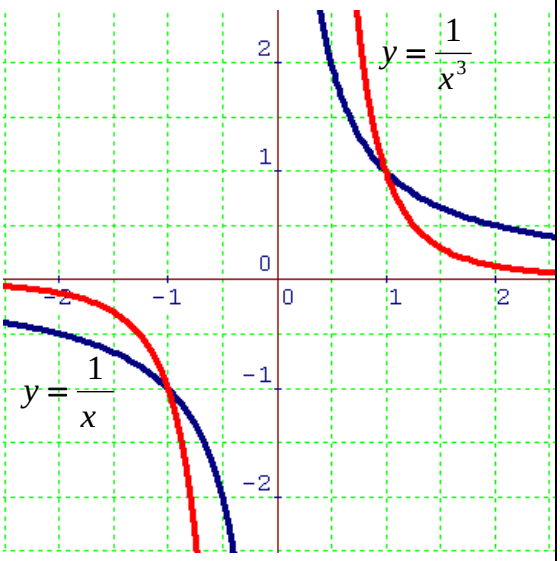
Tab. 6.6.1

Ak je *n* nepárne číslo  	➢ definičný obor $D(f) = \boldsymbol{R}$, ➢ obor hodnôt $H(f) = \boldsymbol{R}$, ➢ graf funkcie prechádza bodmi [0,0] a [1,1], [–1, –1], ➢ funkcia je rastúca na množine $\boldsymbol{R}$, ➢ funkcia je nepárna, ➢ funkcia je prostá na množine $\boldsymbol{R}$, ➢ funkcia nie je ohraničená, ➢ Napríklad: $y = x^3$, $y = x^5$.

Tab. 6.6.2

6.6.2 Mocninová funkcia s celým záporným exponentom

Funkciu $y = x^n$, kde n je celé záporné číslo, definovanú na množine $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, nazývame mocninovou funkciou s celým záporným exponentom.
Vlastnosti mocninovej funkcie s celým záporným exponentom prezentuje Tab. 6.6.3.

Ak je *n* párne číslo  	➢ definičný obor $D(f) = \boldsymbol{R} - \{0\}$, ➢ obor hodnôt $H(f) = (0, \infty)$, ➢ funkcia je klesajúca na intervale $(0, \infty)$, ➢ funkcia je rastúca na intervale $(-\infty, 0)$, ➢ funkcia je párna, ➢ funkcia nie je prostá na $D(f)$, ➢ funkcia je zdola ohraničená, ➢ graf funkcie prechádza bodom [1, 1], ➢ Napríklad: $y = x^{-4} = \frac{1}{x^4}$.
Ak je *n* nepárne číslo  	➢ definičný obor $D(f) = \boldsymbol{R} - \{0\}$, ➢ obor hodnôt $H(f) = \boldsymbol{R} - \{0\}$, ➢ funkcia je klesajúca na intervale $(-\infty, 0)$, ako aj na intervale $(0, \infty)$, ➢ funkcia je nepárna, ➢ funkcia je prostá, ➢ funkcia nie je ohraničená, ➢ graf funkcie prechádza bodmi [1, 1], [–1, –1], ➢ Napríklad: $y = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$.

Tab. 6.6.3

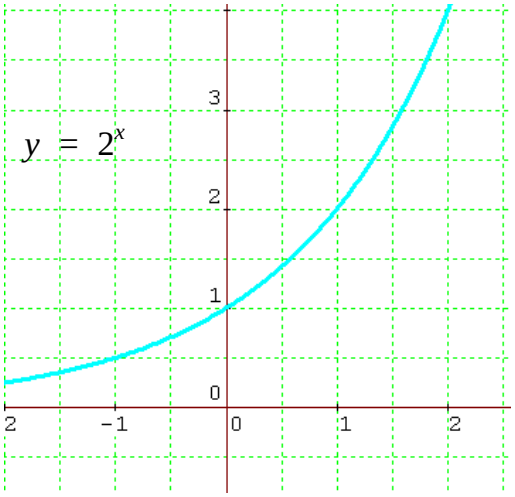
6.7 Exponenciálna funkcia

Exponenciálna funkcia so základom $\boldsymbol{a}$ sa nazýva každá funkcia definovaná na množine $\boldsymbol{R}$ predpisom

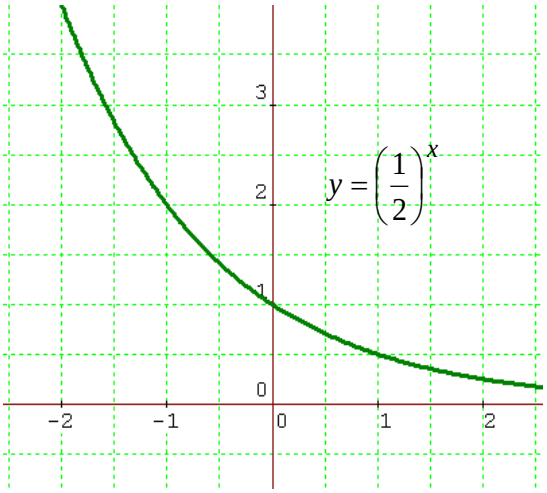
$$y = \boldsymbol{a}^x, \text{ kde } a > 0,\ a \neq 1,\ a \in \boldsymbol{R}.$$

Ak je základom exponenciálnej funkcie **Eulerovo číslo** $\boldsymbol{e}$ = 2,718281828..., hovoríme o **prirodzenej exponenciálnej funkcii**, $\boldsymbol{y = e^x}$.

Exponenciálna funkcia so základom $a = e$ je veľmi dôležitou funkciou matematickej analýzy.
Grafom exponenciálnej funkcie je **exponenciálna krivka** (exponenciála).
Graf každej exponenciálnej funkcie so základom a, $a > 0$, $a \neq 1$, $a \in \boldsymbol{R}$, prechádza bodom [0, 1], pretože platí: $a^0 = 1$, a *os x* je asymptotou grafu.
Vlastnosti exponenciálnej funkcie



Obr. 6.7.1



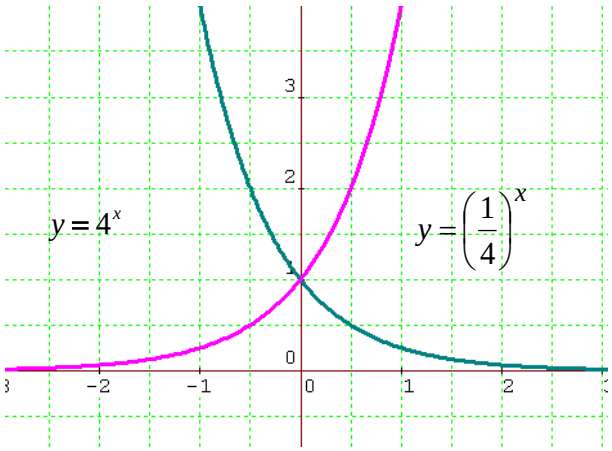
Obr. 6.7.2

$y = a^x, \quad a > 1$ $\qquad$ $y = a^x, \quad 0 < a < 1$

Definičný obor $\boldsymbol{D}(f) = \boldsymbol{R}$.
Obor hodnôt $\boldsymbol{H}(f) = \boldsymbol{(0, \infty)}$.
Funkcia nie je zhora ohraničená.
Funkcia je zdola ohraničená.
Funkčná hodnota v bode 0 sa rovná 1.
Funkcia je prostá.

Funkcia je rastúca pre $a > 1$. $\qquad$ Funkcia je klesajúca pre $0 < a < 1$.

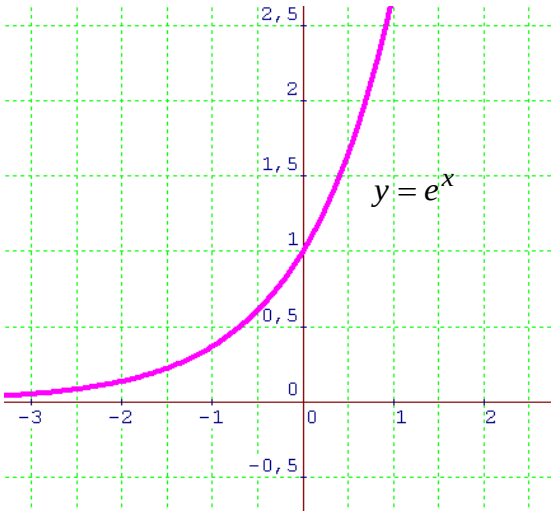
Exponenciálne krivky $y = a^x, y = \dfrac{1}{a^x}$ pre zhodné $\boldsymbol{a}$ sú súmerne združené podľa osi y (Obr.6.7.3).



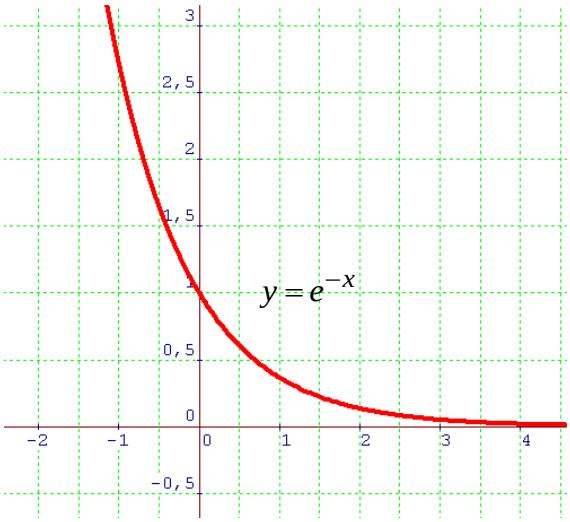
Obr. 6.7.3

Príklad. Načrtnime grafy exponenciálnych funkcií: $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $y = 3e^x$, $y = e^{-x} - 1$.

