11 Analytická geometria

Analytická geometria je oblasť matematiky, v ktorej sa študujú geometrické útvary pomocou ich analytických vyjadrení. Pomocou zvolenej súradnicovej sústavy vieme každý základný geometrický útvar vyjadriť jednoznačne v tvare istej rovnice (prípadne nerovnice). Pritom vzťah medzi príslušným geometrickým útvarom a jeho rovnicou je daný nasledovným pravidlom:

Ľubovoľný bod *X* leží v danom útvare práve vtedy, ak jeho súradnice spĺňajú rovnicu útvaru.

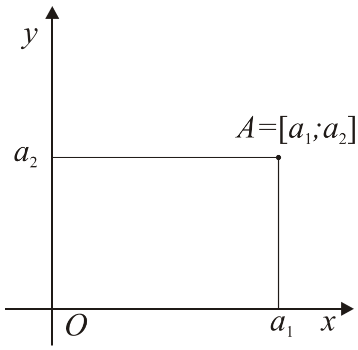
Na základe tohto pravidla prienikom útvarov $\mathcal{U}_1$ a $\mathcal{U}_2$ je množina všetkých bodov, ktorých súradnice spĺňajú súčasne rovnice obidvoch týchto útvarov.

11.1 Súradnicová sústava

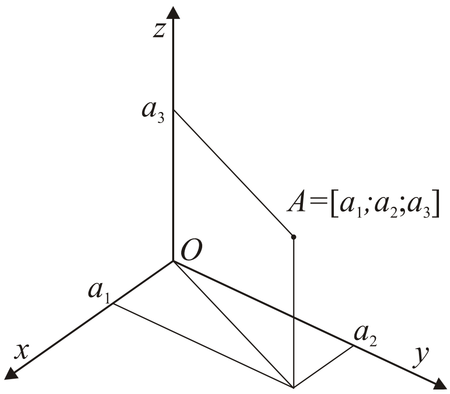
Karteziánska súradnicová sústava v rovine (v priestore) je sústava dvoch (troch) navzájom na seba kolmých priamok, ktoré nazývame **osi súradnicovej sústavy**. Všetky osi súradnicovej sústavy majú spoločný jediný bod, ktorý nazývame **začiatok súradnicovej sústavy** a označujeme ho znakom *O*. Naviac, na každej osi je určená rovnaká jednotka dĺžky.

Karteziánska súradnicová sústava je prostriedok, pomocou ktorého každému bodu v rovine (v priestore) vieme jednoznačne priradiť usporiadanú dvojicu (trojicu) reálnych čísel, ktoré nazývame súradnice daného bodu. Spôsob priradenia je znázornený na obrázku 11.1, resp. 11.2.

Fakt, že bod A má súradnice a_1, a_2, a_3, budeme zapisovať $A = [a_1; a_2; a_3]$.



Obr. 11.1



Obr. 11.2

11.2 Vektory

Vektor je geometrický objekt, ktorý je určený dĺžkou, smerom a orientáciou. Môžeme si ho predstaviť ako orientovanú úsečku, t. j. úsečku, na ktorej je vyznačený začiatočný a koncový bod. Pritom nesmieme zabudnúť, že dve rôzne orientované úsečky, ktoré majú zhodnú dĺžku (t. j. veľkosť), smer aj orientáciu, predstavujú ten istý vektor, ide o dve rôzne umiestnenia toho istého vektora.

Súradnice vektora sú súradnice jeho koncového bodu v takom umiestnení vektora, keď začiatočný bod je zhodný so začiatkom súradnicovej sústavy. Fakt, že vektor $\boldsymbol{v}$ má súradnice v_1, v_2, v_3 budeme zapisovať $\boldsymbol{v} = (v_1; v_2; v_3)$.

Teda ak $A = [a_1;\ a_2;\ a_3]$ a $B = [b_1;\ b_2;\ b_3]$, tak vektor so začiatočným bodom A a koncovým bodom B má súradnice $(b_1 - a_1;\ b_2 - a_2;\ b_3 - a_3)$. Preto takýto vektor budeme označovať symbolom $B - A$.

Polohovým vektorom bodu A rozumieme vektor $A - O$, kde $O = [0; 0; 0]$

Dĺžka vektora $\boldsymbol{v}$ je vzdialenosť jeho začiatočného a koncového bodu a označujeme ju $|\boldsymbol{v}|$. Pre dĺžku vektora platí: $|\boldsymbol{v}| = |B - A| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$.

Jednotkový vektor je každý vektor, ktorého dĺžka je rovná 1. Jednotkový vektor orientovaný v kladnom smere osi x označujeme $\boldsymbol{i}$, jednotkový vektor orientovaný v kladnom smere osi y označujeme $\boldsymbol{j}$, jednotkový vektor orientovaný v kladnom smere osi z označujeme $\boldsymbol{k}$. Vektory $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ tvoria **bázu** trojrozmerného priestoru.

V ďalšom texte predpokladajme, že $\boldsymbol{u} = (u_1;\ u_2;\ u_3)$ a $\boldsymbol{v} = (v_1;\ v_2;\ v_3)$.

