9 Planimetria

9.1 Uhol

Pojem uhol patrí k najzákladnejším pojmom geometrie. Uhol môžeme definovať niekoľkými rôznymi spôsobmi, z ktorých má každý svoje opodstatnenie. Jedna zo základných definícií hovorí:

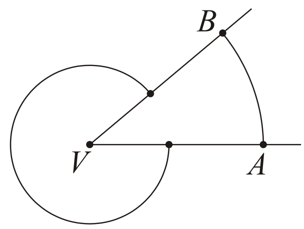
Uhol je časť roviny obmedzená dvoma polpriamkami so spoločným začiatočným bodom.

Pri takejto definícii uhla si však musíme uvedomiť, že polpriamky *VA*, *VB* určujú dva rôzne uhly: a) **konvexný uhol *AVB***, ktorý označujeme ∢ *AVB*,

b) **nekonvexný uhol *AVB***, ktorý označujeme ⦣ *AVB*.

Poznámka. Väčšinou budeme pod uhlom rozumieť konvexný uhol.

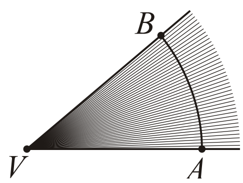
Bod *V* sa nazýva **vrchol uhla** *AVB* a polpriamky *VA*, *VB* sa nazývajú **ramená uhla** *AVB*. Pre zjednodušenie uhly často označujeme malými gréckymi písmenami.



Obr. 9.1

Iným spôsobom môžeme uhol definovať pomocou bodov danej vlastnosti. Definícia uhla potom môže byť napríklad takáto:

Rovinným uhlom nazývame množinu všetkých bodov všetkých polpriamok *VX* so spoločným začiatkom *V*, kde bod *X* patrí danému oblúku *AB* kružnice *k* so stredom v bode *V*.



Obr. 9.2

Okrem už spomenutých konvexných a nekonvexných uhlov sa v praxi často stretávame s týmito ďalšími druhmi uhlov:

a) **nulový uhol** – jeho ramená ležia na tej istej polpriamke (všetky ich body sú spoločné),

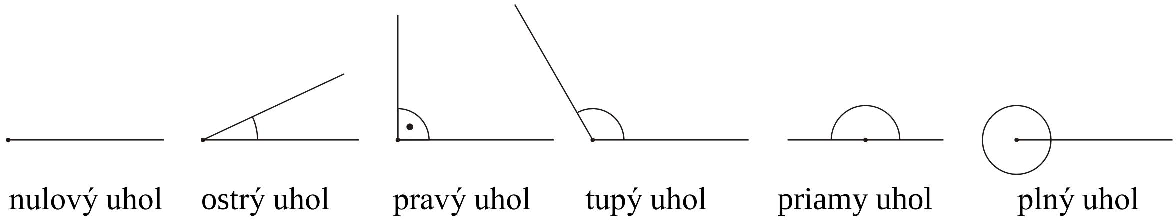
b) **plný uhol** - jeho ramená ležia na tej istej polpriamke a je doplnkom nulového uhla v rovine,

c) **priamy uhol** – jeho ramená sú navzájom opačné polpriamky tej istej priamky,

d) **pravý uhol** – je polovica priameho uhla,

e) **ostrý uhol** – je menší ako pravý uhol,

f) **tupý uhol** – je väčší ako pravý a menší ako priamy uhol.



Obr. 9.3

Dvojice uhlov

Dve rôzne priamky preťaté treťou priamkou (priečkou) tvoria dvojice uhlov. Niektoré dôležité druhy dvojíc uhlov rozlišujeme podľa vzájomnej polohy ich ramien. Pre vyjadrenie polôh týchto ramien použijeme pojmy súvisiace s dvojicami polpriamok na tej istej priamke:

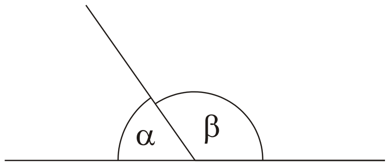
a) **polpriamky súhlasne rovnobežné** – aspoň jedna je časťou druhej (obr. 9.4 vľavo),

b) **polpriamky nesúhlasne rovnobežné** – žiadna z nich nie je časťou druhej polpriamky (obr. 9.4 vpravo).

Obr. 9.4

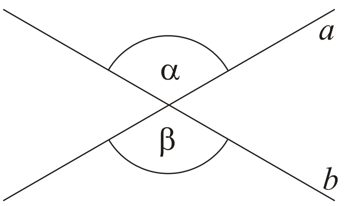
Známe sú tieto druhy dvojíc uhlov:

- **susedné uhly** – majú jedno rameno spoločné, druhé dve ramená sú opačné polpriamky tej istej priamky; súčet susedných uhlov je priamy uhol,



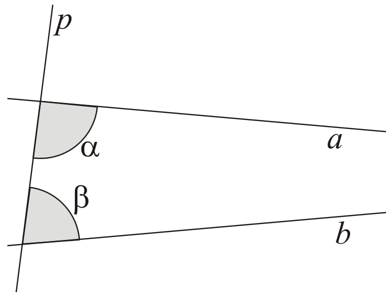
Obr. 9.5

- **vrcholové uhly** – obidve ramená jedného uhla sú opačnými polpriamkami k ramenám druhého uhla,

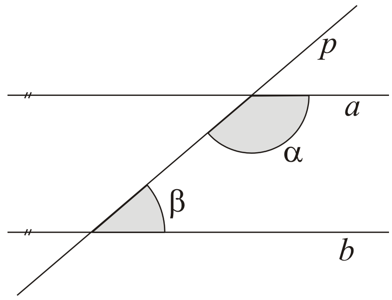


Obr. 9.6

- **priľahlé uhly** – prvé ramená ležia na jednej priamke a sú nesúhlasne rovnobežné, druhé ramená ležia na polpriamkach tej istej polroviny s hranicou určenou spoločnou priamkou prvých ramien (obr. 9.7). Ak druhé ramená ležia na rovnobežných priamkach, potom je súčet priľahlých uhlov rovný priamemu uhlu (obr. 9.8),

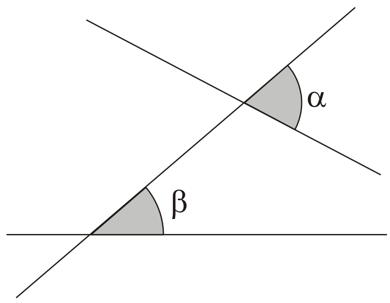


Obr. 9.7

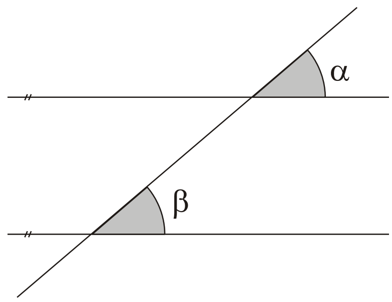


Obr. 9.8

- **súhlasné uhly** – prvé ramená ležia na jednej priamke a sú súhlasne rovnobežné, druhé ramená ležia na polpriamkach tej istej polroviny s hranicou určenou spoločnou priamkou prvých ramien (obr. 9.9). Ak druhé ramená ležia na rovnobežných priamkach, potom sú súhlasné uhly sú zhodné (obr. 9.10),

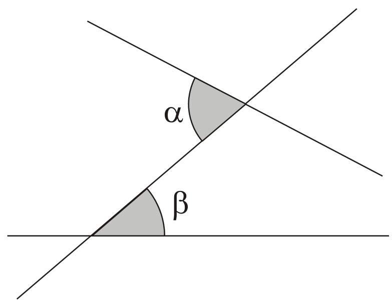


Obr. 9.9

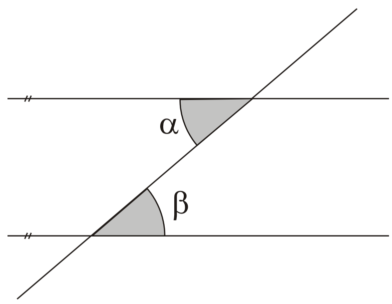


Obr. 9.10

- **striedavé uhly** – prvé ramená ležia na jednej priamke a sú nesúhlasne rovnobežné, druhé ramená ležia na polpriamkach v opačných polrovinách s hranicou určenou spoločnou priamkou prvých ramien (obr. 9.11). Ak druhé ramená ležia na rovnobežných priamkach, potom sú striedavé uhly zhodné (obr. 9.12).



Obr. 9.11



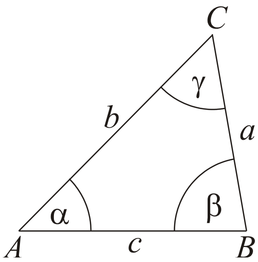
Obr. 9.12

9.2 Trojuholník

Trojuholník patrí medzi základné geometrické útvary. **Trojuholník** môžeme definovať ako **prienik troch polrovín**. Ak napríklad máme v rovine tri rôzne body *A*, *B*, *C*, ktoré neležia na jednej priamke, tak trojuholníkom s **vrcholmi** *A*, *B*, *C* nazývame prienik polrovín

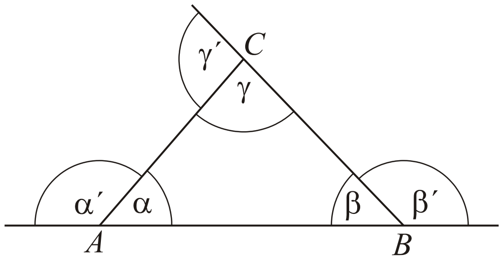
ABC, *ACB* a *BCA*. Úsečky *AB*, *BC* a *CA* sú **stranami** tohto trojuholníka. Takýto trojuholník zvykneme označovať Δ *ABC*.

Vnútorné uhly trojuholníka pri vrcholoch *A*, *B*, *C* sa nazývajú konvexné uhly $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle BCA = \gamma$.



Obr. 9.13

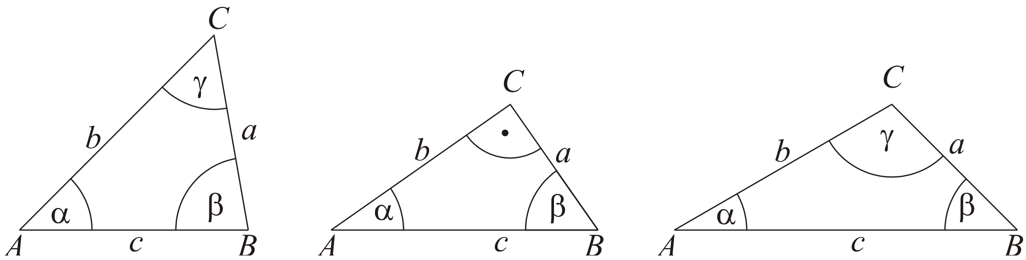
Susedné uhly k vnútorným uhlom trojuholníka sa nazývajú **vonkajšie uhly** trojuholníka.



Obr. 9.14

Typy trojuholníkov

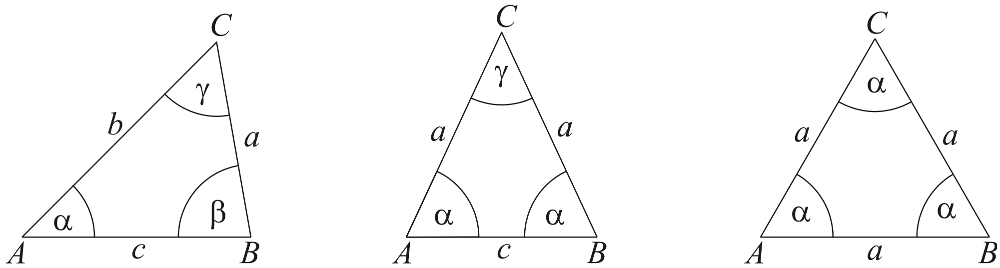
- Podľa veľkosti najväčšieho vnútorného uhla delíme trojuholníky na **ostrouhlé**, **pravouhlé** a **tupouhlé**.



Obr. 1.15

- Podľa vzájomných pomerov dĺžok strán rozoznávame **rôznostranné**, **rovnoramenné** a **rovnostranné** trojuholníky.

$a \neq b \neq c \neq a$ $\quad$ $a = b \neq c$ $\quad$ $a = b = c$



Obr. 9.16

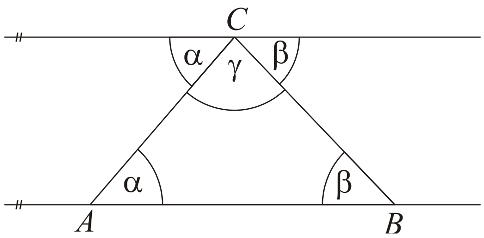
Poznámka: S pojmom **všeobecný** trojuholník sa stretávame v prípadoch, keď pri trojuholníku nepredpokladáme žiadne špecifické vlastnosti.

Vzťahy medzi uhlami a stranami trojuholníka

V každom trojuholníku platí:

- **Súčet veľkostí vnútorných uhlov sa rovná priamemu uhlu.**

Dôkaz tohto tvrdenia vyplýva z vlastností striedavých uhlov na rovnobežkách.



Obr. 9.17

- **Oproti dlhšej strane leží väčší uhol, oproti kratšej stane leží menší uhol a naopak.**
- **Veľkosť vonkajšieho uhla pri jednom vrchole sa rovná súčtu veľkostí vnútorných uhlov pri zvyšných dvoch vrcholoch**.
- Pre dĺžky strán trojuholníka platí **trojuholníková nerovnosť**:

$$|b-c| < a < b+c, \quad |a-c| < b < a+c, \quad |a-b| < c < a+b\,.$$

- Ak označíme $s=\dfrac{a+b+c}{2}$, potom veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka možno určiť

zo vzťahov: $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}}$, $\quad\sin\dfrac{\beta}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-c)(s-a)}{ca}}$, $\quad\sin\dfrac{\gamma}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{ab}}$,

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}, \qquad \cos\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}, \qquad \cos\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}.$$

- **Sínusová veta**: $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}$

alebo $\dfrac{a}{b}=\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, $\quad\dfrac{b}{c}=\dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma}$, $\quad\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$.

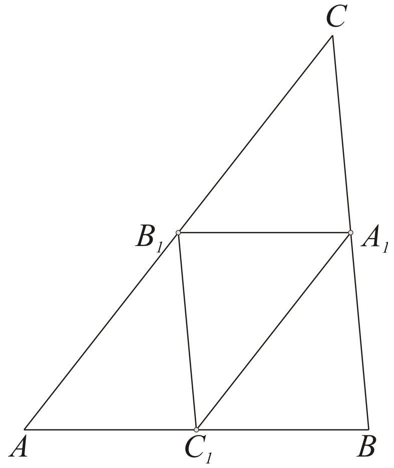
- **Kosínusová veta**: $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha$,

alebo $b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos\beta$,

alebo $c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma$.

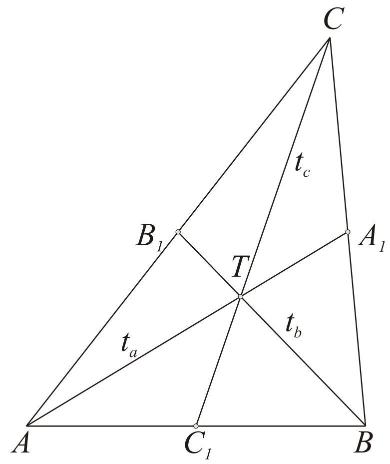
Ďalšie prvky trojuholníka

Stredná priečka trojuholníka je úsečka spájajúca stredy dvoch strán trojuholníka. Každá stredná priečka trojuholníka je rovnobežná so stranou trojuholníka , ktorej stred na nej neleží. Dĺžka strednej priečky sa rovná polovici dĺžky tej strany trojuholníka, s ktorou je rovnobežná.



Obr. 9.18

Ťažnica trojuholníka je úsečka, ktorá spája stred strany s protiľahlým vrcholom. Všetky tri ťažnice prechádzajú jedným bodom, ktorý nazývame **ťažisko**. Ťažisko delí každú z ťažníc v pomere 2 : 1, pričom dlhšia časť leží medzi vrcholom a ťažiskom, a kratšia časť medzi ťažiskom a stredom strany.

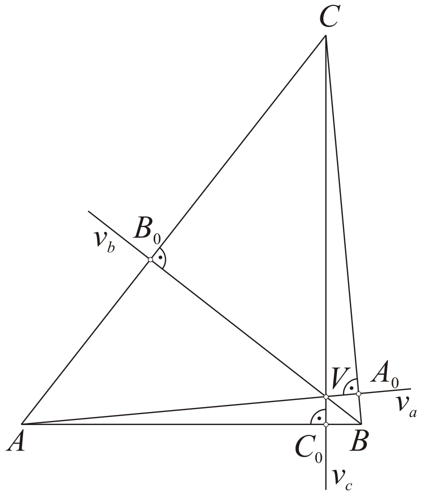


Obr. 9.19

Dĺžky ťažníc môžeme určiť pomocou vzťahov:

$$t_a = \frac{\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}}{2}, \qquad t_b = \frac{\sqrt{2\left(a^2+c^2\right)-b^2}}{2}, \qquad t_c = \frac{\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)-c^2}}{2}.$$

Výška trojuholníka je priamka prechádzajúca vrcholom trojuholníka a je kolmá na protiľahlú stranu. V ľubovoľnom trojuholníku prechádzajú všetky tri výšky jedným bodom, ktorý nazývame **ortocentrum**.