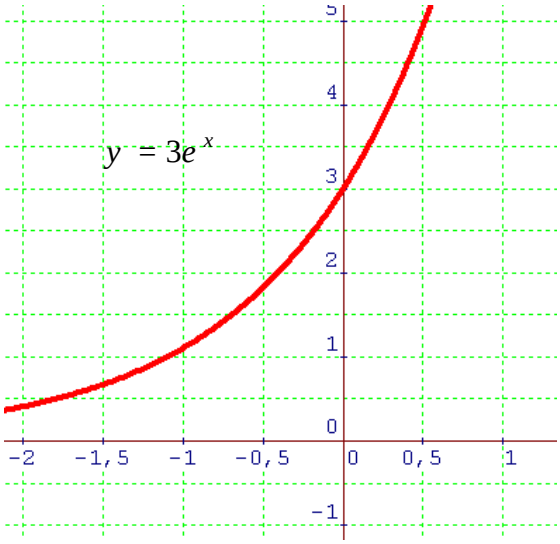
Riešenie. Definičným oborom všetkých funkcií je množina ***R.***



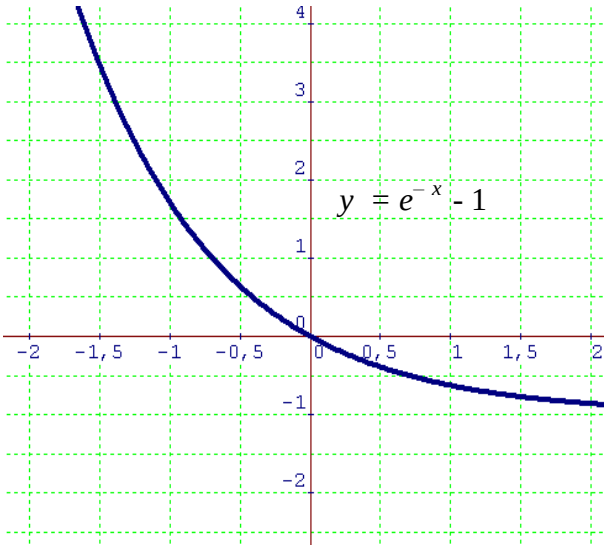
Obr. 6.7.4



Obr. 6.7.5



Obr. 6.7.6



Obr. 6.7.7

✓

6.8 Logaritmická funkcia

Exponenciálna funkcia $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in$ ***R,*** je prostá funkcia, existuje k nej preto inverzná funkcia. Je to **logaritmická funkcia** so základom ***a,*** $a > 0$, $a \neq 1$. Logaritmická funkcia teda každému $x \in (0, \infty)$ priradí to číslo $y \in (-\infty, \infty)$, pre ktoré platí $a^y = x$. Hodnota logaritmickej funkcie v čísle x sa nazýva logaritmus čísla x pri základe a, $y = \log_a x$.

Najčastejšie používané logaritmické funkcie sú:
so základom $a = 10$, vtedy sa logaritmus nazýva **dekadický** a označuje sa $y = \log x$,
so základom $a = e$, v tomto prípade sa logaritmus nazýva **prirodzený** a označuje sa $y = \ln x$.
Grafom logaritmickej funkcie je **logaritmická krivka.**

Príklad.

$\log_{\frac{1}{3}} 27 = -3$ pretože $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 27,$

$\log_3 1 = 0$ pretože $3^0 = 1,$

$\log_2 \frac{1}{32} = -5$ pretože $2^{-5} = \frac{1}{32}.$

Pravidlá pre počítanie s logaritmami:

Pre $x > 0,\ y > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$

$$\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y,$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y,$$

$$\log_a x^n = n.\log_a x, \qquad n \in N,$$

$$\log_a a = 1, \qquad \log 10 = 1, \qquad \ln e = 1,$$

$$\log_a 1 = 0, \qquad \log 1 = 0, \qquad \ln 1 = 0,$$

$$\text{špeciálne } \log_a \sqrt[n]{x^m} = \frac{m}{n}\log_a x; n \in R.$$

Ďalšie vzťahy:

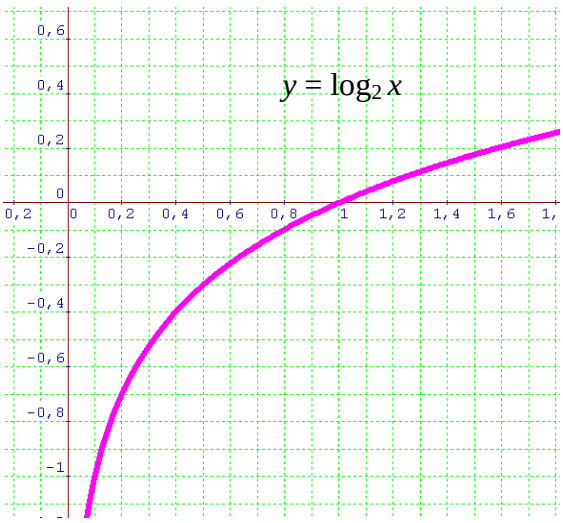
$x = a^{\log_a x}, x > 0$ napríklad: $5 = 3^{\log_3 5} = 2^{\log_2 5}$

$x = e^{\ln x}, x > 0$

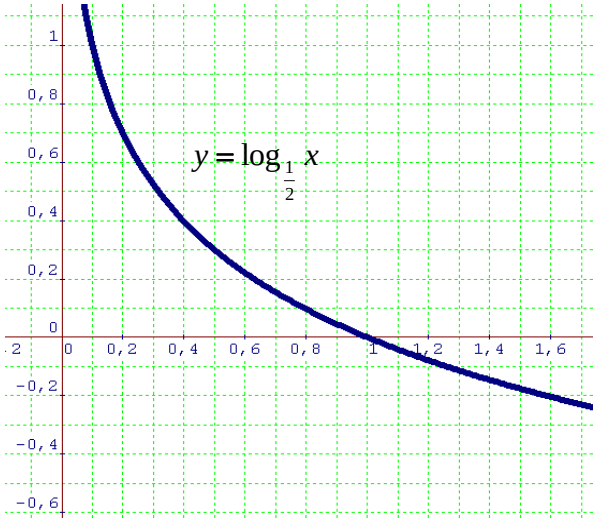
$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$ napríklad: $\log_3 5 = \frac{1}{\log_5 3}$ $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$

$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1, x > 0.$

Vlastnosti logaritmickej funkcie



Obr. 6.8.1



Obr. 6.8.2

$y = \log_a x, \quad a > 1$ $\qquad$ $y = \log_a x, \quad 0 < a < 1$

Definičný obor funkcie ***D***(*f*) = (0, ∞).

Obor hodnôt ***H*** (*f*) = ***R.***

Funkcia je neohraničená.

Funkčná hodnota v bode 1 sa rovná 0.

Funkcia je prostá.

Pre $a > 1$ je funkcia rastúca. $\qquad$ Pre $0 < a < 1$ je funkcia klesajúca.

6.9 Exponenciálne rovnice

1. Základným typom exponenciálnej rovnice je rovnica v tvare

$$a^x = b, \quad \text{kde } a > 0 \ \wedge \ a \neq 1.$$

Pre $b > 0$ má jedno riešenie: $x = \log_a b$, resp.

$$x = \frac{\log b}{\log a}.$$

Pre $b \leq 0$ rovnica nemá riešenie.

Príklad. Riešme rovnicu $4^x + 3^{x+3} = 4^{x+3} - 3^{x+2}$.

Riešenie. Definičným oborom rovnice je celá množina ***R.*** Rovnicu upravíme na základný tvar. Využívame pritom poznatky o počítaní s mocninami, prípadne substitúciu $y = a^x$.

$$4^x + 3^{x+3} = 4^{x+3} - 3^{x+2}$$
$$3^{x+3} + 3^{x+2} = 4^{x+3} - 4^x$$
$$3^x.3^3 + 3^x.3^2 = 4^x.4^3 - 4^x$$
$$3^x(27+9) = 4^x(64-1)$$
$$\frac{3^x}{4^x} = \frac{63}{36}$$
$$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{7}{4}.$$

Získali sme základný tvar exponenciálnej rovnice, ktorý riešime logaritmovaním oboch strán rovnice pri základe 10.
Počítame

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{7}{4}$$
$$\log\left(\frac{3}{4}\right)^x = \log\frac{7}{4}$$
$$x\log\left(\frac{3}{4}\right) = \log\frac{7}{4}$$
$$x = \frac{\log\left(\frac{7}{4}\right)}{\log\left(\frac{3}{4}\right)}.$$

Záver. Po vykonaní skúšky správnosti zisťujeme, že riešením rovnice je $x = \dfrac{\log\left(\frac{7}{4}\right)}{\log\left(\frac{3}{4}\right)}$.

✓

2. Ďalším typom exponenciálnej rovnice je rovnica tvaru $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, kde $a > 0 \wedge a \neq 1$, f, g sú dané funkcie. Pretože exponenciálna funkcia $y = a^x$ ($a > 0 \wedge a \neq 1$) je prostá funkcia, preto platí

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \quad \text{práve vtedy, keď } f(x) = g(x).$$

Príklad. Riešme rovnicu $3^{2x-1} + 3^{2x-2} + 3^{2x-4} = 333.$

Riešenie. Definičným oborom rovnice je celá množina ***R***. Rovnicu upravíme

$$3^{2x-1}+3^{2x-2}+3^{2x-4}=333,$$
$$3^{2x}.3^{-1}+3^{2x}.3^{-2}+3^{2x}.3^{-4}=333,$$
$$3^{2x}.(3^{-1}+3^{-2}+3^{-4})=333,$$
$$3^{2x}=\frac{333.81}{37},$$
$$3^{2x}=3^{6} \quad \text{odkiaľ máme}$$
$$2x=6, \quad \text{pretože platí} \quad a^{f(x)}=a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)=g(x)$$
$$x=3.$$

Vykonáme skúšku správnosti.
$L' = 3^{2.3-1}+3^{2.3-2}+3^{2.3-4}=3^5+3^4+3^2=243+81+9=333$. $P = 333$. $L' = P$.
Záver. Riešením rovnice je $x = 3$. ✓

3. Exponenciálnu rovnicu typu $a^{f(x)}=b^{g(x)}$, kde $a > 0 \wedge a \neq 1$, $b > 0 \wedge b \neq 1$, f, g sú funkcie, riešime pre $a \neq b$ logaritmovaním oboch strán rovnice pri rovnakom základe

$$f(x).\log a = g(x).\log b.$$

Príklad. Riešme rovnicu $2^x.3^{3x}=4^{x-1}$.

Riešenie. Definičným oborom rovnice je celá množina ***R.***

$$2^x.3^{3x}=4^{x-1}$$
$$3^{3x}=2^{2(x-1)}.2^{-x}$$
$$3^{3x}=2^{2x}.2^{-2}.2^{-x}$$
$$3^{3x}=2^{x-2}$$

Obe strany rovnice zlogaritmujeme logaritmom pri základe 3, resp. môžeme aj pri základe 2. Dostávame

$$\log_3 3^{3x}=\log_3 2^{x-2}$$
$$\log_3 3^{3x}=(x-2).\log_3 2$$
$$3x-x\log_3 2=-2\log_3 2$$
$$x(3-\log_3 2)=-2\log_3 2$$
$$x=\frac{2\log_3 2}{\log_3 2-3}.$$

Záver. Po vykonaní skúšky správnosti zisťujeme, že riešením rovnice je $x=\frac{2\log_3 2}{\log_3 2-3}$.

✓

Pri riešení rovnice sme využili pravidlá pre počítanie s logaritmami a so zlomkami, ktoré sú uvedené v kapitole 3.2.1 a navrhovaný postup pre exponenciálne rovnice typu 3, ktoré riešime po vhodných úpravách zlogaritmovaním oboch strán rovnice.