Obr. 9.20

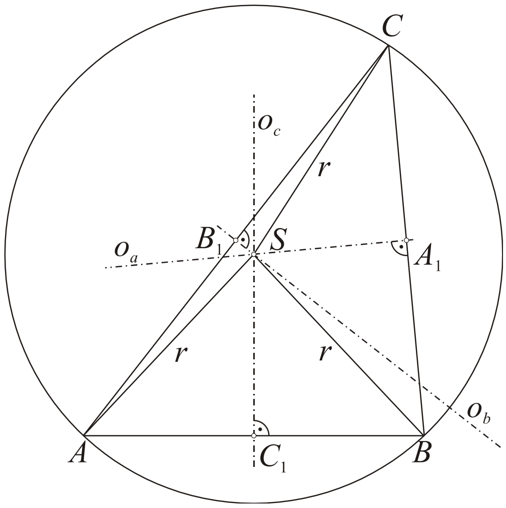
Výšky trojuholníka vypočítame zo vzťahov:

$v_a = c \cdot \sin \beta = b \cdot \sin \gamma,\qquad v_b = c \cdot \sin \alpha = a \cdot \sin \gamma,\qquad v_c = a \cdot \sin \beta = b \cdot \sin \alpha$.

Os strany trojuholníka je osou úsečky, čiže je to priamka, ktorá prechádza stredom úsečky a je na ňu kolmá. Osi strán sa pretínajú v jednom bode, ktorý je stredom **kružnice trojuholníku opísanej**. Tento bod je rovnako vzdialený od všetkých vrcholov trojuholníka. Polomer opísanej kružnice spravidla označujeme písmenom *r*.

Polomer opísanej kružnice sa vypočíta zo vzťahu:

$$r = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{b}{2\sin\beta} = \frac{c}{2\sin\gamma}\ .$$

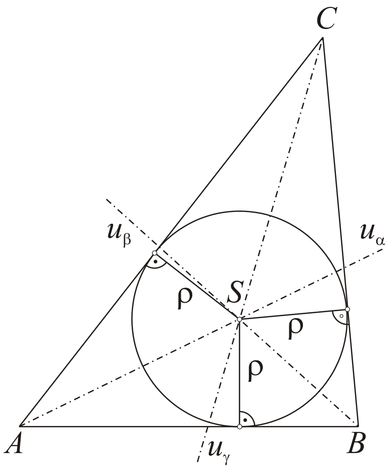


Obr. 9.21

Os vnútorného uhla trojuholníka je priamka, ktorá delí uhol na dva zhodné uhly. Osi vnútorných uhlov sa pretínajú v jednom bode, ktorý je stredom **kružnice vpísanej** trojuholníku, t. j. kružnica sa dotýka všetkých strán trojuholníka. Polomer vpísanej kružnice spravidla označujeme písmenom *ρ*.

Polomer vpísanej kružnice sa vypočíta zo vzťahu:

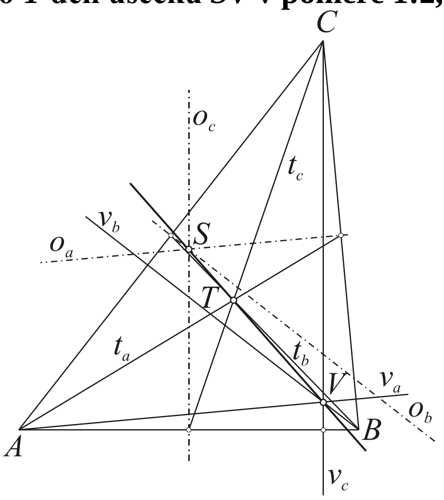
$$\rho = 4r \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2}\ .$$



Obr. 9.22

Nech v trojuholníku *ABC* je *T* ťažisko, *V* ortocentrum, *S* stred opísanej a *S′* stred vpísanej kružnice. Potom platí:

- ***T*** **a** ***S′*** **sú vnútorné body každého trojuholníka,**
- ***V*** **a** ***S*** **sú vnútorné body ostrouhlého trojuholníka, patria niektorej hraničnej strane pravouhlého trojuholníka a sú vonkajšími bodmi tupouhlého trojuholníka,**
- ***S* ≡ *V* ≡ *T*, ak trojuholník *ABC* je rovnostranný,**
- ***ak trojuholník nie je rovnostranný, potom S, V*** **a** ***T*** **ležia na jednej priamke (Eulerova priamka), pričom ťažisko** ***T*** **delí úsečku** ***SV*** **v pomere 1:2,**



Obr. 9.23

- **pomer dĺžok strán trojuholníka sa rovná pomeru prevrátených hodnôt jeho výšok**

$$a : b : c = \frac{1}{v_a} : \frac{1}{v_b} : \frac{1}{v_c}\ .$$

Vzťahy pre obvod a obsah trojuholníka

Obvod trojuholníka je $O = a + b + c$.

Obsah trojuholníka je $S = \dfrac{a \cdot v_a}{2} = \dfrac{b \cdot v_b}{2} = \dfrac{c \cdot v_c}{2}$,

$$S = \frac{ab \cdot \sin\gamma}{2} = \frac{bc \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{ca \cdot \sin\beta}{2} ,$$

$$S = 2r^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma ,$$

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \text{ kde } s = \frac{O}{2} \text{ (Herónov vzorec)} .$$

Špeciálne vlastnosti pravouhlého trojuholníka

Pravouhlý trojuholník je taký trojuholník, ktorého jeden vnútorný uhol je pravý. Strany a, b, ktoré zvierajú pravý uhol, nazývame **odvesny** a stranu c (protiľahlú k pravému uhlu) **prepona**.

- **Súčet uhlov priľahlých k prepone sa rovná pravému uhlu**: $\alpha + \beta = 90°$.
- **Pravouhlý trojuholník je základom pre definície goniometrických funkcií.**
- **Výšky na odvesny sa zhodujú s druhými odvesnami**: $v_a = b$, $v_b = a$.
- **Obsah pravouhlého trojuholníka** je $S = \dfrac{a \cdot b}{2}$.

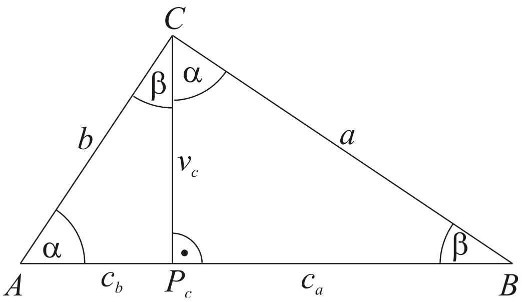
Euklidove vety:

Päta P_c výšky v_c rozdeľuje stranu c na dve úsečky AP_c a BP_c. Úsečku $AP_c = c_b$ nazývame tiež úsek priľahlý k odvesne b a $BP_c = c_a$ úsek priľahlý k odvesne a.

Euklidova veta o odvesne

Obsah štvorca zostrojeného nad odvesnou pravouhlého trojuholníka sa rovná obsahu obdĺžnika, ktorého jednou stranou je prepona a druhou stranou je úsek na prepone priľahlý k tejto odvesne.

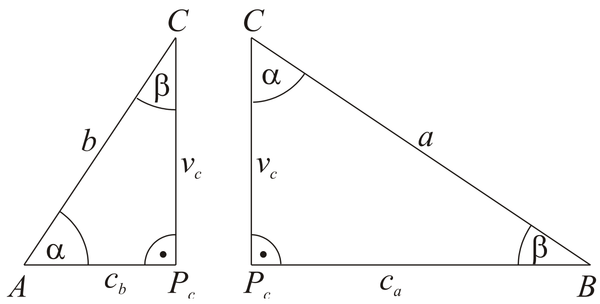
$$a^2 = c \cdot c_a , \quad b^2 = c \cdot c_b$$



Obr. 9.24

Dôkaz tohto tvrdenia vyplýva z toho, že výška v_c rozdelí trojuholník na dva pravouhlé trojuholníky (pozri obr. 1.24 a obr. 1.25), v ktorých sa hodnoty goniometrických funkcií budú rovnať.

$$\frac{c_a}{a} = \cos\beta = \frac{a}{c} \qquad \frac{c_b}{b} = \cos\beta = \frac{b}{c}$$



Obr. 9.25

Euklidova veta o výške

Obsah štvorca zostrojeného nad výškou pravouhlého trojuholníka sa rovná obsahu obdĺžnika, ktorého strany sú úseky na prepone.

$$v_c^2 = c_a \cdot c_b$$

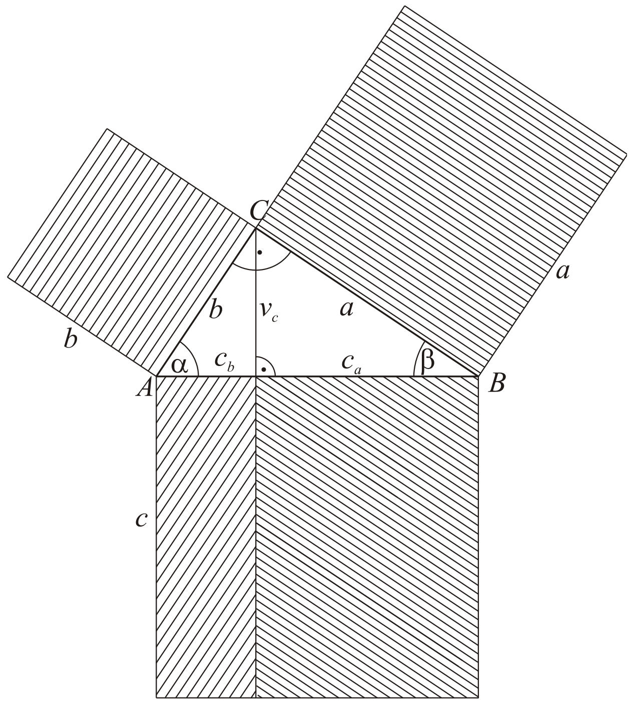
Toto tvrdenie vyplýva podobne ako predošlé z rovnosti hodnôt goniometrických funkcií.

$$\frac{v_c}{c_b} = \mathrm{tg}\alpha = \frac{c_a}{v_c}$$

Pytagorova veta

Obsah štvorca zostrojeného nad preponou pravouhlého trojuholníka sa rovná súčtu obsahov štvorcov zostrojených nad oboma odvesnami.

$$c^2 = a^2 + b^2$$



Obr. 9.26

Dôkaz tohto tvrdenia priamo vyplýva z Euklidových viet.

Vety o zhodnosti trojuholníkov

Dva trojuholníky sú zhodné, ak sa zhodujú vo všetkých odpovedajúcich si stranách a vo všetkých odpovedajúcich si uhloch. Zhodnosť trojuholníkov zapisujeme: $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

Veta sss: **Dva trojuholníky sú zhodné, ak sa zhodujú vo všetkých troch stranách.**

Veta sus: **Dva trojuholníky sú zhodné, ak sa zhodujú v dvoch stranách a v uhle nimi zovretom.**

Veta usu: **Dva trojuholníky sú zhodné, ak sa zhodujú v jednej strane a v dvoch uhloch k nej priľahlých.**

Veta Ssu: **Dva trojuholníky sú zhodné, ak sa zhodujú v dvoch stranách a v uhle oproti väčšej z nich.**

Vety o podobnosti trojuholníkov

Pojem zhodnosti trojuholníkov v sebe zahrňuje rovnaký tvar a rovnakú veľkosť trojuholníkov. Ak vypustíme požiadavku rovnakej veľkosti a ponecháme len rovnaký tvar, potom hovoríme o podobných trojuholníkoch.
Podobnosť trojuholníkov označujeme: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

Veta sss: **Dva trojuholníky sú podobné, ak sa zhodujú v pomeroch dĺžok všetkých troch odpovedajúcich si strán.**

Veta sus: **Dva trojuholníky sú podobné, ak sa zhodujú v pomeroch dĺžok dvoch odpovedajúcich si strán a v uhle nimi zovretom.**

Veta Ssu: **Dva trojuholníky sú podobné, ak sa zhodujú v pomeroch dĺžok dvoch odpovedajúcich si strán a v uhle oproti väčšej z nich.**

Veta uu: **Dva trojuholníky sú podobné, ak sa zhodujú v dvoch uhloch**.

Vety o určenosti trojuholníka

Trojuholník možno zostrojiť, ak poznáme aspoň tri vhodne zvolené prvky trojuholníka.

Trojuholník je jednoznačne určený:

a) **dĺžkami jeho troch strán, pre ktoré platí: $|a-b| < c < a+b$ (veta sss);**

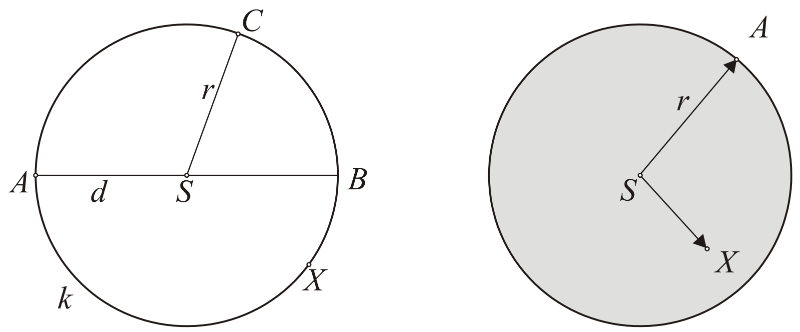
b) **dĺžkami jeho dvoch strán a veľkosťou uhla nimi zovretého (veta sus);**

c) **dĺžkou jednej strany a veľkosťou dvoch uhlov k nej priľahlých, ktorých súčet veľkostí je menší než uhol priamy(veta usu);**

d) **dĺžkami dvoch rôznych strán a veľkosťou uhla oproti väčšej z nich (veta Ssu).**

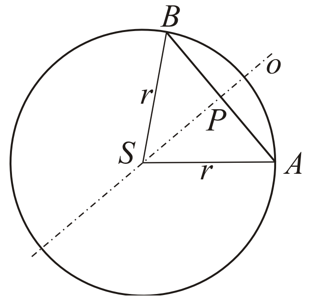
9.3 Kružnica a kružnicový oblúk

Nech S je **stred** a r **polomer kružnice**, potom kružnicu označujeme $k = (S, r)$. Pre všetky body X kružnice platí $|SX| = r$. **Kruh** je množina všetkých bodov X v rovine, pre ktorú platí $|SX| \leq r$. Hranicou kruhu je kružnica s tým istým stredom a polomerom.



Obr. 9.27

Ak je S stredom úsečky AB, kde A, B ležia na kružnici k, potom $|AB| = 2r = d$, nazývame **priemer kružnice**. Ak S nie je stredom úsečky AB, kde A, B ležia na kružnici k, potom úsečku AB nazývame **tetiva kružnice**. Os tetivy prechádza stredom kružnice.



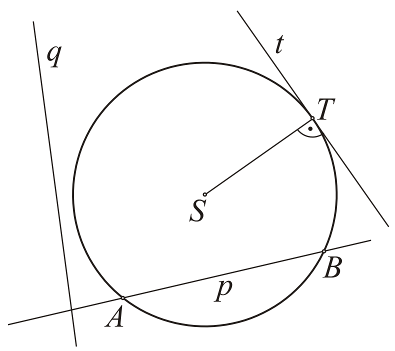
Obr. 9.28

Priamka môže mať s kružnicou tri vzájomné polohy. Na obrázku 9.29 je priamka p **sečnicou kružnice**, priamka t jej **dotyčnicou** a priamka q je **nesečnicou kružnice**.

Dotyčnica ku kružnici je kolmá na polomer v dotykovom bode.

Existujú práve dve dotyčnice prechádzajúce vonkajším bodom kružnice.

Existujú práve dve dotyčnice ku kružnici navzájom rovnobežné.



Obr. 9.29

Dĺžka kružnice (obvod kruhu) $O = 2\pi r = \pi d$

Dĺžka kružnicového oblúka $l = \dfrac{\pi r}{180^\circ} \cdot \alpha^\circ$

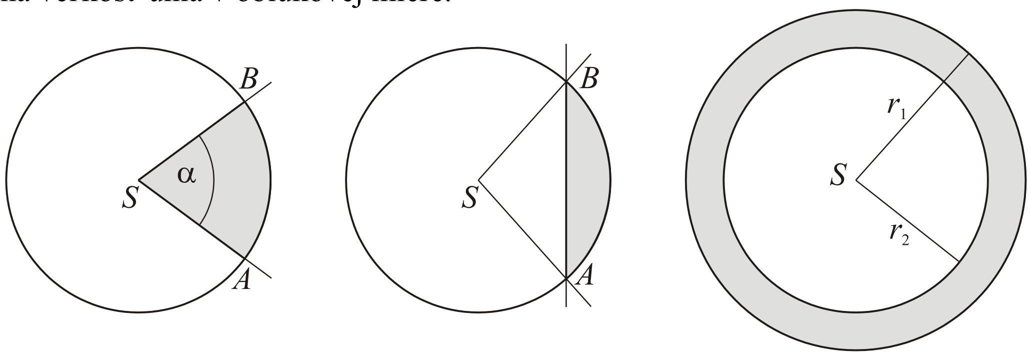
Obsah kruhu $S = \pi r^2$

Obsah kruhového výseku $S = \dfrac{\pi r^2}{360^\circ} \cdot \alpha^\circ$

Obsah kruhového odseku $S = r^2\left(\frac{\pi}{360^\circ}\cdot\alpha^\circ - \frac{1}{2}\sin\alpha\right)$

Obsah medzikružia ($r_1 > r_2$) $S = \pi\cdot(r_1^2 - r_2^2)$

Poznámka. Symbolom α° je označená veľkosť uhla v stupňovej miere a symbolom α je označená veľkosť uhla v oblúkovej miere.