6.10 Logaritmické rovnice

Logaritmické rovnice sú rovnice, ktoré majú neznámu v argumente logaritmu. Pri riešení logaritmických rovníc používame najčastejšie

a) definíciu logaritmu: $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x, \quad (a > 0,\ x > 0,\ a \neq 1),$

b) vlastnosti logaritmov:

$$\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y,$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y,$$

$$\log_a x^n = n.\log_a x,$$

$$\log_a a = 1, \qquad \log 10 = 1, \qquad \ln e = 1,$$

$$\log_a 1 = 0, \qquad \log 1 = 0, \qquad \ln 1 = 0,$$

$$\text{pre} \quad x > 0,\ y > 0,\ a > 0,\ a \neq 1.$$

Pri riešení logaritmických rovníc sa často stretávame s touto situáciou:

$$\log_a x = y, \qquad (a > 0, x > 0, a \neq 1).$$

Pre ľubovoľné y má táto rovnica jediné riešenie

$$a^y = x.$$

Niekedy je zadanie rovnice zložitejšie, preto ho pomocou vlastností logaritmov upravíme na

a) základný tvar $\log_a x = y$, $(a > 0, a \neq 1)$,

b) základný tvar $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, $(a > 0,\ x > 0,\ a \neq 1)$,

kde funkcie $f(x)$ a $g(x)$ nadobúdajú kladné hodnoty. Pretože logaritmická funkcia prostá na celom definičnom obore, platí

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x), \quad (a > 0, a \neq 1, f(x) > 0, g(x) > 0).$$

Často zadanie rovnice naznačuje, že by bolo vhodné a ku zjednodušeniu výpočtu by napomohlo použitie substitúcie $\log_a x = y$. Táto substitúcia prevedie totiž logaritmickú rovnicu na rovnicu algebrickú, ktorá je obvykle ľahšie riešiteľná.

Príklad. Riešme rovnicu $\dfrac{\log(x^2+5)}{2\log(3-x)} = 1.$

Riešenie. Ľahko nahliadneme, že podmienky riešiteľnosti rovnice sú
$3 - x > 0$ a $3 - x \neq 1$.
Rovnica je riešiteľná pre každé reálne číslo $x \in \boldsymbol{D} = (-\infty, 3) - \{2\}$.
Pri úpravách využívame vlastnosti logaritmov a následné porovnanie argumentov logaritmickej funkcie - postup naznačený v b).
Počítame

$$\frac{\log(x^2+5)}{2\log(3-x)}=1$$
$$\log(x^2+5)=2\log(3-x)$$
$$\log(x^2+5)=\log(3-x)^2$$
$$(x^2+5)=(3-x)^2$$
$$x^2+5-x^2+6x-9=0$$
$$6x-4=0$$
$$x=\frac{2}{3}.$$

Záver. Číslo $\boldsymbol{x=\frac{2}{3}}$ patrí do oboru ***D*** a vyhovuje skúške správnosti, je teda riešením danej rovnice.

✓

Príklad. Riešme rovnicu $\log\sqrt{x+1}+\log\sqrt{x-1}=2-\log 2$.

Riešenie. Podmienky riešiteľnosti sú $x>-1$ a $x>1$, rovnica je riešiteľná pre každé reálne číslo $x \in \boldsymbol{D} = (1, \infty)$.
Pri výpočte využijeme základné vlastnosti logaritmov a číslo 2 zapíšeme v tvare $2=\log 10^2$ čím postupne dostaneme

$$\log\sqrt{x+1}+\log\sqrt{x-1}=2-\log 2,$$
$$\log\sqrt{x+1}+\log\sqrt{x-1}=\log 10^2-\log 2,$$
$$\log\left(\sqrt{(x+1)(x-1)}\right)=\log\frac{10^2}{2},$$
$$\log\sqrt{x^2-1}=\log\frac{10^2}{2},$$
$$\sqrt{x^2-1}=50,$$
$$x^2-1=2500,$$
$$x^2=2501,$$
$$x=\pm\sqrt{2501}.$$

Záver. Podmienkam riešiteľnosti ako aj skúške správnosti vyhovuje len je číslo $x=\sqrt{2501}$.

✓

6.11 Exponenciálne a logaritmické nerovnice

Pri riešení exponenciálnych a logaritmických nerovníc využívame základné vlastnosti exponenciálnych a logaritmických funkcií. Predovšetkým rozlišujeme prípady podľa toho, či $a > 1$ alebo $0 < a < 1$, kedy sú príslušné exponenciálne a logaritmické funkcie rastúce, respektíve klesajúce. Rozlišujeme tieto prípady:
Pre $a \in (1, \infty)$:

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x),$$
$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x),$$
$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x), \qquad f(x), g(x) > 0$$
$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x).$$

Pre $a \in (0, 1)$:

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x),$$
$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x),$$
$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x), \qquad f(x), g(x) > 0$$
$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x).$$

Príklad. Riešme nerovnice a) $2^{x+1} < 4$, b) $\log_{\frac{1}{2}}(x-2) \geq -3$.

a) Definičným oborom nerovnice je množina ***R.***

$$2^{x+1} < 4,$$
$$2^{x+1} < 2^2 \Leftrightarrow x+1 < 2,$$
$$x < 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1).$$

Riešenie nerovnice je $x \in (-\infty, 1)$.

b) Definičný obor nerovnice sú všetky $x \in (2, \infty)$. Úpravou nerovnice dostaneme

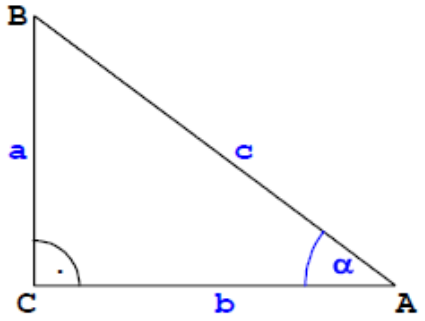
$$\log_{\frac{1}{2}}(x-2) \geq -3 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x-2) \geq \log_{\frac{1}{2}} 8,$$
$$(x-2) \leq 8 \Leftrightarrow x \leq 10.$$

Riešenie nerovnice je $x > 2 \wedge x \leq 10 \Rightarrow x \in (2, 10\rangle$.

7 Trigonometria

7.1 Goniometrické funkcie

Goniometrické funkcie ostrého uhla boli zavedené na ZŠ ako pomery strán v pravouhlom trojuholníku.
Nasledujúca definícia je špeciálnym prípadom všeobecnej definície goniometrických funkcií.
Nech je daný pravouhlý trojuholník s odvesnami *a*, *b* a preponou *c*.



Obr. 6.1.1

Potom definujeme:
Sínus α ako pomer dĺžky odvesny protiľahlej k uhlu α a dĺžky prepony pravouhlého trojuholníka.

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}.$$

Kosínus α ako pomer dĺžky odvesny priľahlej k uhlu α a dĺžky prepony pravouhlého trojuholníka.

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}.$$

Tangens α ako pomer dĺžok odvesny protiľahlej k uhlu α a odvesny priľahlej k uhlu α pravouhlého trojuholníka.

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b}.$$

Kotangens α ako pomer dĺžok odvesny priľahlej k uhlu α a odvesny protiľahlej k uhlu α pravouhlého trojuholníka.

$$\mathrm{cotg}\alpha = \frac{b}{a}.$$

7.1.1 Veľkosť uhla – oblúková a stupňová miera

Stredoškolská definícia goniometrických funkcií sa opiera predovšetkým o pojem veľkosť uhla, ktorú udávame buď v oblúkovej miere alebo v stupňovej miere.
Majme ľubovoľný orientovaný uhol *AVB*, ktorý umiestnime do karteziánskej súradnicovej sústavy tak, že vrchol *V* umiestnime do jej začiatku *O* a rameno *AV* na os *x – ovú*.
Zostrojme jednotkovú kružnicu ***k*** so stredom *V*, t.j. kružnicu s polomerom 1. Dĺžka tejto kružnice je 2π.

Oblúkovú mieru uhla *AVB* definujeme ako dĺžku oblúka jednotkovej kružnice medzi priesečníkmi ramien *VA, VB* a jednotkovej kružnice. Ak má dĺžka tohto oblúka veľkosť 1, potom sa veľkosť uhla *AVB* rovná 1 rad (radián).

Jednotka stupňovej miery sa nazýva **uhlový stupeň** a rovná sa $\frac{1}{90}$ pravého uhla (označujeme: 1 stupeň = 1°). Používame tiež menšie jednotky: 1 minúta (označujeme: 1´) pre jednu šesťdesiatinu stupňa a 1 sekunda (označujeme: 1´´) pre jednu šesťdesiatinu minúty. Pretože celej kružnici zodpovedá uhol 360°, prináleží oblúku dĺžky 2π uhol veľkosti 360°. Pre jeden radián platí: $\frac{360°}{2\pi} \approx 57°17´45´´$.

Vzťah pre prevod medzi stupňami a radiánmi dostaneme z priamej úmernosti:

2π rad.....360 stupňov

x rad.....α stupňov

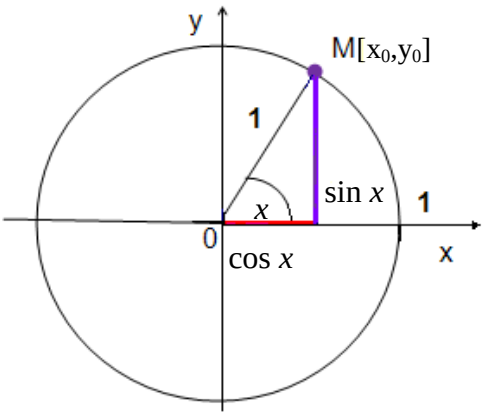
$x = \frac{\alpha\pi}{180}$, $\alpha = \frac{180x}{\pi}$.

7.1.2 Funkcie sínus, kosínus, tangens a kotangens

Goniometrické funkcie reálnej premennej x definujeme pomocou jednotkovej kružnice. V karteziánskej súradnicovej sústave je daná kružnica ***k*** so stredom v začiatku a s polomerom jedna. Každému reálnemu číslu môžeme priradiť orientovaný uhol s veľkosťou x radiánov (v oblúkovej miere), ktorého začiatočné rameno je kladná polos x a vrchol je v začiatku súradnicovej sústavy. Priesečník koncového ramena s kružnicou k označme $M[x_0, y_0]$.

Definičným oborom každej goniometrickej funkcie je podmnožina reálnych čísel: v tomto prípade nebudeme vyjadrovať uhly v stupňovej miere.

Funkcie sínus, kosínus, tangens a kotangens definujeme takto:



Obr. 7.1.2

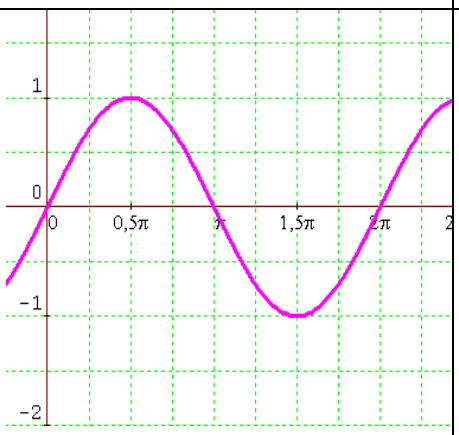
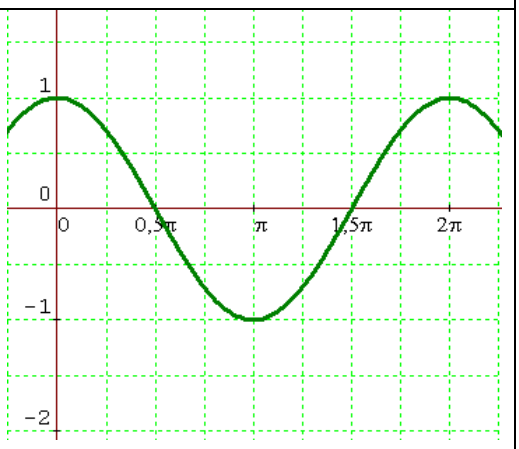
$\sin x = y_0$,

$\cos x = x_0$,

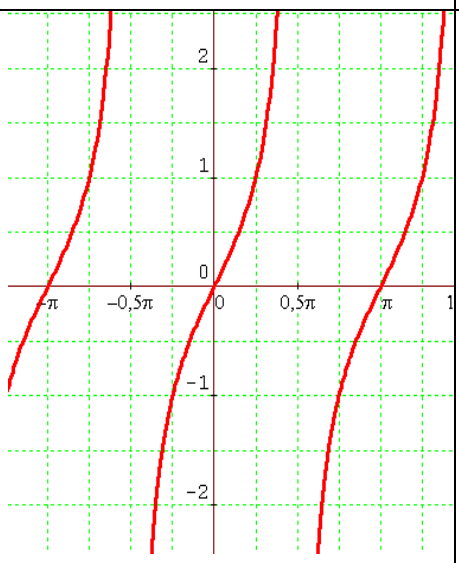
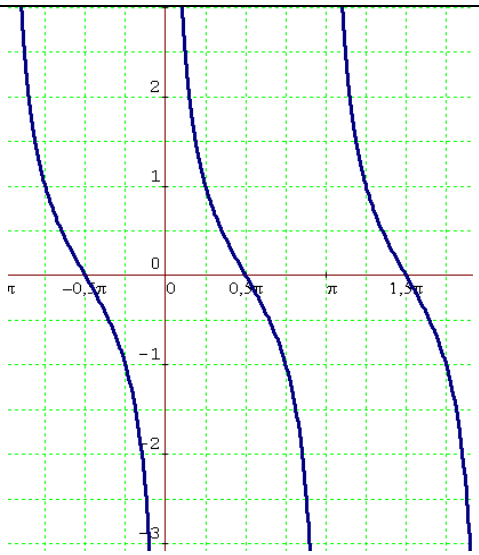
$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$; $\cos x \neq 0$

$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$; $\sin x \neq 0$

7.1.3 Vlastnosti goniometrických funkcií

Funkcia	***y* = sin*x***	***y* = cos*x***
		
definičný obor	***R***	***R***
obor hodnôt	$\langle -1, 1 \rangle$	$\langle -1, 1 \rangle$
párnosť, nepárnosť	nepárna funkcia	párna funkcia
ohraničenosť	zdola i zhora ohraničená	zdola i zhora ohraničená
základná perióda	2π	2π
rastúca	na každom intervale $\left\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle, k \in Z$	na každom intervale $\langle \pi + 2k\pi,\ 2\pi + 2k\pi \rangle, k \in Z$
klesajúca	na každom intervale $\left\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle, k \in Z$	na každom intervale $\langle 0 + 2k\pi,\ \pi + 2k\pi \rangle, k \in Z$
nulové body funkcie	v každom bode $x = k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}$	v každom bode $x = \frac{\pi}{2}(2k+1), k \in Z$

Tab. 7.1.1

Funkcia	***y* = tg*x***	***y* = cotg*x***
		
definičný obor	$R-\left\{(2k-1)\frac{\pi}{2}\right\},\ k\in Z$	$R-\{k\pi\},\ k\in Z$
obor hodnôt	***R***	***R***
párnosť, nepárnosť	nepárna funkcia	nepárna funkcia
ohraničenosť	neohraničená	neohraničená
základná perióda	π	π
rastúca	na každom intervale $x\in\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right), k\in Z$	———
klesajúca	———	na každom intervale $(0+k\pi,\ \ \pi+k\pi),\ k\in \mathbf{Z}$
nulové body funkcie	pre každé $x=k\pi,\ k\in \mathbf{Z}$	pre každé $x=\frac{\pi}{2}(2k-1), k\in Z$

Tab. 7.1.2

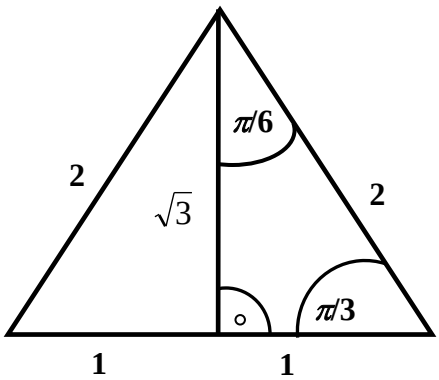
Obrázky 7.1.3 a 7.1.4 vysvetľujú, ako určíme funkčné hodnoty goniometrických funkcií sínus, kosínus, tangens a kotangens pre niektoré vybrané hodnoty argumentu *x*. Na obrázku 7.1.3 vidíme rovnostranný trojuholník so stranou $a = 2$ a na obrázku 7.1.4 štvorec so stranou $a = 1$. Vyjadríme funkčné hodnoty funkcií sínus, kosínus, tangens a kotangens pre veľkosti argumentu $x=\frac{\pi}{6}, x=\frac{\pi}{4}, x=\frac{\pi}{3}$.

Údaje sú uvedené v Tabuľke 7.1.3.

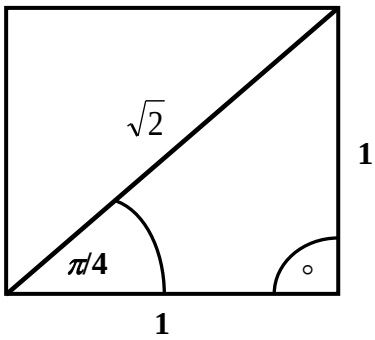
Platí napríklad:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2};\quad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2};\quad \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2};\quad \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2};\quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$



Obr. 7.1.3



Obr. 7.1.4

x rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin*x*	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	- 1	0
cos*x*	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg*x*	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nedef.	0	nedef.	0
cotg*x*	nedef.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	nedef.	0	nedef.

Tab. 7.1.3

Grafom funkcie $y = \sin x$ je **sínusoida.**
Grafom funkcie $y = \cos x$ je **kosínusoida.**
Keďže funkcie $y = \sin x$ a $y = \cos x$ sú periodické funkcie s periódou 2π,
pre každé $x \in \boldsymbol{R}$ platí: $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$
$\sin(x + 2k\pi) = \sin x$, kde $k \in \boldsymbol{Z}$.
Keďže funkcia $y = \sin(x)$ je nepárna a funkcia $y = \cos x$ je párna,
pre každé $x \in \boldsymbol{R}$ platí: $\cos(-x) = \cos x$
$\sin(-x) = -\sin x$, kde $k \in \boldsymbol{Z}$.

Pre každé $x \in \boldsymbol{R}$ platí: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Grafom funkcie $y = \mathrm{tg}\,x$ je **tangentoida.**
Grafom funkcie $y = \mathrm{cotg}\,x$ je **kotangentoida.**

Keďže funkcie $y = \mathrm{tg}x$ a $y = \mathrm{cotg}x$ sú periodické funkcie s periódou π,

pre každé $x \in R - \left\{(2k-1)\frac{\pi}{2}\right\}$, $k \in \boldsymbol{Z}$ platí: $\mathrm{tg}(x + k\pi) = \mathrm{tg}x$,

pre každé $x \in R - \{k\pi\}$, $k \in \boldsymbol{Z}$ platí: $\mathrm{cotg}(x + k\pi) = \mathrm{cotg}x$.

Keďže funkcie $y = \mathrm{tg}(x)$ a $y = \mathrm{cotg}(x)$ sú nepárne funkcie,

pre každé $x \in R - \left\{(2k-1)\frac{\pi}{2}\right\}$, $k \in \boldsymbol{Z}$ platí: $\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}x$,

pre každé $x \in R - \{k\pi\}$, $k \in \boldsymbol{Z}$ platí: $\mathrm{cotg}(-x) = -\mathrm{cotg}x$.

Pre každé $x \in R - \left\{k\frac{\pi}{2}\right\}$, $k \in \boldsymbol{Z}$ platí: $\mathrm{tg}x.\mathrm{cotg}x = 1$.