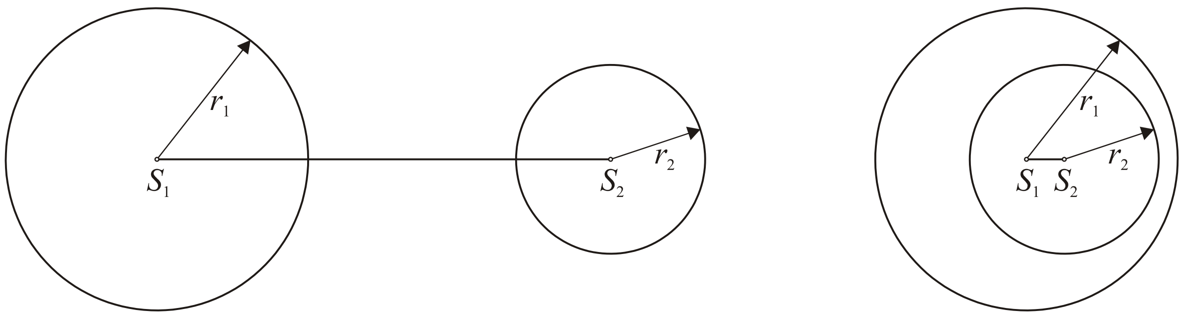
kruhový výsek kruhový odsek medzikružie

Obr. 9.30

Vzájomná poloha dvoch kružníc

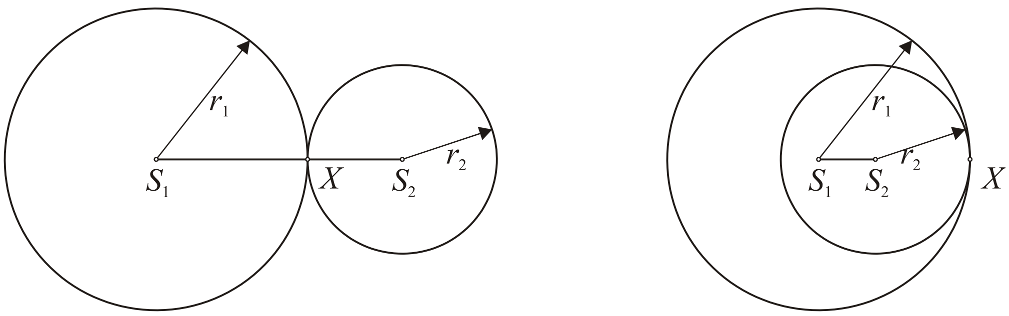
Nech $k_1 = (S_1, r_1)$ a $k_2 = (S_2, r_2)$ sú dve kružnice, pričom $r_1 > r_2$. Potom kružnice k_1 a k_2 majú práve jednu z troch nasledujúcich vzájomných polôh:

a) Ak $r_1 + r_2 < |S_1S_2|$, tak kružnice ležia mimo seba (obr. 9.30 vľavo), ak $r_1 - r_2 > |S_1S_2|$, tak jedna kružnica leží vo vnútri druhej (obr. 9.30 vpravo), k_1 a k_2 nemajú spoločný bod.



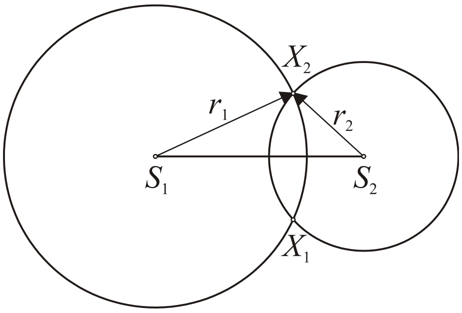
Obr. 9.31

b) Ak $r_1 + r_2 = |S_1S_2|$ alebo $r_1 - r_2 = |S_1S_2|$, tak majú kružnice spoločný práve jeden bod. V prvom prípade hovoríme o vonkajšom dotyku, v druhom o vnútornom dotyku.



Obr. 9.32

c) Ak $r_1 - r_2 < |S_1S_2| < r_1 + r_2$, tak majú kružnice spoločné práve dva rôzne body.



Obr. 9.33

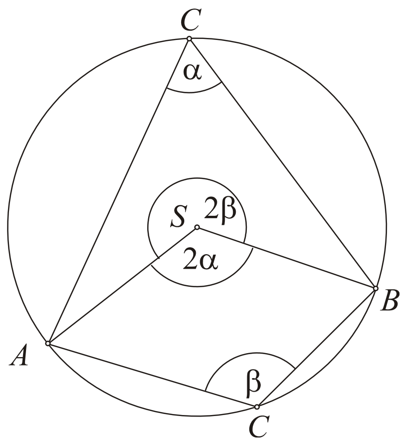
Priamku S_1S_2 nazývame **os kružníc**.

Uhly v kružnici

Zvoľme na kružnici $k = (S, r)$ dva rôzne body A a B. Uhly $\sphericalangle ASB$ a $\sphericalangle BSA$ nazývame **stredové** (pozri obr. 9.34). Body A, B kružnicu rozdeľujú na dva oblúky – väčší a menší (v špeciálnom prípade rovnako veľké). Zvoľme na kružnici ľubovoľný bod $C \neq A, B$. Uhol $\sphericalangle ACB$ nazývame **obvodový**.

Ak leží bod *C* na väčšom oblúku, potom sa veľkosť uhla *ACB* rovná polovici veľkosti menšieho z uhlov *ASB* alebo *BSA*.

Ak leží bod *C* na menšom oblúku, potom sa veľkosť uhla *ACB* rovná polovici veľkosti väčšieho z uhlov *ASB* alebo *BSA*.



Obr. 9.34

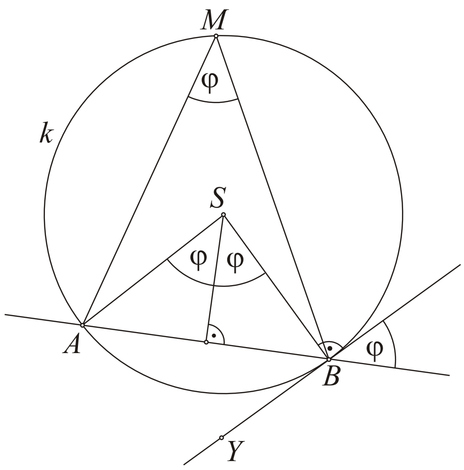
Všetky obvodové uhly prislúchajúce k tomu istému oblúku sú zhodné.

Obvodový uhol prislúchajúci k väčšiemu oblúku je tupý.

Obvodový uhol prislúchajúci k menšiemu oblúku je ostrý.

Úsekový uhol (prislúchajúci k oblúku AB) je konvexný uhol, ktorého jedno rameno je na priamke AB a druhé leží na dotyčnici v bode A, resp. v bode B, pričom oblúk AB leží v tomto uhle (pozri $\sphericalangle \varphi$ obr. 9.35).

Úsekový uhol prislúchajúci k danému oblúku je zhodný s obvodovými uhlami prislúchajúcimi k tomu istému oblúku.



Obr. 9.35

K danému oblúku *AB* prislúcha jediný stredový uhol, nekonečne veľa obvodových uhlov a dvojica úsekových uhlov.

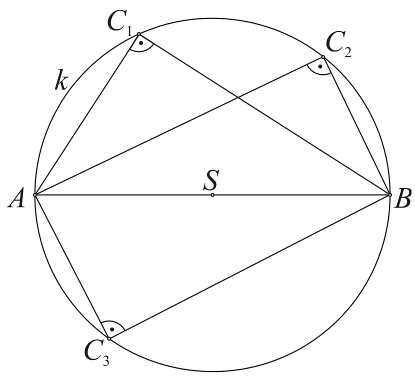
Ak body *A*, *B* sú krajnými bodmi priemeru kružnice, potom platí:

Všetky obvodové uhly zostrojené v kružnici nad priemerom sú pravé.

Z predošlého tvrdenia vyplýva **Talesova veta**:

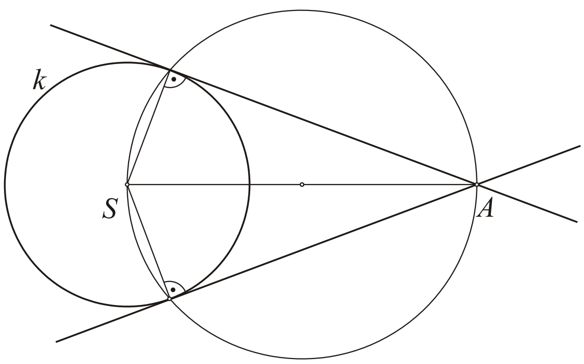
Množina vrcholov pravých uhlov všetkých pravouhlých trojuholníkov *ABC* s preponou *AB* je kružnica *k* s priemerom *AB* okrem bodov *A, B*.

Každú kružnicu *k* (pozri obr. 9.36) **s touto vlastnosťou nazývame *Talesova kružnica*.**



Obr. 9.36

Poznámka. Talesovu kružnicu používame pri konštrukcii dotyčníc z vonkajšieho bodu.



Obr. 9.37

9.4 Množiny bodov danej vlastnosti v rovine

Množina bodov danej vlastnosti V je množina $\mathcal{M}$ všetkých bodov roviny ρ, ktoré spĺňajú tieto dve požiadavky:

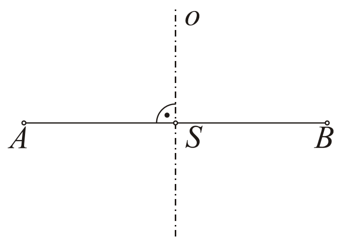
a) každý bod množiny $\mathcal{M}$ má požadovanú vlastnosť V,

b) každý bod roviny ρ, ktorý má vlastnosť V, patrí množine $\mathcal{M}$, resp. každý bod roviny ρ, ktorý nepatrí množine $\mathcal{M}$, nemá vlastnosť V.

Vlastnosť V sa nazýva **charakteristická vlastnosť** bodov tejto množiny.

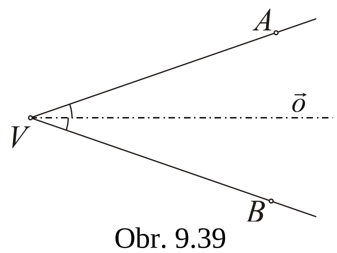
Uvedieme príklady niektorých jednoduchých množín bodov danej vlastnosti, ktoré sa často objavujú pri riešení planimetrických konštrukčných úloh:

- množina všetkých bodov v rovine ρ, ktoré majú od daného bodu S vzdialenosť r, je **kružnica** $k = (S, r)$, t. j. $\mathcal{M} = \{X \in \rho;\ |SX| = r\}$,
- množina všetkých bodov v rovine ρ, ktorých vzdialenosť od bodu S je menšia alebo rovná r, je **kruh** $K = (S, r)$, t. j. $\mathcal{M} = \{X \in \rho;\ |SX| \leq r\}$,
- množina všetkých bodov v rovine ρ, ktoré majú od bodov A, B tú istú vzdialenosť, je priamka o; túto priamku nazývame **os úsečky** AB, t. j. $\mathcal{M} = \{X \in \rho;\ |AX| = |BX|\}$, os o prechádza stredom úsečky AB a je na úsečku AB kolmá,



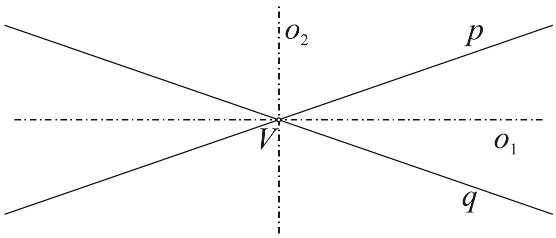
Obr. 9.38

- množina všetkých bodov uhla AVB, ktoré majú od polpriamok VA a VB rovnaké vzdialenosti, je polpriamka $\vec{o}$; túto polpriamku nazývame **os konvexného uhla** AVB, polpriamka $\vec{o}$ patrí uhlu AVB, t. j. $\mathcal{M} = \{X \in \sphericalangle AVB;\ |X, \overrightarrow{VA}| = |X, \overrightarrow{VB}|\}$,



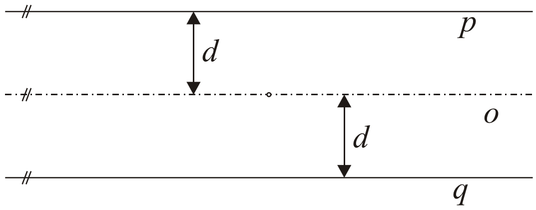
Obr. 9.39

- množina všetkých bodov v rovine $\rho = (p, q)$, ktoré majú od daných rôznobežiek p, q rovnaké vzdialenosti, je zjednotenie osí všetkých štyroch konvexných uhlov určených týmito rôznobežkami; hovoríme im **osi uhlov dvoch rôznobežiek**, tieto osi o_1 a o_2 tvoria dvojicu na seba kolmých priamok, t. j. $\mathcal{M} = \{X \in \rho;\ |X, p| = |X, q|\}$, kde $\mathcal{M} = o_1 \cup o_2$,



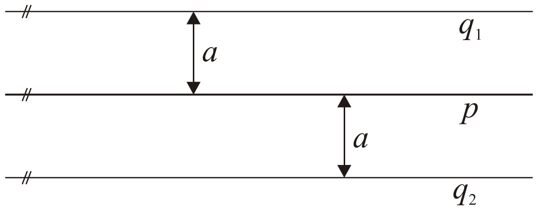
Obr. 9.40

- množina všetkých bodov v rovine $\rho = (p, q)$, ktoré majú od daných rovnobežiek p, q rovnaké vzdialenosti, je priamka o; túto priamku nazývame **os rovinného pásu** určeného priamkami p, q, os o je rovnobežná s p aj q, t. j. $\mathcal{M} = \{X \in \rho;\ |X, p| = |X, q|\}$,



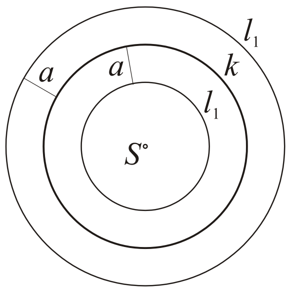
Obr. 9.41

- množina všetkých bodov v rovine ρ, ktoré majú od danej priamky p vzdialenosť a, je dvojica rovnobežiek s priamkou p, ktorých vzdialenosť je $2a$; tieto priamky sa nazývajú **ekvidištanty priamky** p, t. j. $\mathcal{M} = \{X \in \rho;\ |X, p| = a\}$, kde $\mathcal{M} = q_1 \cup q_2$,



Obr. 9.42

- množina všetkých bodov v rovine ρ, ktoré majú od danej kružnice $k = (S, r)$ vzdialenosť a, pričom $r > a$, je dvojica kružníc l_1, l_2 sústredných s kružnicou k s polomermi $r - a$ a $r + a$; kružnice l_1, l_2 nazývame **ekvidištanty kružnice** k, t. j. $\mathcal{M} = \{X \in \rho;\ |X, k| = a\}$, kde $\mathcal{M} = l_1 \cup l_2$,



Obr. 9.43

- množina vrcholov všetkých pravých uhlov v rovine ρ, ktorých ramená prechádzajú dvoma rôznymi bodmi A, B roviny ρ, je **Talesova kružnica** s priemerom AB okrem bodov A, B;

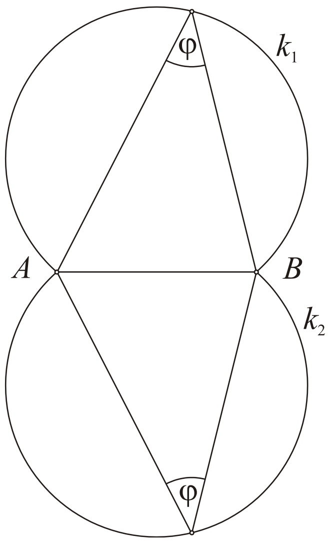
Túto množinu bodov môžeme určiť aj takouto definíciou:

množina všetkých bodov v rovine ρ, z ktorých je možné úsečku AB roviny ρ vidieť pod pravým uhlom, je **Talesova kružnica** s priemerom AB okrem bodov A, B, t. j. $\mathcal{M} = \{X \in \rho;$ $|\sphericalangle AVB| = 90^\circ\}$, teda $\mathcal{M} = \{k = (S, \frac{|AB|}{2}) - \{A, B\}\}$, kde S je stred úsečky AB.

- množina vrcholov X všetkých uhlov v rovine ρ, ktorých ramená prechádzajú dvoma rôznymi bodmi A, B roviny ρ a ktorých $|\sphericalangle AXB| = \varphi$, je **zjednotenie dvoch zhodných oblúkov** k_1, k_2 s krajnými bodmi A, B okrem bodov A, B; pritom konvexný uhol s veľkosťou φ nie je nulový, priamy ani plný,

Iná definícia tejto množiny bodov je nasledovná:

množina všetkých bodov X v rovine ρ, z ktorých je možné úsečku AB roviny ρ vidieť pod uhlom s veľkosťou φ, je **zjednotenie dvoch zhodných oblúkov** k_1, k_2 s krajnými bodmi A, B okrem bodov A, B; t. j. $\mathcal{M} = \{X \in \rho;$ $|\sphericalangle AVB| = \varphi\}$, teda $\mathcal{M} = k_1 \cup k_2 - \{A, B\}$.



Obr. 9.44

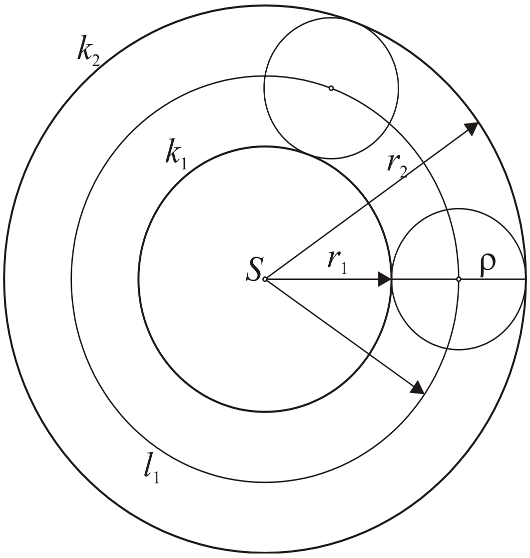
Poznámka. Množinami bodov danej vlastnosti môžu byť priamky, kružnice, podmnožiny priamok a kružníc, môže sa dokonca jednať o množinu izolovaných bodov alebo aj o prázdnu množinu.