Znamienka funkčných hodnôt goniometrických funkcií a charakter monotónnosti v jednotlivých kvadrantoch:

$f(x)$	I. $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$	II. $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$	III. $\left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$	IV. $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$
sin(*x*)	Rastúca +	Klesajúca +	Klesajúca –	Rastúca –
cos(*x*)	Klesajúca +	Klesajúca –	Rastúca –	Rastúca +
tg(*x*)	Rastúca +	Rastúca –	Rastúca +	Rastúca –
cotg(*x*)	Klesajúca +	Klesajúca –	Klesajúca +	Klesajúca –

Tab. 7.1.4

Príklad. Zostrojme grafy funkcií:

a) $y = 3\cos x$

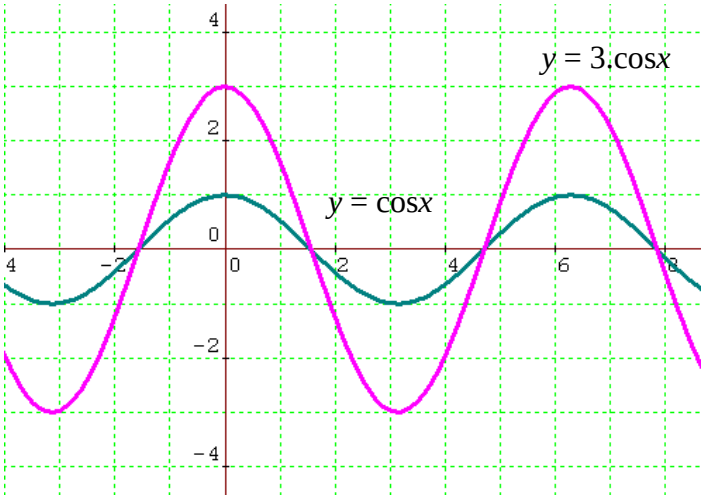
b) $y = \sin(4x)$

c) $y = \sin(x) - 2$

d) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

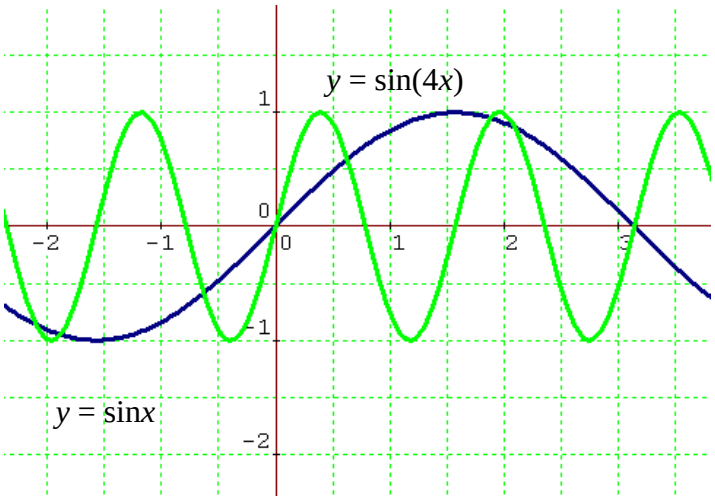
e) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$.

Riešenie. a) Zostrojíme do jedného obrázku graf funkcie $y = \cos x$ a $y = 3\cos x$. Pôvodný obor hodnôt $\langle -1, 1\rangle$ mení číslo 3 na $\langle -3, 3\rangle$.



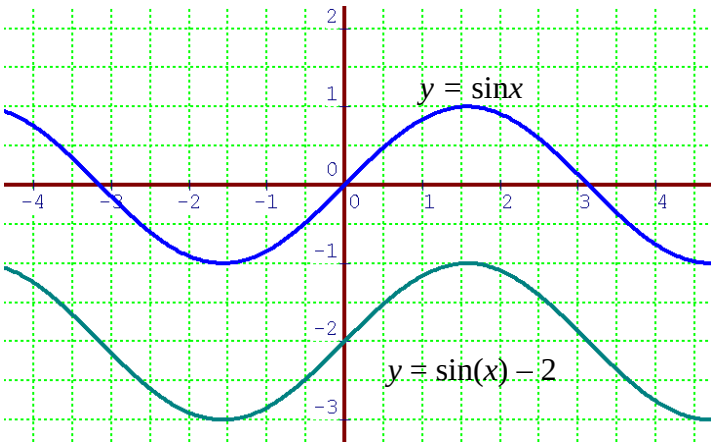
Obr. 7.1.5

b) Teraz budeme postupovať od grafu funkcie $y = \sin x$ a následne zostrojíme graf funkcie $y = \sin(4x)$. Priebeh grafu tejto funkcie sa štyrikrát „zrýchli“. Ak totiž zmeníme argument funkcie z x na kx, zmení sa perióda 2π k – *krát* (v našom prípade 4 – *krát*) na číslo $\frac{2\pi}{k}$ (v našom prípade na $\frac{\pi}{2}$.



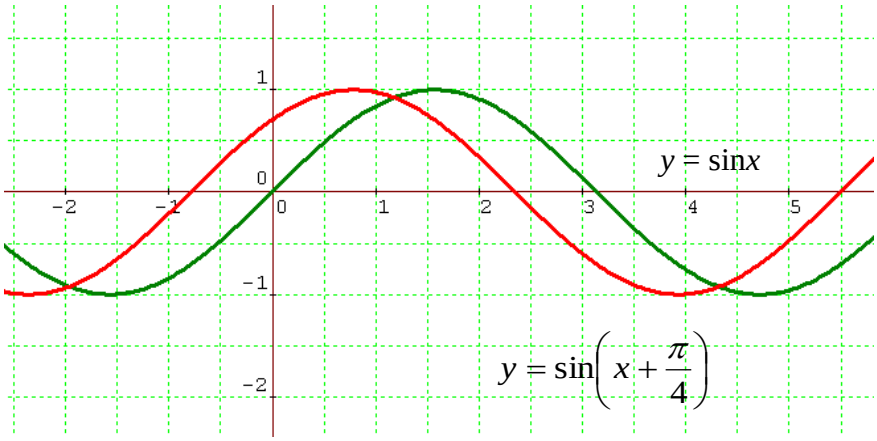
Obr. 7.1.6

c) Graf funkcie $y = \sin x - 2$ zostrojíme tak, že posunieme graf funkcie $y = \sin x$ o dve jednotky v smere zápornej polosi y.



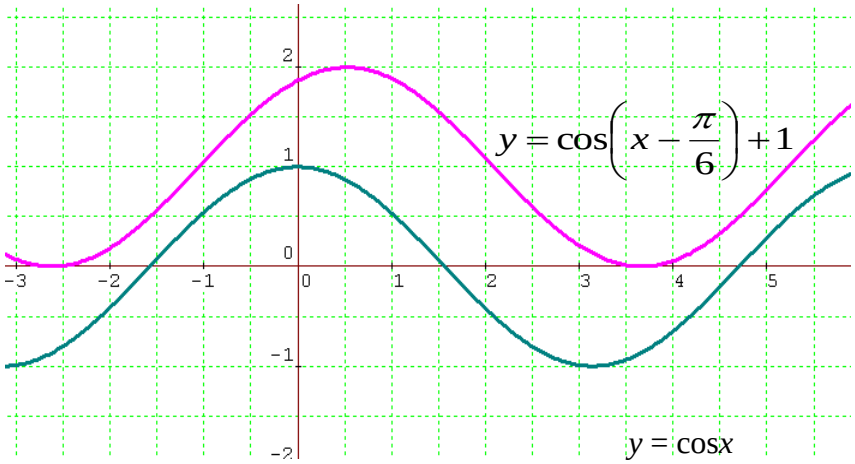
Obr. 7.1.7

d) Graf funkcie $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ dostaneme tak, že graf funkcie $y = \sin x$, posunieme v smere zápornej polosi x o $\frac{\pi}{4}$.



Obr. 7.1.8

e) Graf funkcie $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$ dostaneme posunutím grafu funkcie $y = \cos x$ v smere kladnej polosi x o $\frac{\pi}{6}$, a následným posunutím grafu funkcie $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ o jednotku v smere kladnej polosi y.



Obr. 7.1.9

✓

7.1.4 Goniometrické identity

Pri úprave výrazov obsahujúcich goniometrické funkcie, pri dôkazoch platnosti goniometrických identít, a tiež pri riešení goniometrických rovníc a nerovníc používame nasledujúce goniometrické vzorce:

Vzťahy pre funkčné hodnoty súčtu, resp. rozdielu uhlov

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$$\mathrm{tg}(x+y) = \frac{\mathrm{tg}\, x + \mathrm{tg}\, y}{1 - \mathrm{tg}\, x \mathrm{tg}\, y}$$

$$\mathrm{cotg}(x+y) = \frac{\mathrm{cotg}\, x.\mathrm{cotg}\, y - 1}{\mathrm{cotg}\, y + \mathrm{cotg}\, x}$$

$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$

$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

$$\mathrm{tg}(x-y) = \frac{\mathrm{tg}\, x - \mathrm{tg}\, y}{1 + \mathrm{tg}\, x.\mathrm{tg}\, y}$$

$$\mathrm{cotg}(x-y) = \frac{\mathrm{cotg}\, x.\mathrm{cotg}\, y + 1}{\mathrm{cotg}\, y - \mathrm{cotg}\, x}$$

Vzorce pre funkcie dvojnásobného uhla

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$

$$\mathrm{tg} 2x = \frac{2\mathrm{tg}\, x}{1 - \mathrm{tg}^2 x}$$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$\mathrm{cotg} 2x = \frac{\mathrm{cotg}^2 x - 1}{2\mathrm{cotg}\, x}$$

Vzťahy pre hodnoty funkcií polovičného argumentu

$$\left|\sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

$$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$$

$$\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

$$\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

$$\left|\cos\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$$

$$\left|\mathrm{cotg}\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$$

$$\mathrm{cotg}^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{1-\cos x}$$

Vzťahy pre súčty a rozdiely hodnôt goniometrických funkcií

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = 2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

7.2 Goniometrické rovnice

Goniometrické rovnice sú rovnice, ktoré majú neznámu v argumente goniometrickej funkcie.

Základné typy goniometrických rovníc a ich riešenie:

a) Goniometrické rovnice tvaru $\sin x = a$, $\cos x = a$, kde $a \in \langle -1, 1\rangle$, $\mathrm{tg}\, x = b$, $\mathrm{cotg}\, x = b$. Vzhľadom nato, že goniometrické funkcie sú periodické funkcie, goniometrické rovnice riešené pre všetky prípustné hodnoty $x \in \boldsymbol{R}$, majú spravidla nekonečne veľa riešení. Pri riešení rovníc ktoré obsahujú funkcie sínus a kosínus určíme najskôr

riešenie rovnice na základnom intervale $\langle 0, 2\pi\rangle$. Všetky riešenia rovnice dostaneme následne pripočítaním celých násobkov periódy $p = 2\pi$. Pri rovniciach obsahujúcich funkcie tangens a kotangens určíme najskôr riešenie rovnice na intervale $(0, \pi)$, ktoré zovšeobecníme využitím periodičnosti funkcií, t.j. pričítaním celých násobkov periódy $p = \pi$. (Príklad 1.)
Pri riešení rovnice $f(x) = a$, kde $f(x)$ je ľubovoľná goniometrická funkcia postupujeme takto:

Nech $x' \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ je koreň rovnice $f(x) = |a|$, pričom $f(x)$ je goniometrická funkcia premennej $x \in \boldsymbol{R}$, potom korene rovnice $f(x) = a$ v príslušných kvadrantoch určíme takto:

1. kvadrant $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$	2. kvadrant $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$	3. kvadrant $\left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$	4. kvadrant $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$
$x = x'$	$x = \pi - x'$	$x = \pi + x'$	$x = 2\pi - x'$

Tab. 7.2.1

a) Goniometrické rovnice tvaru $\sin(A(x)) = a$, $\cos(A(x)) = a$, $a \in \langle -1, 1 \rangle$, $\mathrm{tg}(A(x)) = b$, $\mathrm{cotg}(A(x)) = b$, kde $A(x)$ je algebrický výraz premennej x, riešime substitúciou $A(x) = \alpha$. (Príklad 2.)

b) Goniometrické rovnice obsahujúce rôzne mocniny goniometrickej funkcie s rovnakým argumentom upravíme na algebrickú rovnicu. (Príklad 3.)

c) Goniometrické rovnice obsahujúce viaceré goniometrické funkcie s rovnakým argumentom, riešime úpravou všetkých funkcií na jedinú funkciu s tým istým argumentom. (Príklad 4.)

d) Anulovanú goniometrickú rovnicu, ktorej ľavú stranu je možné rozložiť na súčin, riešime tak, že jednotlivé činitele položíme rovné nule a riešime. (Príklad 5.)

Príklad 1. Riešme rovnice: a) $\sin x = 0{,}5$
b) $\mathrm{tg}\, x = -1$.

Riešenie.

a) $\sin x = 0{,}5$
Funkcia sínus nadobúda kladné hodnoty v I. a II. kvadrante.

Preto $x_1 = \frac{\pi}{6}$ je riešenie rovnice v I. kvadrante,

$x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ je riešenie rovnice v II. kvadrante.

Záver. Všetky riešenia danej rovnice sú: $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, kde $k \in \boldsymbol{Z}$.

b) tg $x = -1$
Funkcia tangens nadobúda záporné hodnoty v II. kvadrante, teda riešením rovnice je $x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

Záver. Riešením rovnice sú všetky čísla x tvaru: $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$, kde $k \in \mathbf{Z}$.

✓

Príklad 2. Riešme rovnicu $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -1$.

Riešenie. Zvolíme substitúciu $\alpha = \left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$. Po dosadení bude mať rovnica tvar

$$\cos\alpha = -1.$$

Odkiaľ dostávame $\alpha = \pi$, je riešenie rovnice na intervale $\langle 0, 2\pi\rangle$. Po dosadení všeobecného riešenia $\alpha = \pi + 2k\pi$ dostávame

$$\pi + 2k\pi = \left(2x + \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\frac{5}{6}\pi + 2k\pi = 2x,$$

$$x = \frac{5}{12}\pi + k\pi, \quad k \in Z.$$

Záver. Riešením rovnice sú všetky čísla x tvaru: $x = \frac{5}{12}\pi + k\pi, \quad k \in Z.$

✓

Príklad 3. Riešme goniometrickú rovnicu $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$.

Riešenie. Substitúciou $\sin x = y$ upravíme danú rovnicu na tvar

$$2y^2 - y - 1 = 0,$$

$$y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4},$$

ktorej riešením je $y_1 = 1$ a $y_2 = -\frac{1}{2}$.

Pre $\sin x = 1$ je riešením rovnice $x_1 = \frac{\pi}{2}$. Funkcia sínus nadobúda záporné hodnoty v III. a IV. kvadrante. Riešime najskôr rovnicu $\sin x = \frac{1}{2}$. Odkiaľ dostávame $x' = \frac{\pi}{6}$.

Riešeniami rovnice $\sin x = -\frac{1}{2}$ sú potom $x_2 = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi$ a $x_3 = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11}{6}\pi$.

Záver. Všetky riešenia danej rovnice sú: $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x_2 = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$, $x_3 = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi, \quad k \in Z.$

✓

Príklad 4. Riešme rovnicu tg$x$ = 3cotg$x$.

Riešenie. Určíme definičný obor rovnice. Rovnica je riešiteľná pre každé $x \in R - \left\{ k\frac{\pi}{2} \right\}$, $k \in$ Z. Pretože platí $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ rovnicu prepíšeme do tvaru

$$\operatorname{tg} x = \frac{3}{\operatorname{tg} x},$$
$$\operatorname{tg}^2 x = 3,$$
$$\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3}.$$

Pre $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ je $x_1 = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in Z.$

Pre $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ je $x_2 = \pi - \frac{\pi}{3} + k\pi = \frac{2}{3}\pi + k\pi, k \in Z.$

Záver. Všetky riešenia rovnice sú $x_1 = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ x_2 = \frac{2}{3}\pi + k\pi, k \in Z.$

✓

Príklad 5. Riešme rovnicu cos2x + cos$x$ + 1 = 0.

Riešenie. Využijeme vzťah cos 2x = cos^2x – sin^2x a všetky členy rovnice vyjadríme pomocou jednej goniometrickej funkcie.

cos^2x – sin^2x + cos$x$ + 1 = 0, nahradíme sin^2x = 1 – cos^2x čím dostaneme
cos^2x – 1 + cos^2x + cos$x$ + 1 = 0,
2cos^2x + cos$x$ = 0,
cos x (2cos x + 1) = 0 $\Leftrightarrow$ cos x = 0 $\vee$ 2cos x + 1 = 0

Pre cos$x$ = 0 je $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Pre 2cos$x$ + 1 = 0 je $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Funkcia kosínus je záporná v II. a III. kvadrante. Riešime preto najskôr rovnicu $\cos x = \frac{1}{2}$, odkiaľ dostávame $x' = \frac{\pi}{3}$.

Potom pre II. kvadrant dostávame riešenie: $x_2 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$.

Pre III. kvadrant dostávame riešenie: $x_3 = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$.

Záver. Všetky riešenia danej rovnice sú: $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $x_3 = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, pre $k \in$ **Z.**

✓

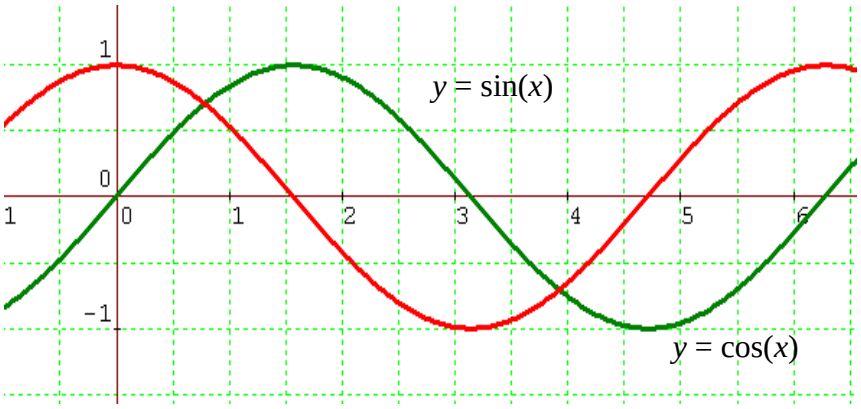
7.3 Goniometrické nerovnice

Základné goniometrické nerovnice sú nerovnice v tvare $f(x) > c$, resp. $f(x) < c$, kde f je goniometrická funkcia premennej $x \in \boldsymbol{R}$ a c je reálna konštanta.
Tieto nerovnice je často výhodné riešiť graficky. Ilustrujeme to nasledovným príkladom.

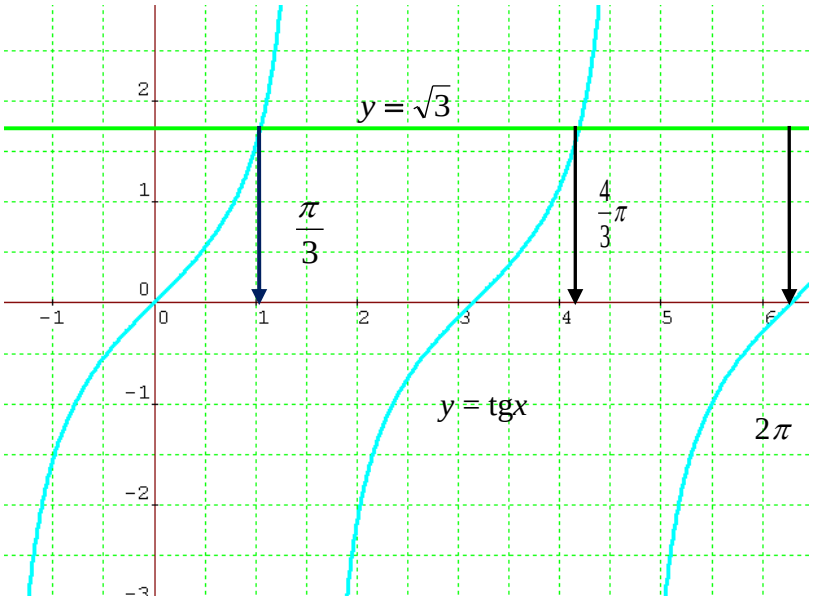
Príklad. V množine $\boldsymbol{R}$ riešme sústavu nerovníc $\sin x > \cos x \wedge \operatorname{tg} x \leq \sqrt{3}$.

Riešenie. Definičným oborom sústavy rovníc sú všetky $x \in R - \left\{(2k-1)\frac{\pi}{2}, k \in Z\right\}$.

Sústavu budeme riešiť najskôr pre všetky prípustné hodnoty x z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$, a potom riešenie zovšeobecníme s využitím periodičnosti goniometrických funkcií.
Využijeme grafickú interpretáciu sústavy nerovníc Obr.7.3.1 a Obr.7.3.2.



Obr. 7.3.1



Obr. 7.3.2

Riešením prvej nerovnice sú všetky x, pre ktoré platí

$$\left((\sin x > \cos x) \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi\right)\right).$$

Riešením druhej nerovnice sú všetky tie x, pre ktoré platí

$$\left(\operatorname{tg} x \le \sqrt{3}\right) \Leftrightarrow \left(x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{3}\right\rangle \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{4}{3}\pi\right\rangle \cup \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right\rangle\right).$$

Teda na intervale $\langle 0, 2\pi\rangle$ sú riešením sústavy nerovníc všetky $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right\rangle \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{5}{4}\pi\right)$.

Záver. Všetky riešenia danej sústavy nerovníc sú

$$x \in \bigcup_{k \in Z} \left(\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right\rangle \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{5}{4}\pi + 2k\pi\right)\right).$$

✓

8 Postupnosti

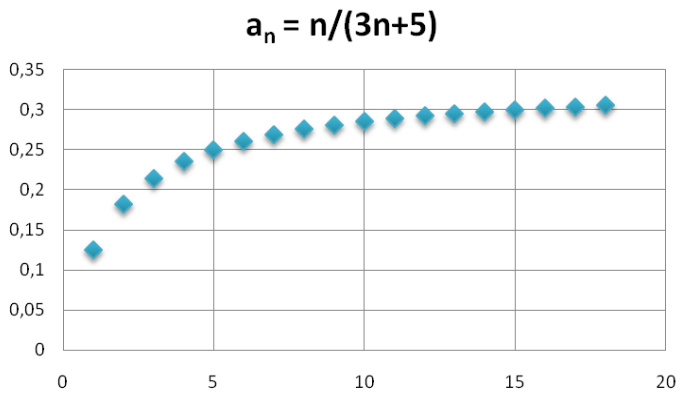
Postupnosťou reálnych čísel rozumieme zobrazenie f množiny $\boldsymbol{N}$ všetkých prirodzených čísel do množiny $\boldsymbol{R}$.

$$f : \boldsymbol{N} \rightarrow \boldsymbol{R}$$

Zapisujeme ju v tvare: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.
Výraz $f(n) = a_n$ nazývame **všeobecným n – tým členom postupnosti.**
Postupnosť môže byť daná **vymenovaním prvkov:** $a_n = \{2, 4, 8, 16,...\}$.
V prípade, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je daná svojím n-tým členom, hovoríme že je **daná analyticky,** napríklad: $\left\{\frac{n}{3n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$, respektíve $\{2^n\}_{n=1}^{\infty}$.
Postupnosť môže byť tiež daná **rekurentne.**
Napríklad: $a_{n+1} = a_n + 3$, $a_1 = 5$. Potom členy tejto postupnosti sú: $\{5, 8, 11, 14,...\}$.
Grafom postupnosti je množina izolovaných bodov $[n, a_n]$, kde $n \in \boldsymbol{N}$.