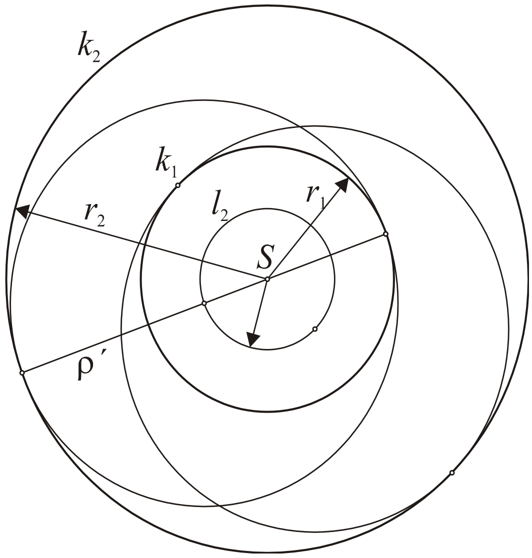
Poznámka. V geometrických úlohách sa množiny všetkých bodov danej vlastnosti vyskytujú veľmi často. Napríklad bod hľadáme v prieniku dvoch množín s danými vlastnosťami (v prieniku dvoch priamok, dvoch kružníc, priamky a kružnice).

Množiny bodov uvedené v predošlom texte sú v mnohých prípadoch stotožnené s množinami stredov kružníc.

- množina stredov všetkých kružníc, ktoré prechádzajú dvomi rôznymi bodmi A, B, je **os úsečky** AB,
- množina stredov všetkých kružníc, ktoré sa dotýkajú dvoch rovnobežných priamok p, q, je **os rovinného pásu** určeného týmito rovnobežkami, polomer r všetkých takýchto kružníc je $\frac{|a, b|}{2}$,

- množina stredov všetkých kružníc, ktoré sa dotýkajú dvoch rôznobežných priamok *p, q*, sú obe **osi o_1, o_2 uhlov**, ktoré sú určené týmito rôznobežkami, s výnimkou ich priesečníka,
- množina stredov všetkých kružníc, ktoré majú daný polomer *r* a dotýkajú sa danej priamky *p*, sú obe **ekvidištanty priamky** *p*,
- množina stredov všetkých kružníc, ktoré majú daný polomer *r* a dotýkajú sa danej kružnice $k = (S, r)$, sú obe **ekvidištanty kružnice** $k = (S, r)$,
- množina stredov všetkých kružníc, ktoré sa dotýkajú priamky *a* v bode *A*, je **priamka** *p* kolmá na priamku *a* a prechádzajúca bodom *A* s výnimkou bodu *A*,
- množina stredov všetkých kružníc, ktoré sa dotýkajú kružnice $k = (S, r)$ v bode *T*, je **priamka** $p = ST$ s výnimkou bodov *S* a *T*,





Obr. 9.45

- množina stredov všetkých kružníc, ktoré sa dotýkajú dvoch sústredných kružníc $k_1 = (S_1, r_1)$ a $k_2 = (S_2, r_2)$ (za predpokladu, že $r_1 < r_2$), sú dve kružnice $l_1 = (S, \frac{r_1 + r_2}{2})$ a $l_2 = (S, \frac{r_2 - r_1}{2})$; kružnice (obr. 9.45 vľavo), ktoré majú stredy na kružnici l_1, majú vonkajší dotyk s k_1 a vnútorný dotyk s k_2 a kružnice (obr. 9.45 vpravo), ktoré majú stredy na kružnici l_2, majú vnútorný dotyk s k_1 aj s k_2.

Kapitola bola spracovaná podľa literatúry [4], [5], [6], [7], [10], [13], [14], [15], [17].

10 Stereometria

Geometrickými útvarmi, ktoré nemožno umiestniť do jednej roviny sa zaoberá časť geometrie zvaná **stereometria**.

10.1 Základné pojmy

Základné vety stereometrie

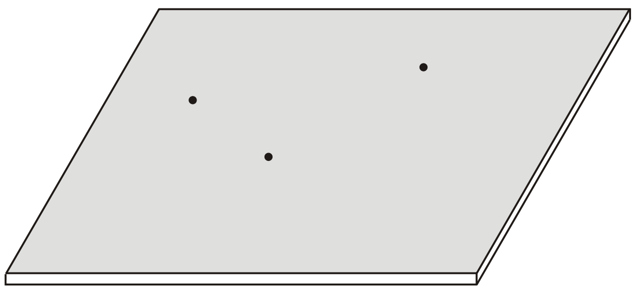
1. Ak bod A leží na priamke p a priamka p leží v rovine β, potom aj bod A leží v rovine β.
2. Ak v rovine β ležia dva rôzne body A,B, potom tiež priamka p, ktorá týmito bodmi prechádza, leží v rovine β.
3. Každými dvoma rôznymi body prechádza práve jedna priamka.
4. Ľubovolná rovina rozdeľuje priestor na dva navzájom opačné polpriestory a je ich spoločnou hraničnou rovinou.
5. Priamkou a bodom, ktorý na nej neleží, prechádza práve jedna rovina.
6. Ak majú dve rôzne roviny spoločný bod, potom majú spoločnú priamku, ktorá týmto bodom prechádza.
7. Ku každej priamke je možné daným bodom viesť práve jednu rovnobežku.

Určenie priamky

Najjednoduchší spôsob, ako jednoznačne určiť priamku je dvoma rôznymi bodmi. Druhý spôsob, ako určiť priamku, je pomocou priamky a bodu, ktorým má prechádzať rovnobežka s danou priamkou. Ak tento bod leží na danej priamke, potom priamka, ktorú určujeme, je totožná s pôvodnou priamkou.

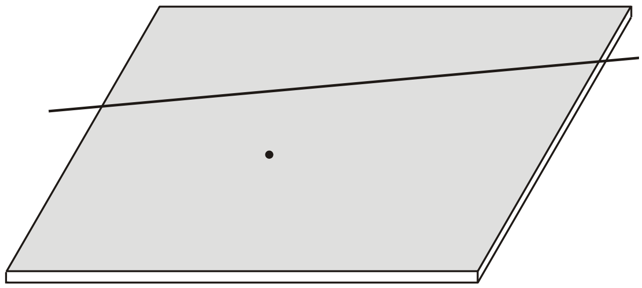
Určenie roviny

Táto kapitola je venovaná možnostiam určenia roviny v priestore. Zaujíma nás, čo všetko je potrebné k jednoznačnému určeniu roviny.



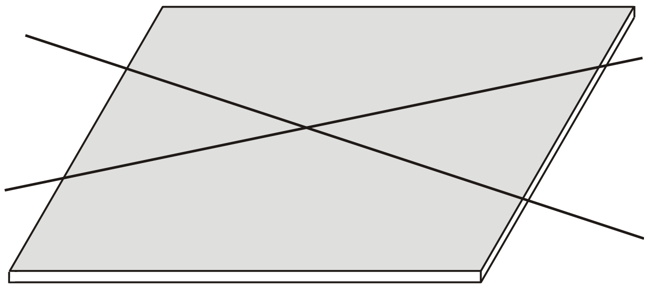
Tromi rôznymi bodmi, ktoré neležia v priamke, prechádza práve jedna rovina.

Obr. 10.1



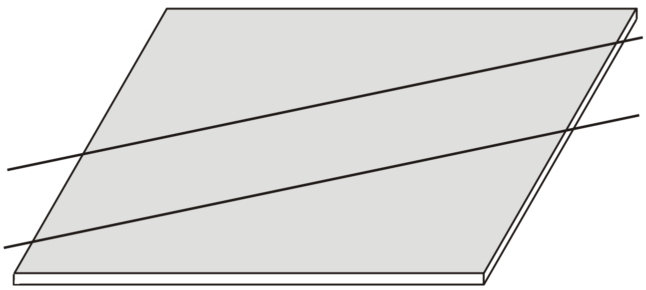
Obr. 10.2

Priamkou a bodom, ktorý na tejto priamke neleží, prechádza práve jedna rovina.



Obr. 10.3

Dvoma rôznobežnými priamkami prechádza práve jedna rovina.



Obr. 10.4

Dvoma rovnobežnými rôznymi priamkami prechádza práve jedna rovina.

Posledné tri prípady určenia roviny môžeme previesť na prvý prípad. Vo všetkých týchto prípadoch môžeme nájsť tri nekolineárne body (neležiace na jednej priamke), ktoré rovinu určujú jednoznačne.

10.2 Vzájomné polohy útvarov v priestore

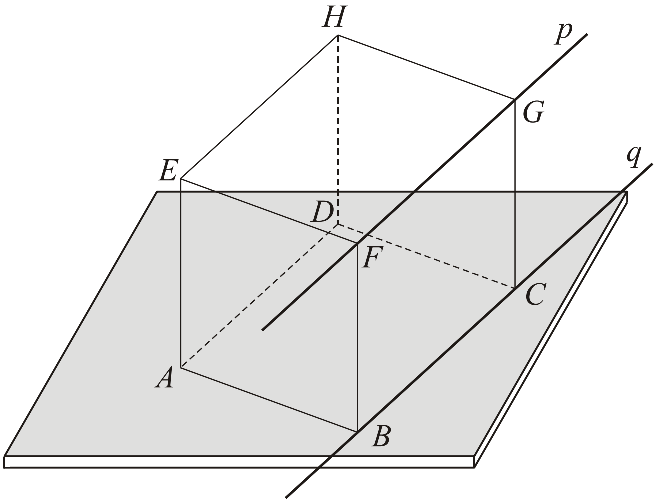
Vzájomná poloha dvoch priamok

V stereometrii rozlišujeme štyri vzájomné polohy dvoch priamok v priestore. Vzájomné polohy dvoch priamok budeme ilustrovať na kocke. Môžeme ich rozlíšiť vzhľadom ku spoločným bodom.

Vzájomná poloha	Spoločné body	Označenie
Rovnobežné rôzne	žiadne	$p \parallel q$
Mimobežné	žiadne	$p \not\times q$
Rôznobežné	jeden	$p \times q$
Totožné	všetky	$p \equiv q$

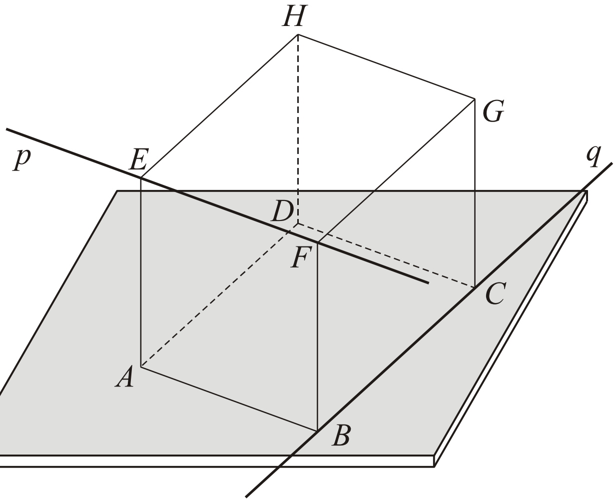
Tab. 10.1

V prvých dvoch prípadoch priamky nemajú spoločný bod. Rozdiel je v tom, či môžeme priamkami preložiť spoločnú rovinu alebo nie. Rovnobežky ležia v jednej rovine, mimobežkami nemôžeme preložiť rovinu, t. j. neexistuje rovina, ktorá by obsahovala dve mimobežné priamky. V treťom prípade sú priamky rôznobežné, teda majú jeden spoločný bod, ktorému hovoríme **priesečník**. Posledným prípadom je totožnosť oboch priamok, teda obe priamky majú všetky body spoločné.



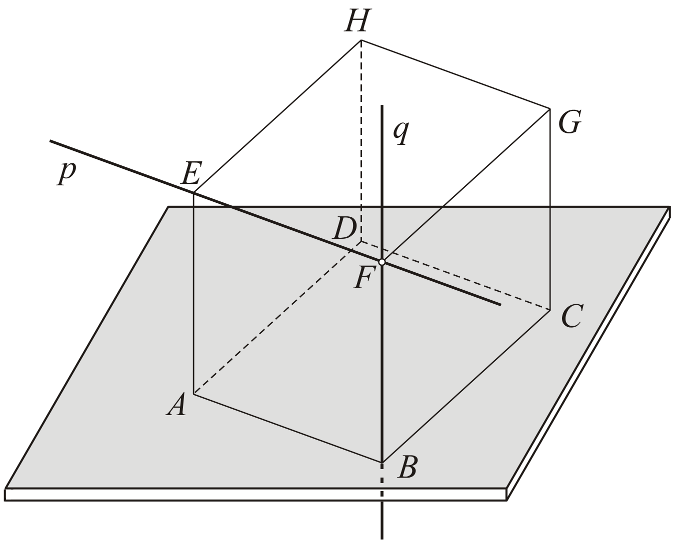
Obr. 10.5

Priamky sú rovnobežné rôzne, nemajú spoločný bod, ležia v jednej rovine.



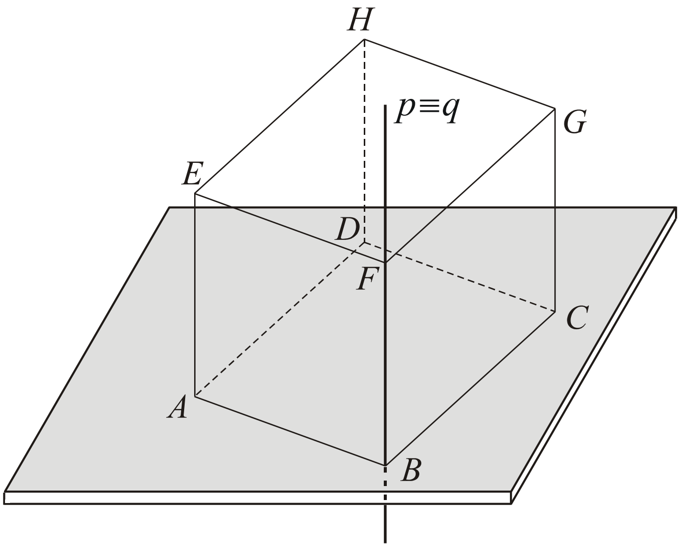
Obr. 10.6

Priamky sú mimobežné, nemajú spoločný bod, neležia v jednej rovine.



Obr. 10.7

Priamky sú rôznobežné, majú jeden spoločný bod, ktorému hovoríme priesečník. Ležia v jednej rovine.



Obr. 10.8

Priamky sú totožné, majú všetky body spoločné.

Vzájomná poloha priamky a roviny

Rozlišujeme tri rôzne vzájomné polohy priamky a roviny. Hovoríme, že ak priamka nemá s rovinou žiadny spoločný bod, potom je priamka s danou rovinou rovnobežná. Ak má priamka s rovinou spoločný práve jeden bod, potom je priamka rôznobežná s rovinou, ich spoločný bod nazývame **priesečníkom**.

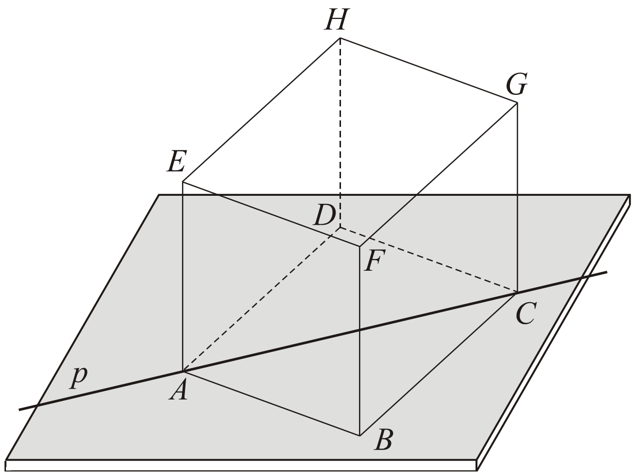
Ak má priamka s rovinou spoločné aspoň dva rôzne body, potom táto priamka leží v danej rovine. **Všetky body priamky sú zároveň aj bodmi roviny.**

Zisťovať a dokazovať rovnobežnosť priamky s rovinou na základe definície je nepraktické, preto zavedieme **kritérium rovnobežnosti priamky a roviny**:

Priamka *p* je rovnobežná s rovinou *α* vtedy a len vtedy, ak rovina *α* obsahuje aspoň jednu priamku *q*, ktorá je s priamkou *p* rovnobežná.

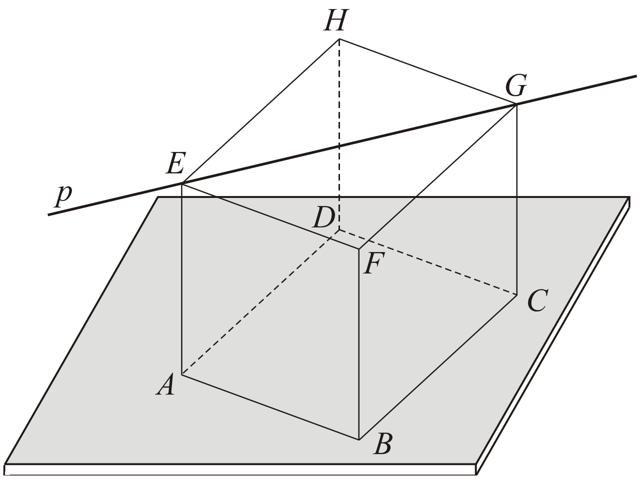
Vzájomná poloha	Spoločné body	Označenie
Priamka leží v rovine	všetky body priamky	$p \subset \alpha$
Rovnobežné rôzne	žiadne	$p \parallel \alpha$
Rôznobežné	jeden	$p \times \alpha$

Tab. 10.2



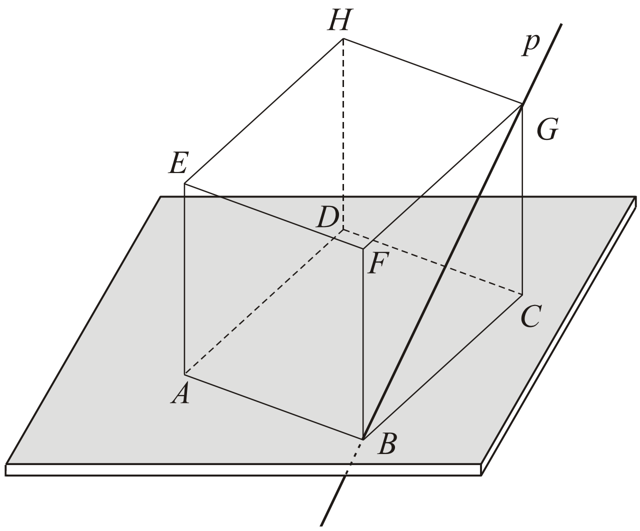
Obr. 10.9

Priamka leží v rovine, má s ňou všetky body spoločné.