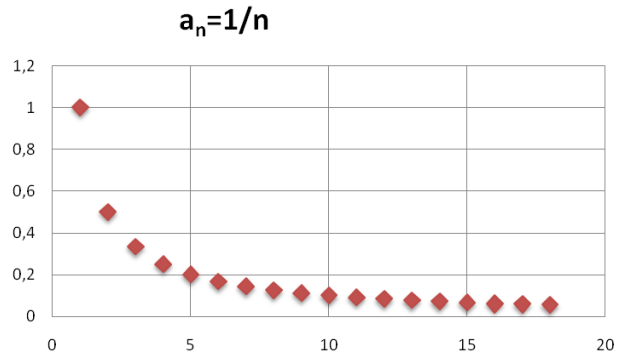
8.1 Vlastnosti postupností

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazývame **rastúcou,** ak každý jej nasledujúci člen je väčší ako člen predchádzajúci, t.j. platí: $a_{n+1} > a_n$ pre každé $n \in \boldsymbol{N}$. (Obr. 8.1)



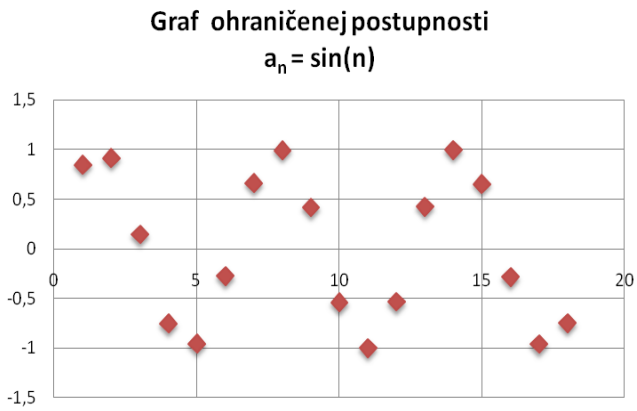
Obr. 8.1

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazývame **klesajúcou**, ak každý jej nasledujúci člen je menší ako člen predchádzajúci, t.j. platí: $a_{n+1} < a_n$ pre každé $n \in \boldsymbol{N}$. (Obr. 8.2)



Obr. 8.2

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazývame **nerastúcou,** ak pre každé $n \in \boldsymbol{N}$ platí: $a_{n+1} \leq a_n$.
Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazývame **neklesajúcou,** ak pre každé $n \in \boldsymbol{N}$ platí: $a_{n+1} \geq a_n$.
Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazývame **konštantnou,** ak pre každé $n \in \boldsymbol{N}$ platí: $a_{n+1} = a_n$.
Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazývame **ohraničenou,** ak $\exists\ \boldsymbol{k} \in \boldsymbol{R}$ tak, že pre každé $n \in \boldsymbol{N}$ platí: $|a_n| \leq k$.

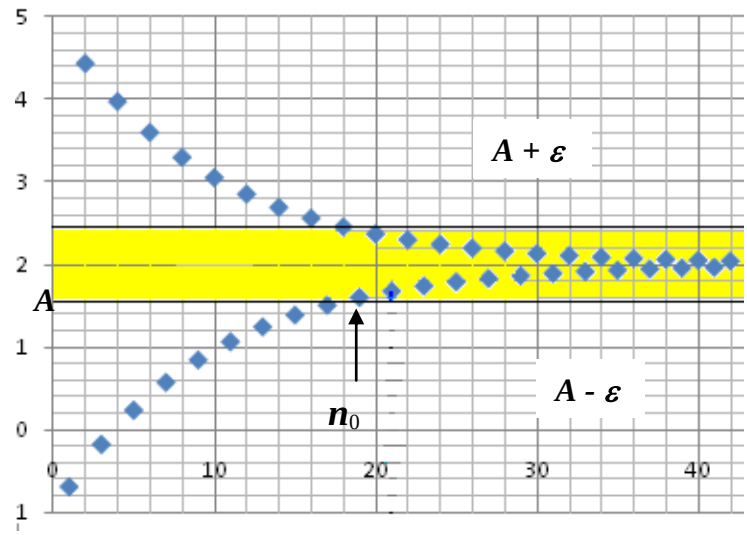


Obr. 8.3

8.1.1 Limita postupnosti

Hovoríme, že číslo $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{R}$ je limitou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (alebo tiež, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu $\boldsymbol{A}$), ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \boldsymbol{N}$ tak, že pre každé $n \in \boldsymbol{N}$, $n > n_0$, je $|a_n - A| < \varepsilon$. Zapisujeme: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

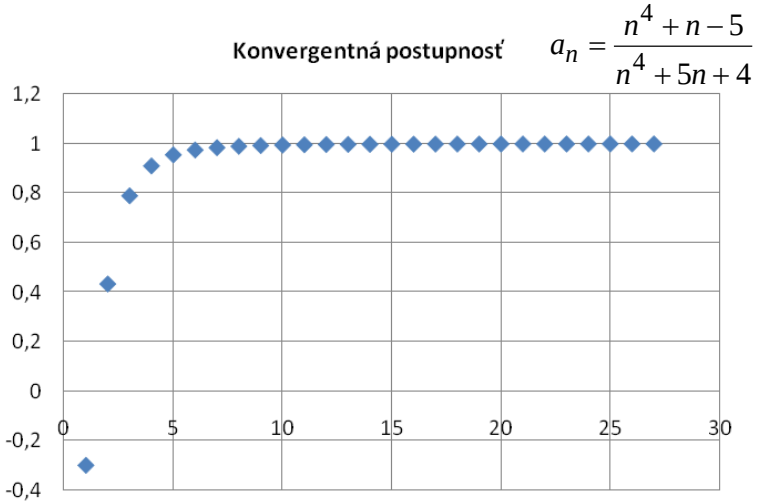
Inak povedané: Od určitého n_0 počnúc, pre $n > n_0$ ležia všetky body grafu postupnosti, v páse ohraničenom dvoma rovnobežkami $y = A - \varepsilon$ a $y = A + \varepsilon$, pričom ε je ľubovoľne zvolené (malé) kladné číslo. (Obr. 8.4)



Obr. 8.4

Ak postupnosť konverguje k číslu ***A*** hovoríme, že daná postupnosť je konvergentná, alebo, že má vlastnú limitu ***A***.

Príklad. Na obrázku 8.5 je graf postupnosti $\left\{\dfrac{n^4+n-5}{n^4+5n+4}\right\}_{n=1}^{\infty}$, ktorá je konvergentná. So vzrastajúcou hodnotou indexu n sa členy postupnosti približujú k hodnote 1. Číslo 1 je limitou tejto postupnosti. Platí: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4+n-5}{n^4+5n+4}=1.$

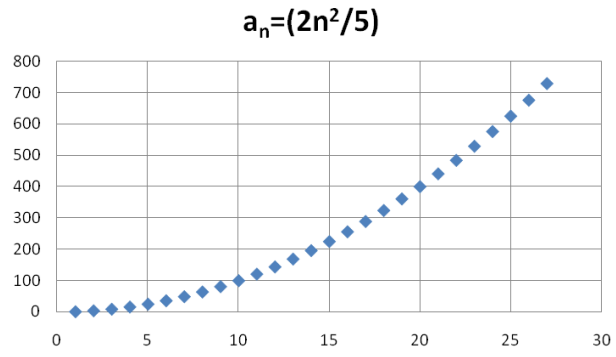


Obr. 8.5

Postupnosť, ktorá nemá limitu, alebo jej limitou je ∞ alebo $-\infty$ sa nazýva **divergentná postupnosť.**

Príklad. Na obrázku 8.6 je graf divergentej postupnosti $\left\{\dfrac{2n^2}{5}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Platí: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2}{5}=\infty.$



Obr. 8.6

8.1.2 Niektoré vety o limitách postupností

Každá postupnosť má najviac jednu limitu.

Každá zhora (zdola) ohraničená neklesajúca (nerastúca) postupnosť má limitu.

Nech sú dané konvergentné postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Potom platí:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n,$$

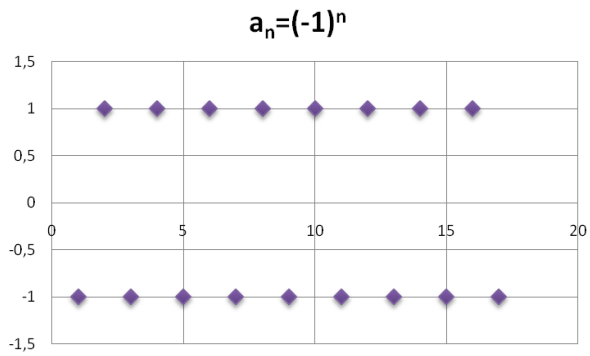
$$\lim_{n\to\infty}(a_n . b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n . \lim_{n\to\infty} b_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} \quad \text{pre} \quad \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0 .$$

Ak je postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentná, potom je ohraničená.

Poznámka. Obátené tvrdenie: *Ak je postupnosť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ohraničená, potom je konvergentná,* vo všeobecnosti **neplatí**.

Príklad. Na obrázku 8.7 je graf ohraničenej postupnosti $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$, ktorá nemá limitu. Nekonečne veľa členov postupnosti nadobúda hodnotu + 1, a tiež nekonečne veľa členov postupnosti nadobúda hodnotu – 1.



Obr. 8.7

8.2 Aritmetická postupnosť

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazývame aritmetickou vtedy a len vtedy, ak existuje také $\boldsymbol{d} \in \boldsymbol{R}$, že pre všetky $n \in \boldsymbol{N}$ platí: $\boldsymbol{a_{n+1} = a_n + d}$ **.**
Číslo ***d*,** nazývame **diferenciou postupnosti**.

Pre n - tý člen postupnosti platí: $a_n = a_1 + (n - 1)\, d$.

Pre ľubovoľné členy postupnosti a_r, a_s, platí: $a_r = a_s + (r - s)\, d$.