Obr. 10.10

Priamka a rovina sú rovnobežné. Priamka je rovnobežná s rovinou, ak je rovnobežná s aspoň jednou jej priamkou tejto roviny (napr. *EG*).



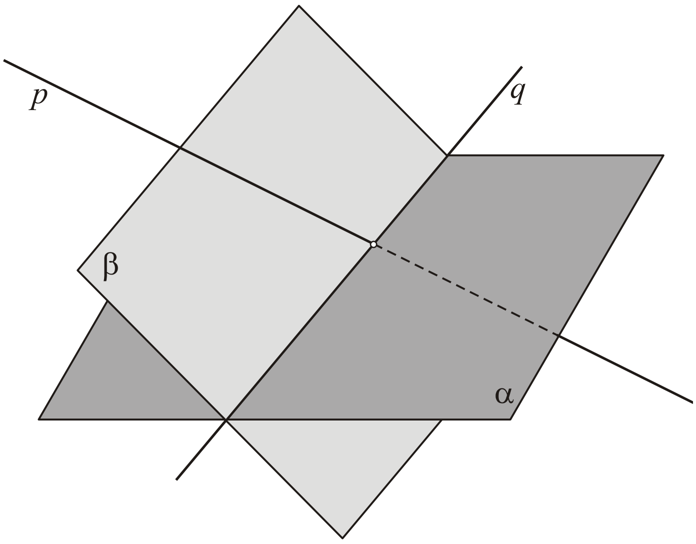
Priamka a rovina sú rôznobežné, majú jeden spoločný bod, ktorý nazývame priesečník.

Obr. 10.11

Prienik priamky s rovinou

V prípade rôznobežnosti priamky p a roviny α potrebujeme nájsť priesečník, t. j. určiť prienik priamky s rovinou. Pre nájdenie priesečníka sa využíva nasledujúci postup:

1. priamku p obsahuje nekonečne veľa rovín; jednu z nich nazveme pomocná rovina a označíme β (β je rôznobežná s α),
2. zostrojíme prienik roviny α s rovinou β; prienikom je priamka q,
3. prienik priamky p s priamkou q je potom hľadaným prienikom priamky p a roviny α.



Obr. 10.12

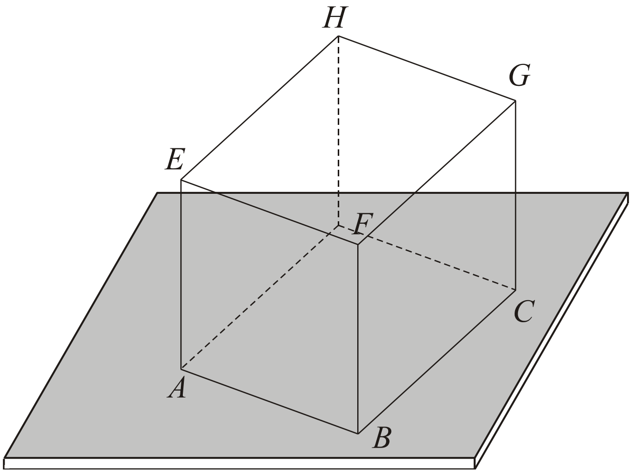
Vzájomná poloha dvoch rovín

Rozlišujeme tri rôzne vzájomné polohy dvoch rovín. Ak majú dve roviny všetky body spoločné, nazývame ich totožné. Ak nemajú dve roviny žiadne spoločné body, potom ich nazývame rôzne rovnobežné. Ak majú roviny spoločnú priamku, nazývame ich rôznobežné.

Ak majú dve rôzne roviny spoločný bod, potom majú aj spoločnú priamku, ktorá týmto bodom prechádza, okrem tejto priamky nemajú žiadne ďalšie spoločné body. Spoločnú priamku *p* dvoch rôznobežných rovín nazývame **priesečnica**.

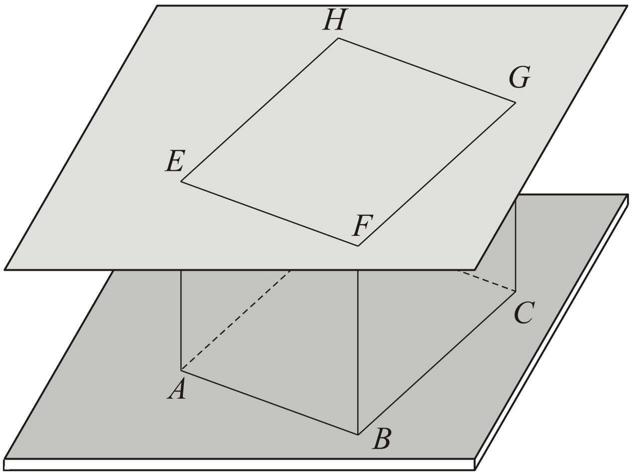
Kritérium rovnobežnosti dvoch rovín

Dve roviny sú rovnobežné práve vtedy, keď jedna z nich obsahuje dve rôznobežné priamky, ktoré sú s druhou rovinou rovnobežné.



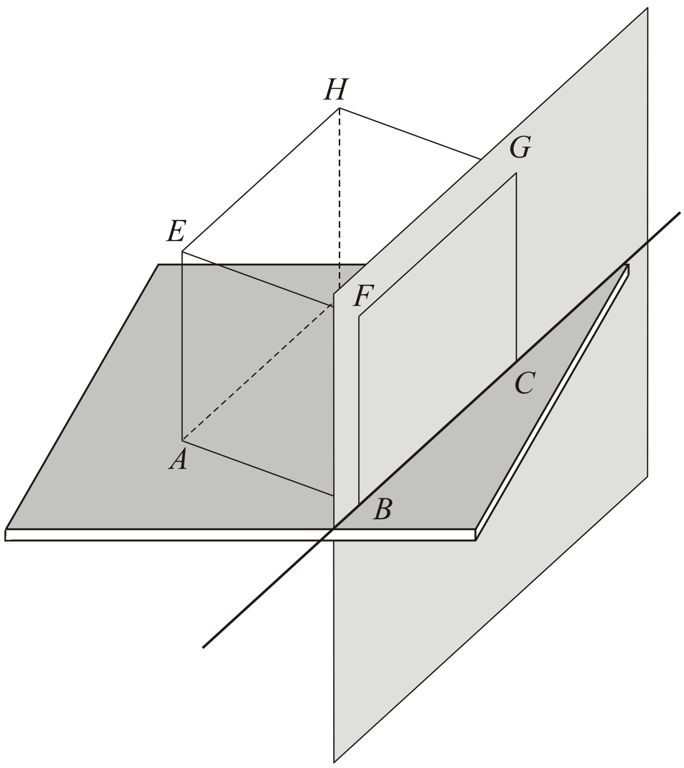
Obr. 10.13

Roviny totožné, majú teda všetky body spoločné (napr. sú totožné s rovinou dolnej podstavy kocky).



Obr. 10.14

Roviny sú rovnobežné rôzne, teda nemajú žiadny spoločný bod (napr. *ABC* a *EFG*).



Roviny sú rôznobežné, majú spoločnú priesečnicu, priamku spoločných bodov.

Obr. 10.15

Vzájomná poloha	**Spoločné body**	**Označenie**
Totožné	všetky	$\alpha \equiv \beta$
Rovnobežné rôzne	žiadne	$\alpha \parallel \beta$
Rôznobežné	priamka spoločných bodov	$\alpha \times \beta$

Tab. 10.3

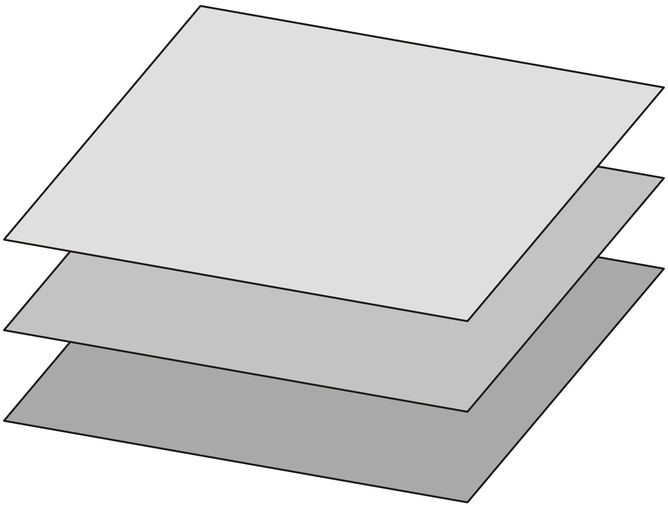
Vzájomná poloha troch rovín

Rozlišujeme päť rôznych vzájomných polôh troch rovín, pokiaľ nie sú žiadne dve totožné.

Pre tri roviny α, β, γ platí: ak je $\alpha \parallel \beta$ a súčasne $\beta \parallel \gamma$, potom aj $\alpha \parallel \gamma$ (*tranzitívnosť*).

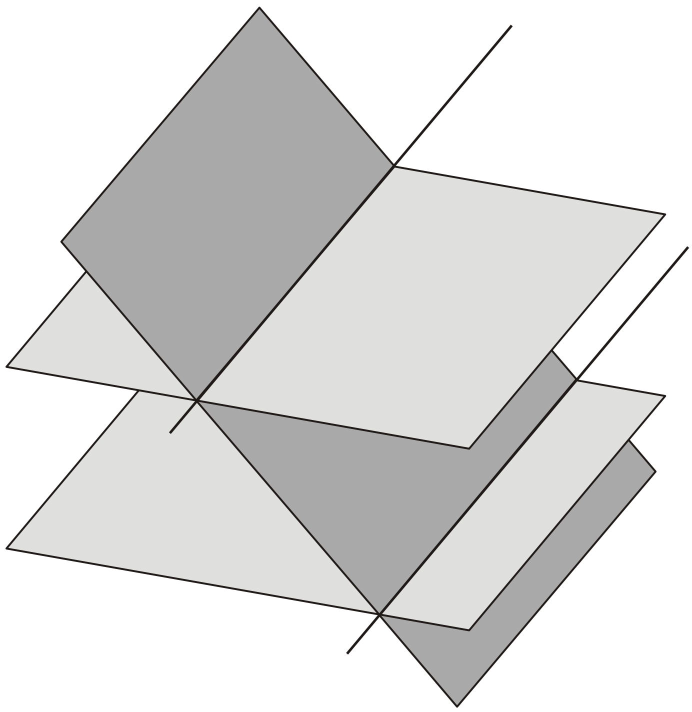
Vzájomná poloha	**Množina spoločných bodov**	**Označenie**
Všetky tri rovnobežné	žiadne	$(\alpha \parallel \beta) \wedge (\beta \parallel \gamma)$
Dve rovnobežné a tretia s nimi rôznobežná	dve rovnobežky (jedna rovina má s oboma ďalšími rôzne priesečnice)	$(\alpha \parallel \beta) \wedge (\alpha \not\parallel \beta) \wedge (\beta \not\parallel \gamma)$
Všetky tri rôznobežné, tri priesečnice splynú v jednu priamku (zväzok rovín)	jedna priamka	$(\alpha \not\parallel \beta) \wedge (\alpha \not\parallel \gamma) \wedge (\beta \not\parallel \gamma)$
Všetky tri rôznobežné, tri priesečnice	tri rovnobežky (každé dve roviny majú jednu priesečnicu)	$(\alpha \not\parallel \beta) \wedge (\alpha \not\parallel \gamma) \wedge (\beta \not\parallel \gamma)$
Všetky tri rôznobežné, tri priesečnice prechádzajúce jediným bodom (trs rovín)	jeden bod	$(\alpha \not\parallel \beta) \wedge (\alpha \not\parallel \gamma) \wedge (\beta \not\parallel \gamma)$

Tab. 10.4



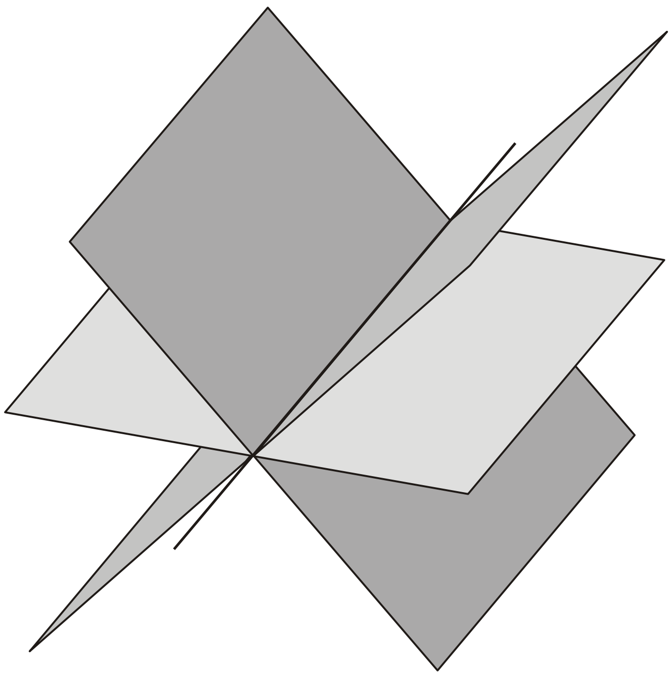
Obr. 10.16

Všetky tri roviny sú rovnobežné rôzne, teda nemajú žiadny spoločný bod.



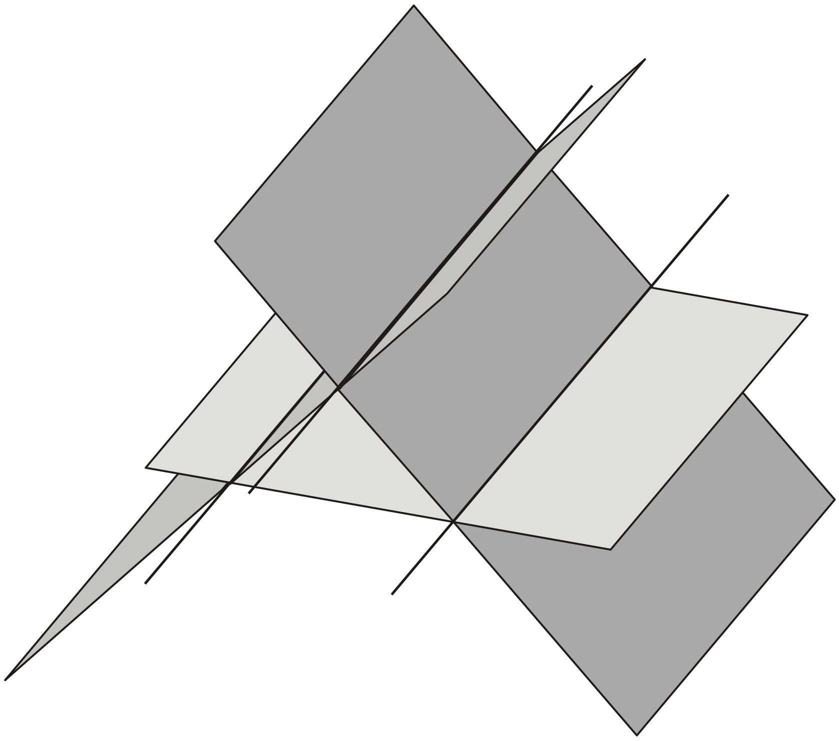
Dve roviny sú rovnobežné a tretia rovina ich pretína. Dve priamky, ktoré ležia v prieniku sú navzájom rovnobežné.

Obr. 10.17



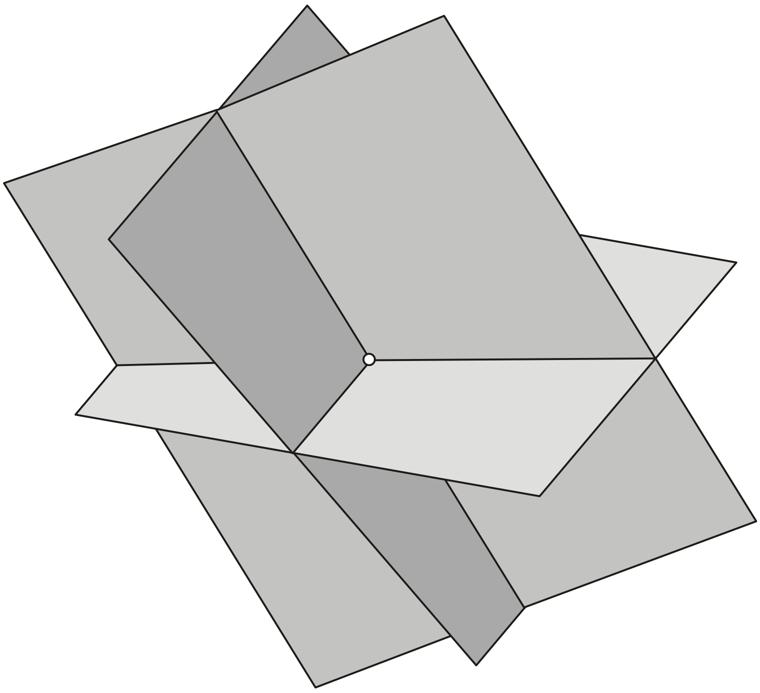
Tri roviny, ktorých spoločná priesečnica je jedna priamka.

Obr. 10.18



Všetky roviny sú navzájom rôznobežné, v prieniku každých dvoch rovín je priamka a naviac všetky tri priamky sú navzájom rovnobežné.

Obr. 10.19



Všetky tri roviny majú spoločný jeden bod.

Obr. 10.20

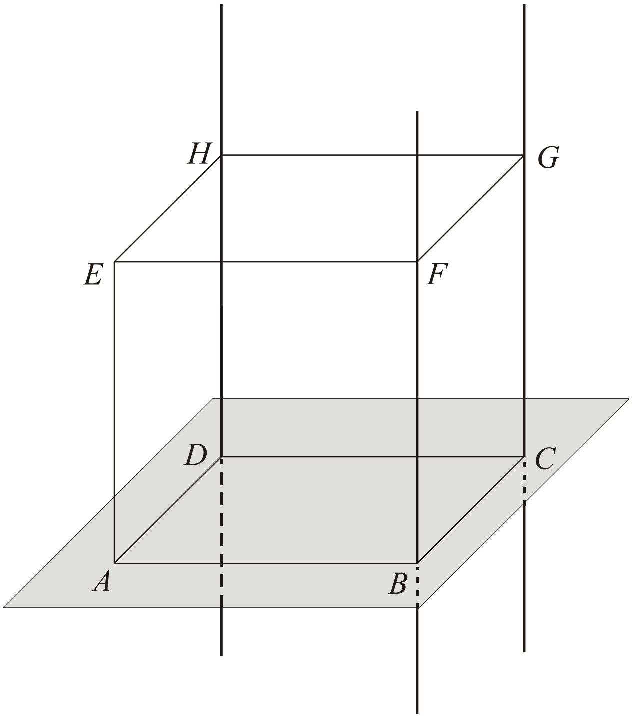
Vzájomná poloha troch priamok

Aby sme mali kapitolu o vzájomných polohách základných geometrických útvarov kompletnú, pridáme ešte vzájomné polohy troch priamok, napriek tomu, že v stredoškolských učebniciach sa obvykle táto kapitola nevyskytuje. Rozlišujeme deväť vzájomných polôh troch priamok v priestore. Polohy, ktoré by sme mohli tiež rozlišovať, sú tie, kedy sú dve priamky totožné alebo všetky tri priamky sú totožné. Tieto prípady sú však obsiahnuté v časti – vzájomná poloha dvoch priamok.

Pre tri priamky *p, q, r* platí: ak je *p* || *q* a súčasne *q* || *r*, potom aj *p* || *r* (*tranzitívnosť*).

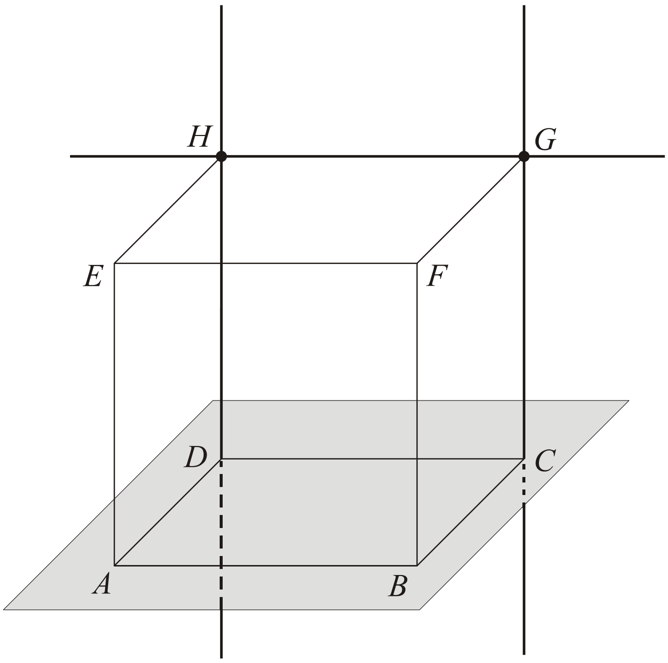
Vzájomná poloha	**Množina spoločných bodov**	**Označenie**
Všetky tri rovnobežné rôzne	žiadne	$(p \parallel q) \wedge (q \parallel r)$
Dve rovnobežné rôzne, tretia s oboma rôznobežná	dva	$(p \parallel q) \wedge (p \times r) \wedge (q \times r)$
Dve rovnobežné rôzne, tretia s jednou rôznobežná a s druhou mimobežná	jeden	$(p \parallel q) \wedge (p \times r) \wedge (q \mathbin{\dot\times} r)$
Dve rovnobežné rôzne, tretia s oboma mimobežná	žiadne	$(p \parallel q) \wedge (p \mathbin{\dot\times} r) \wedge (q \mathbin{\dot\times} r)$
Všetky tri rôznobežné (pokiaľ ležia v jednej rovine hovoríme o zväzku, pokiaľ neležia, potom o trse priamok)	jeden	$(p \times q) \wedge (p \times r) \wedge (q \times r)$
Všetky tri rôznobežné, každé dve majú jeden priesečník	tri	$(p \times q) \wedge (p \times r) \wedge (q \times r)$
Dve rôznobežné, tretia s oboma mimobežná	jeden	$(p \times q) \wedge (p \mathbin{\dot\times} r) \wedge (q \mathbin{\dot\times} r)$
Všetky po dvoch mimobežné	žiadne	$(p \mathbin{\dot\times} q) \wedge (p \mathbin{\dot\times} r) \wedge (q \mathbin{\dot\times} r)$
Dve mimobežné, tretia s oboma rôznobežná	dva	$(p \mathbin{\dot\times} q) \wedge (p \times r) \wedge (q \times r)$

Tab. 10.5



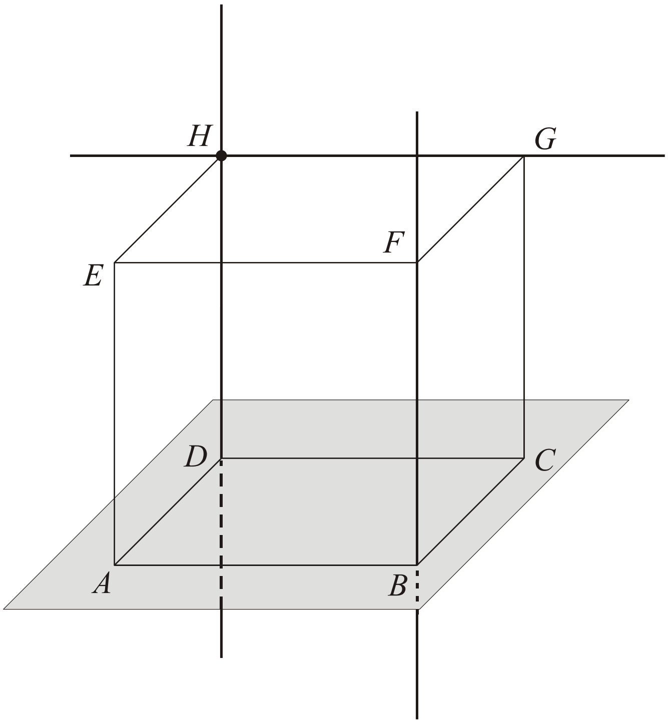
Obr. 10.21

Všetky tri priamky sú rovnobežné, nemajú žiadny spoločný bod.



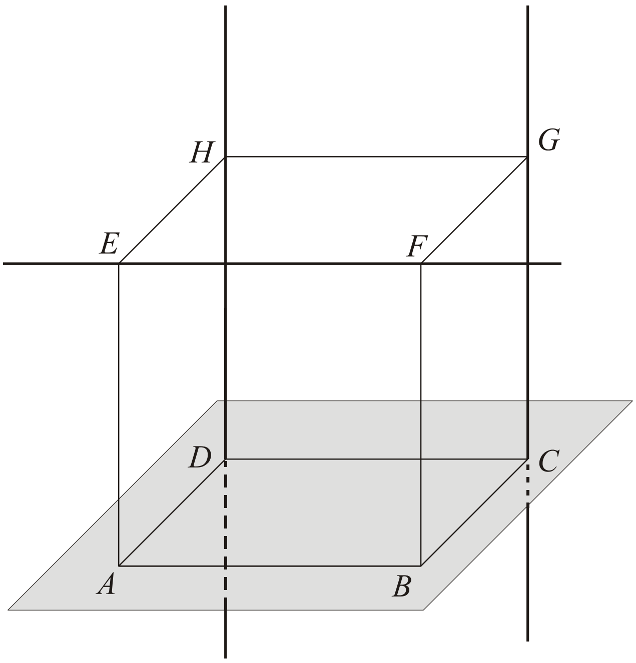
Obr. 10.22

Dve priamky sú rovnobežné a tretia ich pretína, dva priesečníky.



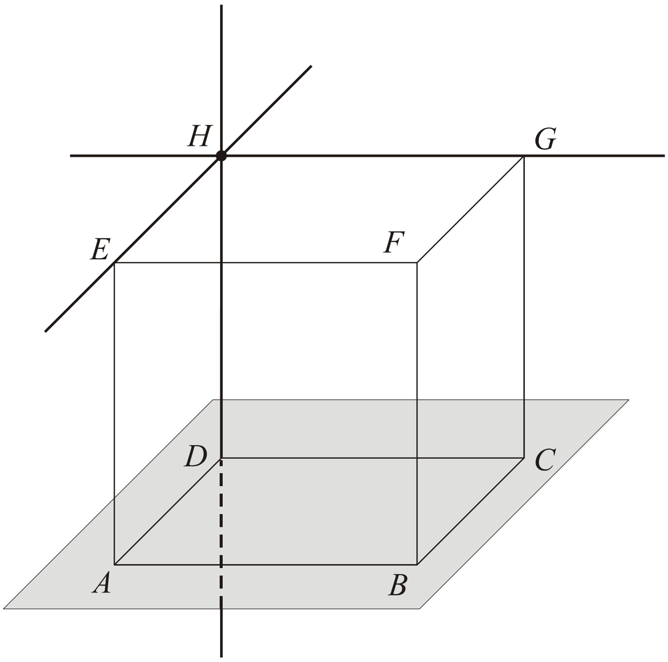
Obr. 10.23

Dve priamky sú rovnobežné rôzne, tretia je s jednou rôznobežná a s druhou mimobežná.



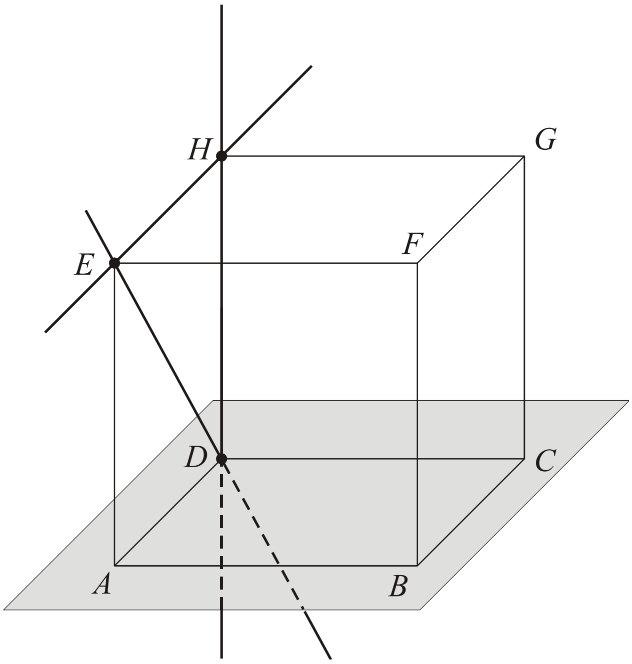
Obr. 10.24

Dve priamky sú rovnobežné a tretia je s oboma mimobežná.



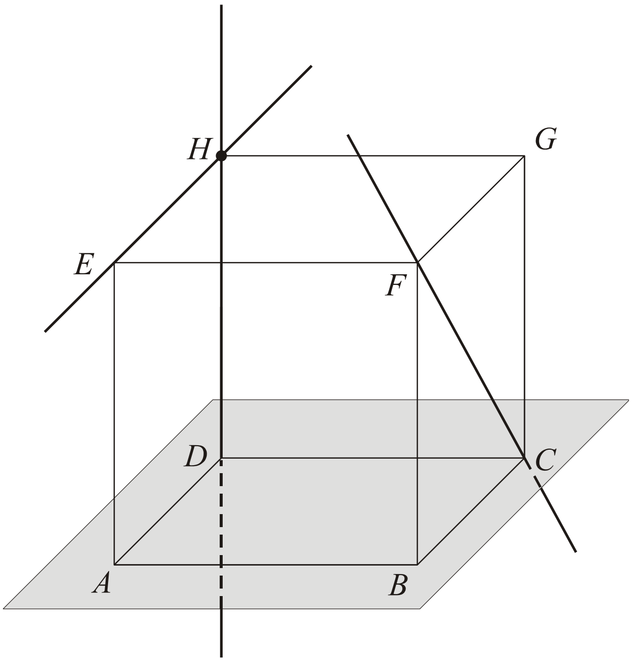
Obr. 10.25

Všetky tri priamky sa pretínajú v jednom jedinom bode.



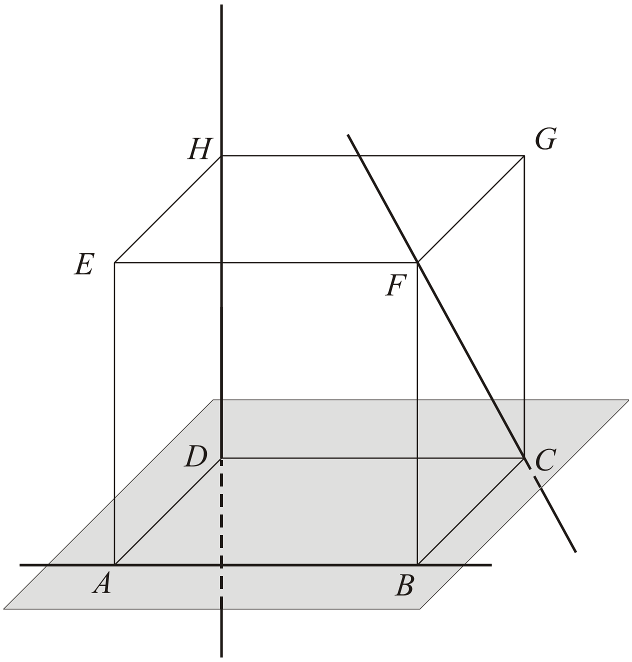
Obr. 10.26

Všetky priamky sú navzájom rôznobežné a to tak, že existujú tri priesečníky.



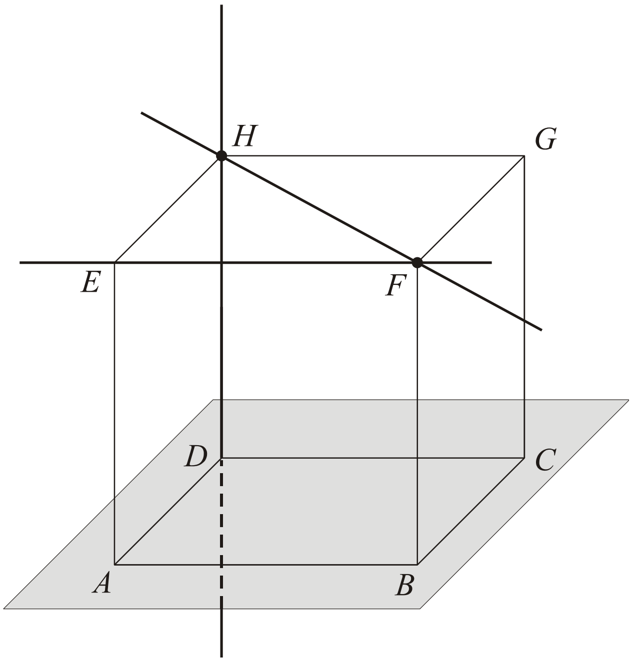
Obr. 10.27

Dve priamky sa pretínajú v jednom bode a tretia priamka je k obom mimobežná.



Obr. 10.28

Všetky tri priamky sú po dvoch mimobežné, nemajú žiadny spoločný bod.



Dve priamky sú mimobežné a tretia priamka ich pretína. Existujú teda dva priesečníky.

Obr. 10.29

10.3 Polohové konštrukčné úlohy

Rezy mnohostenov

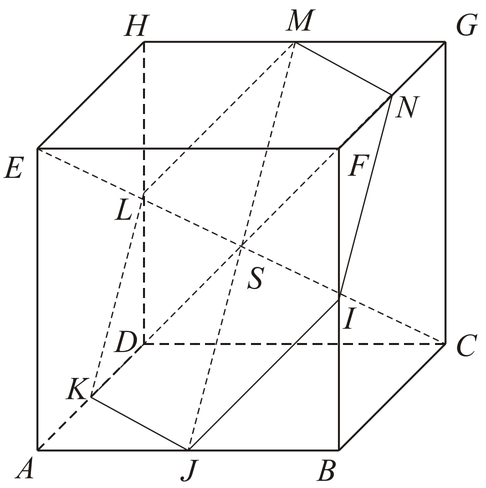
Rez mnohostenu rovinou je prienik telesa a roviny. Je to rovinný útvar, ktorého hranica je prienik hranice telesa a roviny rezu. Hranica rezu telesa sa skladá z prienikov roviny rezu so stenami telesa. Zostrojiť rez rovinou teda znamená zostrojiť priesečnice danej roviny s rovinami jednotlivých stien.