Pre súčet prvých n členov aritmetickej postupnosti platí:

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

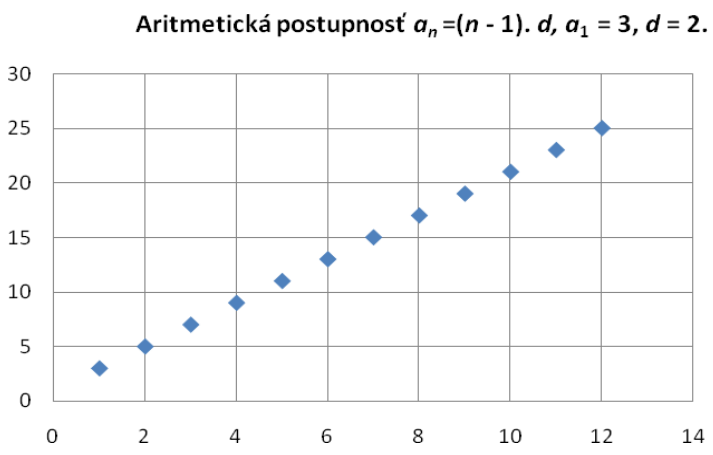
Pre každé prirodzené číslo $n \neq 1$ platí: $a_n = \dfrac{(a_{n-1} + a_{n+1})}{2}$. Tento vzťah vyjadruje, že v aritmetickej postupnosti hodnota každého člena postupnosti, okrem prvého, je aritmetickým priemerom susedných členov.

Grafom aritmetickej postupnosti je množina izolovaných bodov, ktoré **ležia na priamke,** pretože vzorec pre n – tý člen môžeme zapísať v tvare:

$$\boldsymbol{a_n = d\,.n + (a_1 - d)}\ .$$

Preto je tiež aritmetická postupnosť
rastúca pre $d > 0$,
klesajúca pre $d < 0$,
konštantná pre $d = 0$.

Na obrázku 8.8 je graf rastúcej aritmetickej postupnosti danej rekurentným predpisom
$a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n + d$, $d = 2$.



Obr. 8.8

8.3 Geometrická postupnosť

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazývame **geometrickou**, ak existuje také $\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{R}$, že pre všetky $n \in \boldsymbol{N}$ platí: $\boldsymbol{a_{n+1} = a_n \,.\, q}$ **.**

Číslo $q = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ sa nazýva **kvocient geometrickej postupnosti**.

V geometrickej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

Pre každé $n \in \boldsymbol{N}$: $a_{n+1} = a_n \,.\, q$ (rekurentná definícia geometrickej postupnosti).

Pre n - tý člen postupnosti platí: $a_n = a_1 \,.\, q^{n-1}$.

Pre ľubovoľné členy postupnosti a_r, a_s platí: $a_r = a_s \,.\, q^{r-s}$.

Pre súčet prvých n členov geometrickej postupnosti platí:

$$s_n = a_1 . \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \text{pre} \quad q \neq 1,$$

$$s_n = n.a_1 \quad \text{pre} \quad q = 1.$$

Pre každé prirodzené číslo $n \neq 1$ platí: $|a_n| = \sqrt{a_{n-1}.a_{n+1}}$. Tento vzťah vyjadruje, že v geometrickej postupnosti hodnota každého člena postupnosti, okrem prvého, je geometrickým priemerom susedných členov, preto sa tiež táto postupnosť nazýva geometrická.

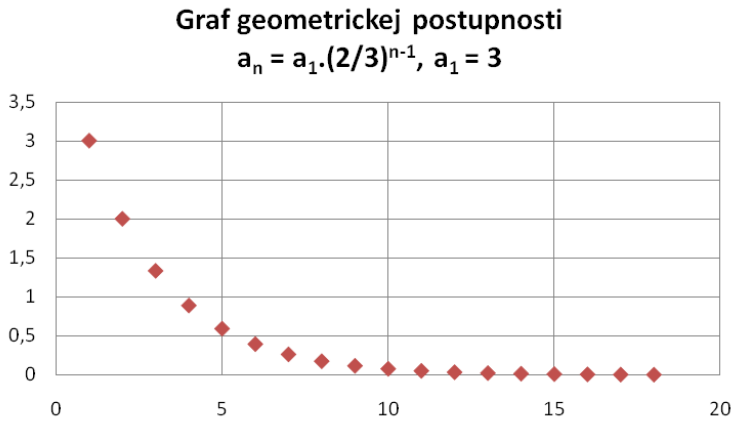
Grafom geometrickej postupnosti, pre kvocient ktorej platí: $q > 0$ a $q \neq 1$, je množina izolovaných bodov, ktoré **ležia na exponenciálnej krivke,** nakoľko vzorec pre n – tý člen geometrickej postupnosti môžeme zapísať v tvare:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 \,.\, q^{n-1}} \,.$$

Z toho vyplýva, že geometrická postupnosť je

rastúca pre $q > 1$,

klesajúca pre $0 < q < 1$.



Obr. 8.9

8.4 Nekonečný rad

Ak je $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nekonečná postupnosť reálnych čísel, tak potom formálny výraz

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

sa nazýva **nekonečný rad** a čísla a_1, a_2, a_3,... nazývame **členmi radu**.
Ak $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ je nekonečný rad, tak definujeme postupnosť $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$,
kde: $s_1 = a_1$

$s_2 = a_1 + a_2$

$\vdots$

$s_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k$

$\vdots$

Túto postupnosť nazývame **postupnosťou čiastočných súčtov radu** $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$.
Ak postupnosť $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ **konverguje**, potom hovoríme, že rad $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ **konverguje** a číslo $s = \lim_{k\to\infty} s_k$ nazývame súčtom radu $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$.

Označujeme: $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Ak postupnosť $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ nekonverguje, hovoríme, že rad $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ **diverguje**.
Nekonečným geometrickým radom je rad

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}, \quad a_1 \neq 0.$$

V prípade geometrického radu s kvocientom $q \neq 1$ pre k – tý člen postupnosti $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ jeho čiastočných súčtov platí:

$$s_k = a_1 . \frac{q^k - 1}{q - 1}.$$

Táto postupnosť pre $|\boldsymbol{q}| < 1$ konverguje k číslu $s = \dfrac{a_1}{1-q}$.

Pre $|\boldsymbol{q}| \geq 1$ postupnosť čiastočných súčtov **diverguje.**

Príklad. Medzi čísla 5 a 640 vložte toľko čísel, aby vznikla geometrická postupnosť so súčtom vložených čísel 630.Vypíšte ich.

Riešenie. Platí $a_1 = 5$, $a_n = 640$, pričom $a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} = 630$. Odkiaľ máme

$$a_n = a_1 q^{n-1} \Rightarrow q^{n-1} = \frac{640}{5} = 128.$$

Vidíme, že rovnica vyhovuje pre $q = 2$ a $n - 1 = 7 \Rightarrow n = 8$. Overme, či nájdené hodnoty vyhovujú druhej podmienke, t.j.

$$a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-2} = 630 \Rightarrow q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-2} = 126.$$

Keďže predpokladáme $q = 2$, $n = 8$, malo by platiť

$$2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 126.$$

Záver. Obe nájdené hodnoty vyhovujú; takže postupnosť pozostáva z členov 5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640.

✓

Príklad. Určte štyri čísla, ktoré sú štyrmi za sebou idúcimi členmi geometrickej postupnosti a ich dekadické logaritmy sú štyrmi za sebou idúcimi členmi aritmetickej postupnosti s diferenciou $d = 1$ a súčtom 22.

Riešenie. Označme geometrickú postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a geometrickú postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$

Potom platí:

$a_1 = x$ a súčasne $b_1 = \log x$

$a_2 = xq$ $b_2 = \log a_2 = \log x + \log q$

$a_3 = xq^2$ $b_3 = \log a_3 = \log x + 2\log q$

$a_4 = xq^3$ $b_4 = \log a_4 = \log x + 3\log q$.

Pre aritmetickú postupnosť platí:

$$d = \log q$$

a zároveň $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 22.$

Teda $\log q = 1 \Leftrightarrow q = 10$ a súčasne

$$4\log x + 6\log q = 22$$
$$4\log x + 6 = 22$$
$$\log x = 4$$
$$x = 10^4.$$

Záver. Hľadanými číslami sú: 10^4, 10^5, 10^6, 10^7.

✓

Príklad. Po kmeni stromu lezie priamo hore húsenica. Za prvú minútu prejde 50 cm za druhú minútu 25 cm, za ďalšiu 12,5 cm, ... atď. Za každú ďalšiu minútu teda prejde polovicu v predchádzajúceho úseku. Vzdialenosť k prvému chrumkavému listu je 2 metre. Kedy k nemu húsenica dorazí? Dorazí k nemu vôbec niekedy?

Riešenie. Uvedieme algebrické riešenie úlohy a tiež numerický model riešenia vytvorený v programe MS Excel.

Úseky dráhy prejdené húsenicou za časové jednotky sú členy nekonečného geometrického radu s kvocientom $q = 0{,}5$. Dĺžka dráhy prejdenej húsenicou sa rovná súčtu nekonečného radu, pre ktorý platí:

$a_1 = 50$ cm

$q = 0{,}5 \Rightarrow$ geometrický rad konverguje

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{50}{1-\frac{1}{2}} = \frac{50}{\frac{1}{2}} = 100cm$$

Záver. Súčet uvedeného nekonečného radu je jeden meter. Teda dráhu 2 metre húsenica neprejde nikdy.

Uvádzame tabuľku členov nekonečného radu pomocou ktorého matematicky modelujeme riešenú úlohu a tiež niekoľko členov postupnosti čiastočných súčtov. Demonštrujeme numerickým modelom fakt, že táto postupnosť konverguje a jej limitou – teda súčtom nekonečného geometrického radu je hodnota 100.

čas (min)	dráha v [cm] prejdená za časovú jednotku; tj. členy a_k geometrického radu	Členy postupnosti čiastočných súčtov $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ kde $s_k = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k$
1	50,000	50 = a_1
2	25,000	75 = $a_1 + a_2$
3	12,500	87,5 = $a_1 + a_2 + a_3$
4	6,2500	93,75 = $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$
5	3,1250	96,875
6	1,5625	98,4375
7	0,7813	99,21875
8	0,3906	99,60938
9	0,1953	99,80469
10	0,0977	99,90234
11	0,0488	99,95117
12	0,0244	99,97559
13	0,0122	99,98779
14	0,0061	99,99390
15	0,0031	99,99695
16	0,0015	99,99849
17	0,0008	99,99924
18	0,0004	99,99962
19	0,0002	99,99981
20	0,0001	99,99998
21	0,0000	99,99999
Dĺžka dráhy		100,000 cm = 1 m

Obr. 8.10

✓