Pre konštrukcie rezov sú dôležité najmä nasledujúce vety a ich dôsledky:

- *Veta 1*: **Ak ležia dva rôzne body v rovine, potom priamka nimi určená leží tiež v tejto rovine.**
- *Veta 2*: **Dve rovnobežné roviny pretína tretia rovina v dvoch rovnobežných priamkach.**
- *Veta 3*: **Ak sú každé dve z troch rovín rôznobežné a ak majú tieto tri roviny jediný spoločný bod, prechádzajú týmto spoločným bodom všetky tri priesečnice.**
- *Veta 4*: **Ak je priamka rovnobežná s dvoma rôznobežnými rovinami, tak je rovnobežná aj s ich priesečnicou.**
- *Dôsledok 1*: **Ak ležia dva rôzne body roviny rezu v rovine niektorej steny, leží v rovine tejto steny aj ich spojnica. Prienik spojnice a steny je jednou stranou rezu.**
- *Dôsledok 2*: **Ak sú roviny dvoch stien rovnobežné a pritom rôznobežné s rovinou rezu, sú priesečnice roviny rezu s rovinami týchto stien rovnobežné.**
- *Dôsledok 3*: **Priesečnice roviny rezu s rovinami dvoch susedných stien telesa sa pretínajú v bode, ktorý leží na priesečnici rovín týchto dvoch stien. (t. j. všetky tri roviny – rovina rezu a dve roviny susedných stien sa pretínajú v jednom bode).**

Príklad. Zostrojte rez kocky rovinou súmernosti jej telesovej uhlopriečky. Dokážte, že rez je pravidelný šesťuholník.

Riešenie.



Obr. 10.30

Máme zostrojiť rez kocky *ABCDEFGH* rovinou, ktorá je kolmá na telesovú uhlopriečku (napr. *EC*) a prechádza jej stredom *S*. Označme *I* stred úsečky *BF*, *J* stred úsečky *AB*, *K* stred úsečky *AD*, *L* stred úsečky *DH*, *M* stred úsečky *HG*, *N* stred úsečky *FG*. Vieme, že roviny *AFH* a *BGD* sú kolmé na *EC*. Keďže $EC \perp HF \Rightarrow EC \perp LI$ ($LI \parallel HF$). *LI* je teda priamka roviny súmernosti, pretože je kolmá na *EC* a *S* leží na *LI*. Rezová rovina je rovnobežná s rovinami *AFH* aj s *BGD*, preto hrany rezu budú rovnobežné so stenovými uhlopriečkami kocky. Rezom je teda šesťuholník *IJKLMN*, ktorý má všetky strany zhodné (sú to polovice stenových uhlopriečok).

To však ešte nestačí na to, aby bol šesťuholník pravidelný. Ešte treba dokázať, že všetky jeho uhlopriečky prechádzajúce stredom sú zhodné. Lenže všetky tieto uhlopriečky majú veľkosť stenovej uhlopriečky kocky, teda sú zhodné a rezový šesťuholník je pravidelný.

Prienik priamky a mnohostena

Prienik priamky s mnohostenom sa nájde podobne ako prienik roviny a priamky. Najskôr preložíme priamkou vhodnú rovinu, určíme rez telesa touto rovinou a prienik priamky s rezom telesa je zároveň prienikom priamky s telesom.

Ak je telesom nejaký hranol, je vhodné rovinu, ktorú prekladáme priamkou, voliť rovnobežne s bočnými hranami. Ak je telesom ihlan, potom je vhodné voliť túto rovinu tak, aby prechádzala vrcholom (tzv. vrcholová rovina).

10.4 Metrické vlastnosti útvarov v priestore

Vlastnostiam, ktoré sa vzťahujú k problémom vzdialenosti alebo uhla dvoch geometrických útvarov, hovoríme metrické. Medzi ne radíme veľkosť uhla a vzdialenosť medzi geometrickými útvarmi.

Uhol dvoch priamok

Veľkosť uhla dvoch priamok p, q je veľkosť uhla dvoch rôznobežiek p', q', pre ktoré platí $p \parallel p'$ a $q \parallel q'$.

Uhol dvoch mimobežných priamok a, b budeme definovať ako uhol zhodný s uhlom ľubovoľných dvoch rôznobežiek a', b', pričom $a' \parallel a$ a $b' \parallel b$ takto:

Nech sú a, b dve ľubovoľné mimobežky a M je bod ($M \notin a$, $M \notin b$). Ak zostrojíme priamky a', b' tak, aby $M \in a' \cap b'$ a $a \parallel a'$ a $b \parallel b'$, platí: $\sphericalangle a'b' \cong \sphericalangle ab$.

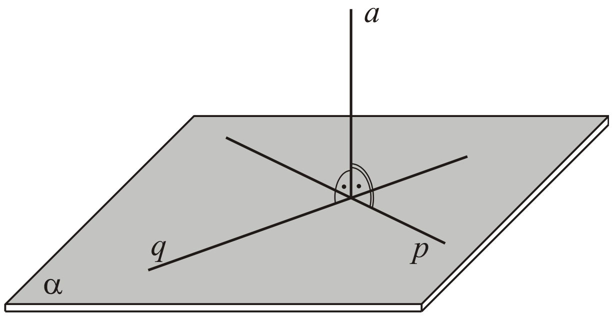
Pomocou uhla priamok sa definuje aj ich kolmosť:

Priamka p je kolmá na priamku q práve vtedy, keď $|\sphericalangle ab| = 90^\circ$.

Priamka kolmá na rovinu

Pomocou kolmostí priamok sa definuje kolmosť priamky na rovinu:

- **Priamka je kolmá na rovinu práve vtedy, keď je kolmá na všetky priamky tejto roviny.**
- **Ak je priamka p kolmá na rovinu α, hovoríme, že rovina α je kolmá na priamku p.**
- **Ak je priamka kolmá na dve rôznobežné priamky roviny, tak je kolmá na túto rovinu.**
- **Všetky priamky kolmé na tú istú rovinu sú navzájom rovnobežné.**
- **Všetky roviny kolmé na tú istú priamku sú navzájom rovnobežné.**



Obr. 10.31

Vety o kolmosti rovín

Kolmosť rovín sa definuje pomocou kolmosti priamky a roviny:

- **Rovina je kolmá na druhú rovinu práve vtedy, keď je kolmá na niektorú priamku tejto roviny.**
- **Ak dve rôznobežné roviny sú kolmé na tú istú rovinu, tak aj ich priesečnica je kolmá na túto rovinu.**
- **Rovina je kolmá na dve rôznobežné roviny, keď je kolmá na ich priesečnicu.**
- **Uhol dvoch rovín je uhol ich priesečníc s rovinou, ktorá je na ne kolmá.**

Vzdialenosť bodu od roviny

Druhým typom metrických konštrukčných úloh sú úlohy týkajúce sa vzdialenosti základných geometrických útvarov. Teoretickým východiskom pre riešenie týchto úloh a definovanie ďalších pojmov je pojem kolmého priemetu bodu do roviny a na priamku, päty kolmice a následne definícia vzdialenosti bodu od roviny a priamky. Základným pojmom bude pojem dĺžky úsečky ako vzdialenosti jej krajných bodov. Pod **vzdialenosťou dvoch útvarov** budeme potom rozumieť dĺžku najkratšej úsečky, ktorej jeden krajný bod je z jedného a druhý krajný bod z druhého útvaru (teda **najmenšiu vzdialenosť** zo všetkých vzdialeností príslušných dvojíc bodov).
Najskôr spomenieme vzdialenosť bodu od priamky v priestore. Môžeme ju určiť ako vzdialenosť bodu od priamky v rovine, lebo bod a priamka ním neprechádzajúca ležia v jednej rovine. Preto **vzdialenosť bodu od priamky v priestore** je rovná vzdialenosti tohto bodu od jeho kolmého priemetu na danú priamku, teda od päty kolmice zostrojenej z daného bodu na danú priamku. Ak bod leží na priamke, vzdialenosť sa rovná nule.
Symbolicky zapíšeme vzdialenosť bodu A od priamky p ako $|A, p|$.

V konštrukčnej a analytickej geometrii sa vzdialenosť bodu od priamky rieši zväčša práve **pomocou roviny kolmej na priamku a prechádzajúcej daným bodom**.

Vzdialenosť bodu od roviny nazývame vzdialenosť daného bodu od jeho kolmého priemetu do danej roviny (teda od päty kolmice zostrojenej z daného bodu na danú rovinu). Ak bod leží v rovine, vzdialenosť sa rovná nule.
Symbolicky zapíšeme vzdialenosť bodu A od roviny ρ ako $|A, \rho|$.

Vzdialenosť dvoch rovnobežných rovín

Definícia vzdialenosti dvoch rovnobežných rovín je založená na definícii vzdialenosti bodu od roviny.

Vzdialenosťou dvoch rovnobežných rovín nazývame vzdialenosť ľubovoľného bodu jednej roviny od druhej. **Vzdialenosť dvoch rovnobežných rovín** je teda v podstate vzdialenosť bodu od roviny a podľa definície tejto vzdialenosti je to vzdialenosť bodu (jednej roviny) od kolmého priemetu bodu do danej (druhej) roviny.

Symbolicky budeme zapisovať vzdialenosť rovín α, β takto: $|\alpha, \beta|$.

Vzdialenosť dvoch rovnobežných priamok

Vzdialenosťou dvoch rovnobežných priamok nazývame vzdialenosť ľubovoľného bodu jednej priamky od druhej.

Symbolicky budeme zapisovať vzdialenosť priamok p, q takto: $|p, q|$.

Vzdialenosť priamky a roviny

Vzdialenosť priamky od roviny, ktorá s ňou nie je rovnobežná, je rovná nule, pretože majú spoločný bod.

Vzdialenosť priamky rovnobežnej s rovinou od tejto roviny sa nazýva vzdialenosť ľubovoľného bodu priamky od roviny.

Symbolicky budeme zapisovať vzdialenosť p od α takto: $|p, \alpha|$.

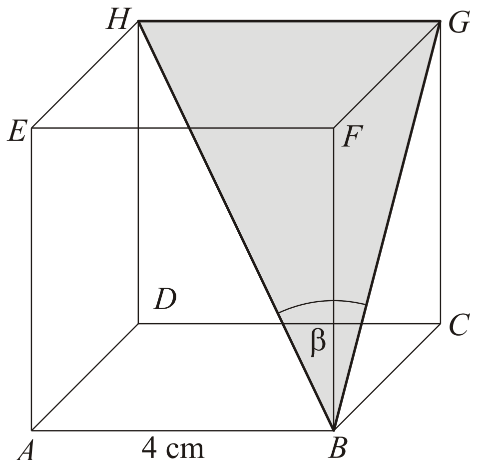
Nemusíme sa ani veľmi zamyslieť, aby sme zistili, že vzdialenosť roviny od priamky s ňou rovnobežnej je opäť v podstate vzdialenosť bodu od roviny.

10.5 Metrické konštrukčné úlohy

Metrické konštrukčné úlohy sú zhrnutím všetkých pojmov uvedených v predošlom texte. Riešime v nich problémy orientované na veľkosti uhlov a vzdialenosti v priestore. Pri výpočtovom riešení dochádza k zaokrúhľovacím chybám, preto sa niekedy výsledok líši od konštrukčného, táto chyba je ale na úrovni stotín milimetra.

Príklad. Je daná kocka *ABCDEFGH* s dĺžkou hrany |*AB*| = 4 cm. Určite výpočtom aj konštrukčne veľkosť uhla priamok *BG* a *BH*.

Riešenie.

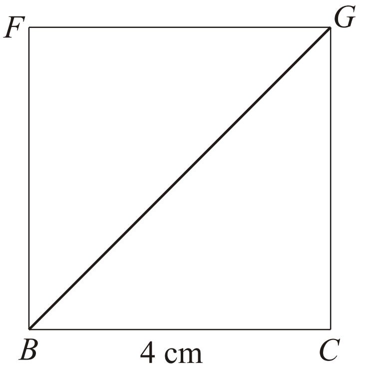


Obr. 10.32

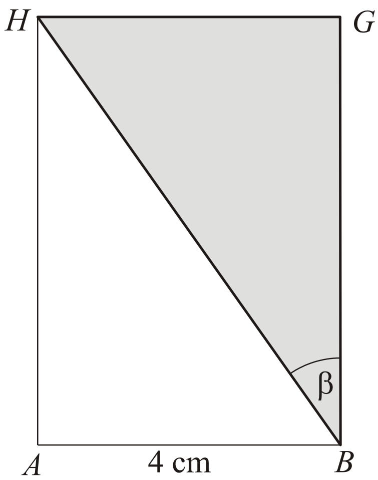
Pre riešenie priestorovej úlohy vyhľadáme vhodnú rovinu, v ktorej nájdeme príslušný útvar a z tohto útvaru potrebný údaj určíme. Teda stereometrickú úlohu premeníme na úlohu planimetrickú.

a) *Konštrukčné riešenie*:

V tejto úlohe je takou vhodnou rovinou rovina *BGH*, v ktorej leží pravouhlý Δ *BGH*. Tento trojuholník zostrojíme. Úsečka *GH* je hranou kocky, t. j. |*GH*| = 4 cm. Strana *BG* je uhlopriečkou štvorca *BCGF* (obr. 10.33). Strana *BH* je uhlopriečkou obdĺžnika *ABGH* (obr. 10.34). Teda Δ *BGH* vieme zostrojiť, takže môžeme ∢ *GBH* v zostrojenom trojuholníku odmerať.



Obr. 10.33



Obr. 10.34

b) *Výpočtové riešenie*:

Pre výpočtové riešenie, podobne ako v konštrukčnom, musíme nájsť trojuholník, pomocou ktorého vypočítame hľadanú veľkosť uhla priamok *BG* a *BH*. Danú veľkosť uhla môžeme určiť pomocou Δ *BGH*. Tento trojuholník je pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole *G*. Hrana *GH* je hranou kocky a má teda dĺžku $a = 4$ cm. Úsečka *BG* je uhlopriečkou štvorca *BCGF* so stranou $a = 4$ cm a má teda dĺžku $a\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$. Hľadanú veľkosť uhla môžeme teraz už určiť napríklad pomocou vzťahu $\text{tg}\,|\sphericalangle GBH| = \dfrac{|GH|}{|BH|}$. Takže hľadaná veľkosť uhla je 35°15'.

10.6 Objemy a povrchy telies

Určovanie objemov a povrchov telies je jedným z najčastejších a najstarších použití geometrie v praxi. Matematicky je objem miera charakterizujúca časť priestoru. Základnou jednotkou objemu je meter kubický – m^3. Povrch telesa chápeme ako mieru jeho hranice. Zjednodušene povedané, povrch telesa je súčtom obsahov všetkých jeho stien a plôch, ktoré teleso ohraničujú. Základnou jednotkou povrchu je meter štvorcový – m^2.

Symboly, ktoré sú použité v nasledovnej tabuľke majú tento význam:

V – objem telesa, S – povrch telesa, a – hrana na telese, v – výška telesa, r – polomer podstavnej kružnice alebo polomer gule, ρ – polomer kružnice v rezovej rovine, s – strana kužeľa, kružnice, S_p – obsah podstavy telesa, S_{pl} – obsah plášťa telesa.

Prehľad objemov a povrchov priestorových útvarov:

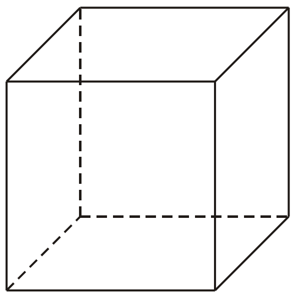
Teleso	**Objem**	**Povrch**
Kocka	$V = a \cdot a \cdot a = a^3$	$S = 6 \cdot a^2$
Kváder	$V = a \cdot b \cdot c$	$S = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$
Hranol	$V = S_p \cdot v$	$S = 2 \cdot S_p + S_{pl}$
Ihlan	$V = S_p \cdot v : 3$	$S = S_p + S_{pl}$
Valec	$V = \pi\, r^2 \cdot v$	$S = 2\pi\, r \cdot (r + v)$

Kužeľ	$V = \pi \cdot r^2 .v : 3$	$S = \pi \cdot r\,(r + s)$
Zrezaný ihlan	$V = \frac{v}{3} \cdot (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$	$S = S_1 + S_2 + S_{pl}$
Zrezaný kužeľ	$V = \pi \frac{v}{3} \cdot (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$	$S = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + S_{pl}$ $S_{pl} = \pi .(r_1 + r_2).s$ $s = \sqrt{v^2 + (r_1 - r_2)^2}$
Guľa	$V = 4\pi\, r^3 : 3$	$S = 4\pi\, r^2$
Guľový odsek	$V = \frac{1}{6}\pi v\,(3\rho^2 + v^2)$, kde ρ je polomer podstavy odseku $V = \frac{1}{3}\pi v^2\,(3r - v)$	$S = \pi \rho^2 + 2\pi r\, v$
Guľová vrstva	$V = \frac{1}{6}\pi v\,(3\rho_1^2 + 3\rho_2^2 + v^2)$	$S = \pi(\rho_1^2 + \rho_2^2) + 2\pi r\, v$
Guľový výsek	$V = \frac{2}{3}\pi r^2\, v$	
Guľový vrchlík		$S = 2\pi r\, v$
Guľový pás		$S = 2\pi r\, v$

Tab. 10.6

Vlastnosti kocky:

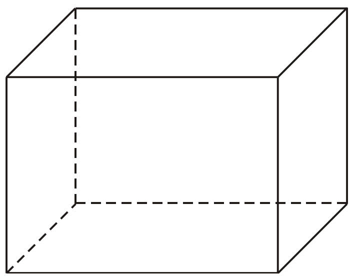
1. Všetky hrany sú rovnako dlhé.
2. Všetky steny sú rovnako veľké.
3. Hrany sú na seba kolmé alebo sú navzájom rovnobežné.
4. Steny kocky tvoria štvorce.
5. Protiľahlé steny sú navzájom rovnobežné.
6. Všetky telesové uhlopriečky sú rovnako dlhé.
7. Telesové uhlopriečky sa navzájom rozpoľujú.



Obr. 10.35

Vlastnosti kvádra:

1. Podstavou je štvorec alebo obdĺžnik.
2. Protiľahlé steny sú navzájom rovnobežné.
3. Protiľahlé steny sú rovnako veľké.
4. Susedné steny sú navzájom na seba kolmé.
5. Telesové uhlopriečky sú rovnako dlhé.
6. Telesové uhlopriečky sa navzájom rozpoľujú.



Obr. 10.36

Vlastnosti kolmého hranola:

1. Podstavou je pravidelný alebo nepravidelný mnohouholník.
2. Ak je podstavou pravidelný mnohouholník, hovoríme o pravidelnom hranole.
3. Ak je podstavou nepravidelný mnohouholník, hovoríme o nepravidelnom hranole.

4. Steny podstáv a plášťa sú navzájom na seba kolmé.
5. Výška hranola je vzdialenosť medzi podstavami.

A. Kolmý hranol s podstavou pravidelného mnohouholníka:
1. Povrch tvoria dve rovnobežné podstavy a plášť.
2. Plášť tvoria zhodné obdĺžniky alebo štvorce, ktorých počet je taký, koľko hrán tvorí podstavu.

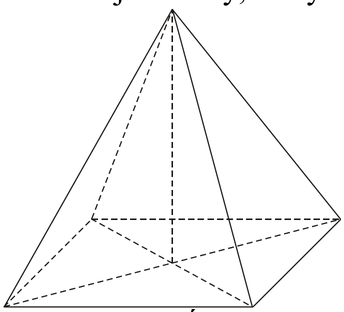
B. Kolmý hranol s podstavou nepravidelného mnohouholníka:
1. Povrch tvoria dve rovnobežné podstavy a plášť.
2. Plášť tvoria rôzne obdĺžniky alebo štvorce, ktorých počet je taký, koľko hrán tvorí podstavu.

Vlastnosti kolmého ihlana:

1. Podstavou môže byť pravidelný alebo nepravidelný mnohouholník.
2. Ak je podstavou pravidelný mnohouholník, hovoríme o pravidelnom ihlane.
3. Ak je podstavou nepravidelný mnohouholník, hovoríme o nepravidelnom ihlane.

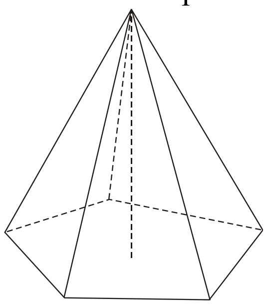
A. Kolmý ihlan s podstavou pravidelného mnohouholníka:
1. Povrch tvorí podstava a plášť.
2. Plášť tvoria zhodné trojuholníky, ktorých počet je taký, koľko hrán tvorí podstavu.

B. Kolmý ihlan s podstavou nepravidelného mnohouholníka :
1. Povrch tvorí podstava a plášť.
2. Plášť tvoria rôzne trojuholníky, ktorých počet je taký, koľko hrán tvorí podstavu.



Ihlan s podstavou obdĺžnika

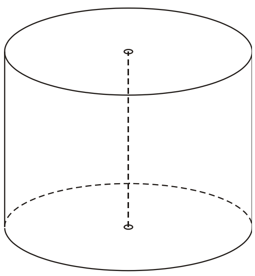
Obr. 10.37



Ihlan s podstavou nepravidelného päťuholníka

Obr. 10.38

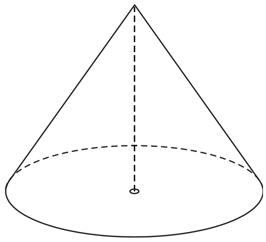
Vlastnosti rotačného valca:
1. Podstavou je kruh.
2. Obidve podstavy sú navzájom rovnobežné.
3. Plášť je na podstavy kolmý.
4. Vzdialenosť podstáv je výška valca.



Obr. 10.39

Vlastnosti rotačného kužeľa:

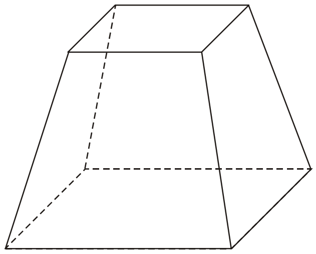
1. Podstavou je kruh.
2. Vznikne otáčaním pravouhlého trojuholníka okolo odvesny.
3. Vzdialenosť stredu podstavnej kružnice a vrcholu je výška kužeľa.



Obr. 10.40

Vlastnosti zrezaného ihlana:

1. Zrezaný ihlan je prienik ihlana a polpriestoru, ktorého hraničná rovina je rovnobežná s rovinou podstavy ihlana.
2. Podstava a vrchol ihlana ležia v opačných polpriestoroch určených rezovou rovinou.
3. Rovina rovnobežná s podstavou rozdelí ihlan na dve časti – na menší ihlan a zrezaný ihlan.
4. Zrezaný ihlan má dve podstavy, jedna z nich je podstavou pôvodného ihlana a druhá leží v hraničnej rovine.
5. Podstavy zrezaného ihlana ležia v dvoch navzájom rovnobežných rovinách.
6. Vzdialenosť podstavných rovín sa nazýva výška zrezaného ihlana.
7. Bočné steny zrezaného ihlana sú lichobežníky.



Obr. 10.41

Vlastnosti zrezaného kužeľa:

1. Zrezaný kužeľ je prienik kužeľa a polpriestoru, ktorého hraničná rovina je rovnobežná s rovinou podstavy.

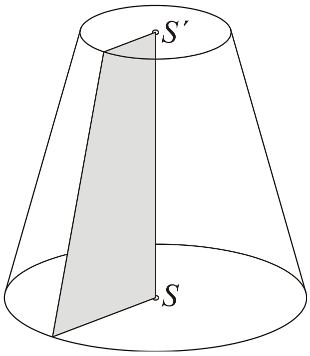
2. Podstava a vrchol kužeľa ležia v opačných polpriestoroch.

3. Zrezaný kužeľ má dve podstavy, jedna z nich je podstavou pôvodného kužeľa a druhá leží v hraničnej rovine.

4. Os zrezaného rotačného kužeľa SS' je kolmá na roviny jeho podstáv.

5. Podstavy zrezaného kužeľa ležia v dvoch navzájom rovnobežných rovinách, ktorých vzdialenosť sa nazýva výška zrezaného kužeľa.

6. Rovina rovnobežná s podstavou rozdelí kužeľ na dve časti – na menší kužeľ a zrezaný kužeľ.



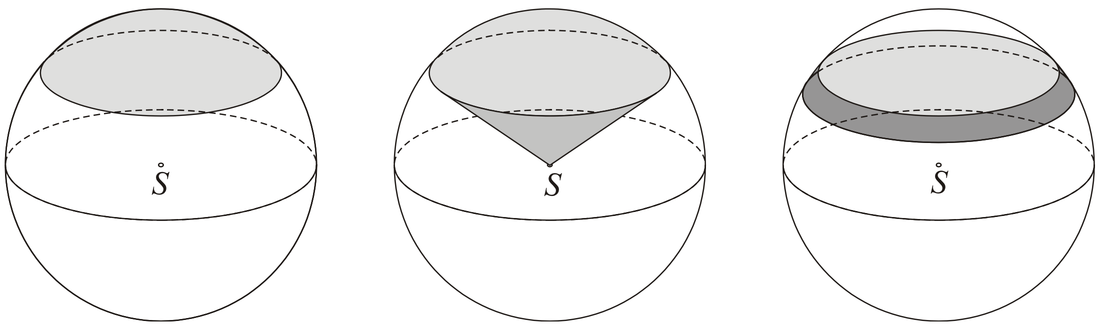
Obr. 10.42

Vlastnosti gule:

1. Je to množina bodov v priestore, ktoré majú od stredu *S* rovnakú alebo menšiu vzdialenosť ako *r* – polomer gule.
2. Najkratšia spojnica dvoch bodov gule tvorí tetivu.
3. Os tetivy prechádza stredom gule.
4. Guľová plocha je plocha, ktorá je vytvorená všetkými bodmi vo vzdialenosti *r* od stredu gule.
5. Guľová plocha je hranica gule.
6. Guľa vznikne otáčaním polkruhu okolo jeho priemeru.

Vlastnosti guľového odseku a vrchlíka

1. Guľový odsek je prienik gule s polpriestorom, ktorého hraničná rovina obsahuje kruhový rez gule.
2. Hraničná rovina rozdelí guľu na dva guľové odseky.
3. Podstava guľového odseku je kruh, ktorý je prienikom guľového odseku s hraničnou rovinou polpriestoru, ktorý ho určuje.
4. Ak stredom gule zostrojíme priamku kolmú na podstavu guľového odseku, potom prienik tejto priamky s guľovým odsekom je úsečka, ktorej veľkosť nazývame výška guľového odseku a označujeme *v*.
5. Hranica guľového odseku sa skladá z jeho podstavy a z časti guľovej plochy, ktorú nazývame guľový vrchlík.



Guľový odsek Guľový výsek Guľová vrstva

Obr. 10.43

Vlastnosti guľového výseku

1. Guľový výsek je prienik gule s rotačným kužeľom, ktorý má vrchol v strede gule a výšku väčšiu alebo rovnú polomeru gule *r*.
2. Guľový výsek je zjednotením guľového odseku a rotačného kužeľa , ktorý má s odsekom spoločnú podstavu a jeho vrchol je stredom danej gule.
3. Hranicou guľového výseku je zjednotenie plášťa kužeľa a vrchlíka, ktorého výška je obvykle označovaná *v*.

Vlastnosti guľovej vrstvy a guľového pásu

1. Guľová vrstva je časť gule nachádzajúca sa medzi dvomi rovnobežnými (hraničnými) rovinami.
2. Rovnobežné roviny pretínajú guľu v kruhoch, ktoré nazývame podstavy vrstvy a ktoré majú polomery ρ_1 a ρ_2.
3. Vzdialenosť hraničných rovín sa nazýva výška vrstvy s obvyklým označovaním *v*.
4. Guľový pás je plášť guľovej vrstvy.
5. Hranicou guľovej vrstvy je zjednotenie guľového pásu a obidvoch podstáv.

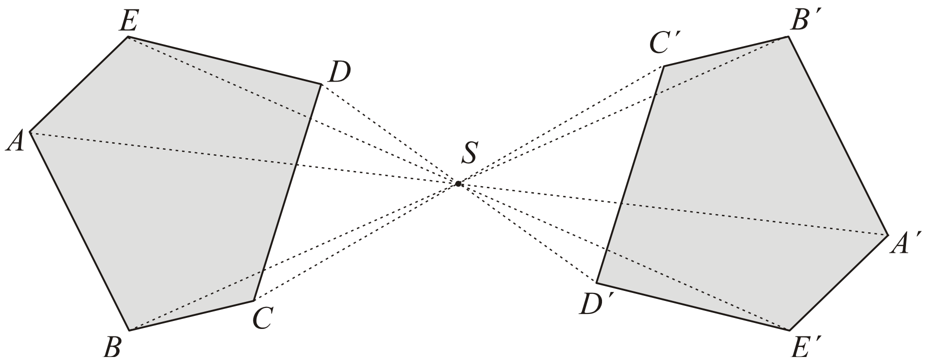
10.7 Súmernosti v priestore

Súmernosť podľa bodu

Nech je daný v priestore bod *S*. **Súmernosť podľa bodu *S*** je zobrazenie, ktoré každému bodu *X* priestoru priraďuje bod $\mathcal{S}(X) = X'$ takto:

1. Ak $X = S$, tak $X' = X$.
2. Ak $X \neq S$, tak bod *S* je stred úsečky XX'.

Bod *S* nazývame stred súmernosti útvaru $\mathcal{U}$, ak sa útvar $\mathcal{U}$ v súmernosti $\mathcal{S}$ podľa bodu *S* zobrazí na seba, t. j. $\mathcal{S}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$. **Útvar je stredovo súmerný**, ak má aspoň jeden stred súmernosti.
Stredová súmernosť v priestore zachováva vzdialenosti bodov, t. j. pre každú stredovú súmernosť $\mathcal{S}$ a pre všetky body *X*, *Y* platí $|XY| = |X'Y'|$, kde $X' = \mathcal{S}(X)$ a $Y' = \mathcal{S}(Y)$.



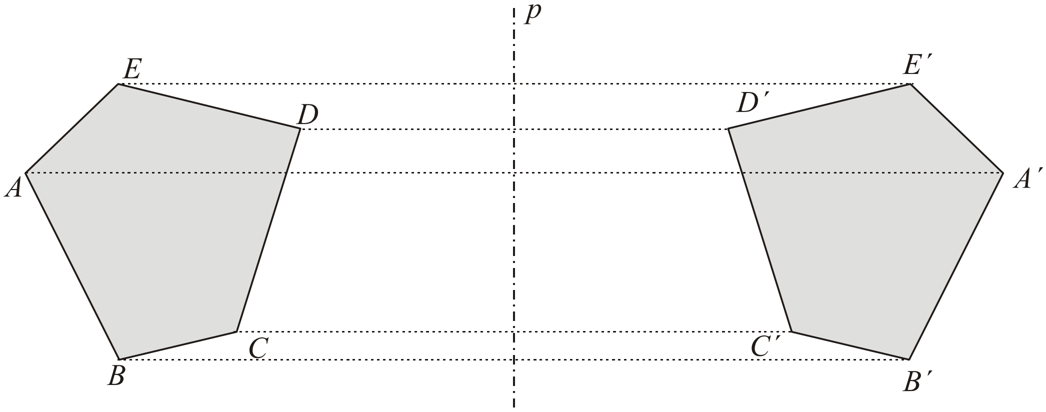
Obr. 10.44

Súmernosť podľa priamky

Nech je daná priamka *o*. **Súmernosť podľa priamky *o*** je zobrazenie, ktoré každému bodu *X* priestoru priraďuje bod $\mathcal{O}(X) = X'$ takto:

1. Ak $X \in o$, tak $X' = X$.
2. Ak $X \notin o$, tak je úsečka XX' kolmá na priamku o a jej stred patrí priamke o.

Priamka o sa nazýva os súmernosti a je to samodružná priamka, t. j. $\mathcal{O}\ (o) = o$. Osová súmernosť $\mathcal{O}$ má aj iné samodružné priamky. Sú to všetky priamky, ktoré sú na os o kolmé. Samodružnými rovinami sú všetky roviny, ktoré sú tiež na os o kolmé.
Priamka o sa nazýva os súmernosti útvaru $\mathcal{U}$, ak sa útvar $\mathcal{U}$ v súmernosti $\mathcal{O}$ podľa priamky o zobrazí na seba, t. j. $\mathcal{O}\ (\mathcal{U}) = \mathcal{U}$. **Útvar je osovo súmerný**, ak má aspoň jednu os súmernosti.
Osová súmernosť v priestore zachováva vzdialenosti bodov, t. j. pre každú osovú súmernosť $\mathcal{O}$ a pre všetky body X, Y platí $|XY| = |X'Y'|$, kde $X' = \mathcal{O}\ (X)$ a $Y' = \mathcal{O}\ (Y)$.



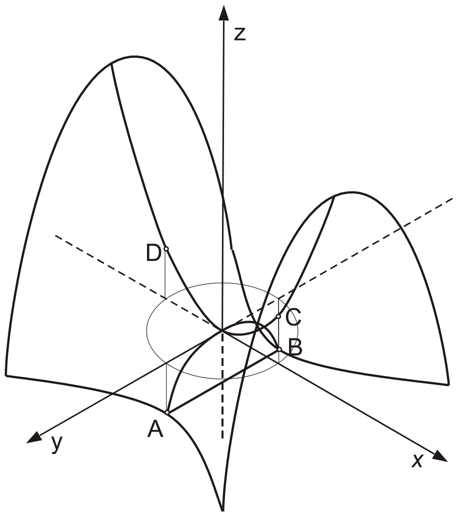
Obr. 10.45

Súmernosť podľa roviny

Nech je daná rovina ρ. **Súmernosť podľa roviny ρ** je zobrazenie $\mathcal{R}$, ktoré každému bodu X priestoru priraďuje bod $\mathcal{R}\ (X) = X'$ takto:

1. Ak $X \in \rho$, tak $X' = X$.
2. Ak $X \notin \rho$, tak je úsečka XX' kolmá na rovinu ρ a jej stred patrí rovine ρ.

Rovina ρ sa nazýva rovinou súmernosti a je to samodružná rovina, t. j. $\mathcal{R}\ (\rho) = \rho$. Súmernosť podľa roviny $\mathcal{R}$ má aj iné samodružné roviny. Sú to všetky roviny, ktoré sú na rovinu súmernosti ρ kolmé. Samodružnými priamkami sú všetky priamky, ktoré sú tiež na rovinu súmernosti ρ kolmé.
Rovina ρ sa nazýva rovinou súmernosti útvaru $\mathcal{U}$, ak sa útvar $\mathcal{U}$ v súmernosti $\mathcal{R}$ podľa roviny ρ zobrazí na seba, t. j. $\mathcal{R}\ (\mathcal{U}) = \mathcal{U}$. **Útvar je rovinovo súmerný**, ak má aspoň jednu rovinu súmernosti.
Súmernosť podľa roviny zachováva vzdialenosti bodov, t. j. pre každú súmernosť $\mathcal{R}$ podľa roviny a pre všetky body X, Y platí $|XY| = |X'Y'|$, kde $X' = \mathcal{R}\ (X)$ a $Y' = \mathcal{R}\ (Y)$.



Obr. 10.46

Rovinami súmernosti tohto hyperbolického paraboloidu sú roviny (x, z) a (y, z).

Kapitola bola spracovaná podľa literatúry [2], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [11], [12], [14], [16], [17], [18], [19], [20].