Skalárny násobok vektora $\boldsymbol{v}$ číslom c je vektor $c\cdot\boldsymbol{v}$, pričom:

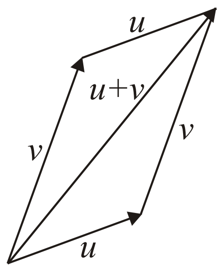
1. dĺžka vektora $c\cdot\boldsymbol{v}$ je $|c|$-násobkom dĺžky vektora $\boldsymbol{v}$,
2. obidva vektory $\boldsymbol{v}$ aj $c\cdot\boldsymbol{v}$ majú rovnaký smer,
3. a) ak $c > 0$, tak $\boldsymbol{v}$ a $c\cdot\boldsymbol{v}$ majú zhodnú orientáciu,
   b) ak $c < 0$, tak $\boldsymbol{v}$ a $c\cdot\boldsymbol{v}$ majú opačnú orientáciu,
   c) ak $c = 0$, tak $c\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$.

Namiesto $c\cdot\boldsymbol{v}$ budeme niekedy písať kratšie $c\boldsymbol{v}$. V súradniciach: $c\boldsymbol{v} = (cv_1;\ cv_2;\ cv_3)$.

Vektor $(-1)\cdot\boldsymbol{v}$ nazývame vektor opačný k vektoru $\boldsymbol{v}$ a označujeme $-\boldsymbol{v}$. V súradniciach:

$$-\boldsymbol{v} = (-v_1;\ -v_2;\ -v_3)$$

Platí: Dva nenulové vektory sú rovnobežné práve vtedy, ak jeden z nich je skalárnym násobkom druhého. Je to práve vtedy, ak podiely ich prvých, druhých aj tretích súradníc sú zhodné.



Obr. 11.3

Súčet vektorov $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ je vektor $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$, ktorý môžeme znázorniť ako uhlopriečku v rovnobežníku so stranami tvorenými vektormi $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$, pričom jeho orientácia je znázornená na obrázku 11.3.

V súradniciach: $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_1 + v_1;\ u_2 + v_2;\ u_3 + v_3)$.

Rozdiel vektorov $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ v tomto poradí je vektor $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{v})$.

Ak máme dva vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$, tak výraz $c\boldsymbol{u} + d\boldsymbol{v}$, kde c, d sú ľubovoľné reálne čísla, je **lineárna kombinácia vektorov** $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$.

Podobne, ak máme tri vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{w}$, tak výraz $c\boldsymbol{u} + d\boldsymbol{v} + e\boldsymbol{w}$, kde c, d, e sú ľubovoľné reálne čísla, je **lineárna kombinácia vektorov** $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{w}$. Čísla c, d, e v lineárnej kombinácii nazývame **koeficienty** lineárnej kombinácie. Pre každú konkrétnu hodnotu koeficientov dostávame konkrétny vektor.

Platí: Ak máme dané v rovine dva nerovnobežné vektory, tak každý vektor tejto roviny sa dá jednoznačne vyjadriť v tvare lineárnej kombinácie dvoch daných vektorov. Ak máme dané v priestore tri vektory, ktoré neležia všetky v jednej rovine, tak každý vektor v priestore sa dá jednoznačne vyjadriť v tvare lineárnej kombinácie tých troch daných vektorov.

V dôsledku toho každý vektor sa dá napísať v tvare lineárnej kombinácie vektorov bázy:

$$\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j} + u_3\boldsymbol{k}.$$

V tomto vyjadrení sú koeficienty kombinácie zhodné so súradnicami vektora, teda platí

$$\boldsymbol{u} = u_1\,\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j} + u_3\,\boldsymbol{k} \text{ práve vtedy, ak } \boldsymbol{u} = (u_1;\, u_2;\, u_3).$$

Skalárny súčin vektorov $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ je číslo $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}|\,|\boldsymbol{v}|\cos(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$.

V súradniciach: $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$.

Z definície skalárneho súčinu a z vlastností funkcie kosínus vyplýva:

- $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} > 0$ práve vtedy, ak uhol vektorov $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ je ostrý,
- $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = 0$ práve vtedy, ak uhol vektorov $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ je pravý,
- $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} < 0$ práve vtedy, ak uhol vektorov $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ je tupý.

Uhol vektorov $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$, ktorých súradnice poznáme, môžeme vypočítať pomocou vzťahu

$$\cos(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\cdot\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

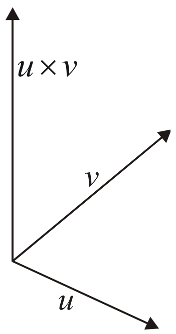
Vektorový súčin vektorov $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ je vektor $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$, ktorý je určený nasledovne

- $|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{u}|\,|\boldsymbol{v}|\sin(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$,
- jeho smer je kolmý na smery obidvoch vektorov $\boldsymbol{u}$ aj $\boldsymbol{v}$,
- orientovaný je tak, že usporiadaná trojica vektorov $(\boldsymbol{u};\, \boldsymbol{v}\,;\, \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$ tvorí pravotočivú sústavu vektorov (obr. 11.4).

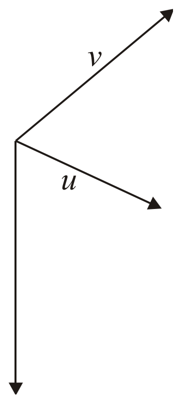
Pomocou súradníc:

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Poznamenajme, že geometrický význam prvej podmienky je ten, že dĺžka vektorového súčinu dvoch vektorov je rovná veľkosti plošného obsahu rovnobežníka vytvoreného týmito vektormi (obr.11.6).

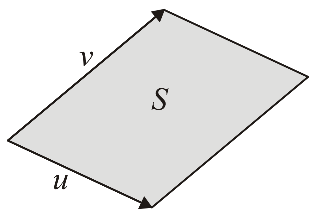


Obr. 11.4



$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u} = -\,\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$

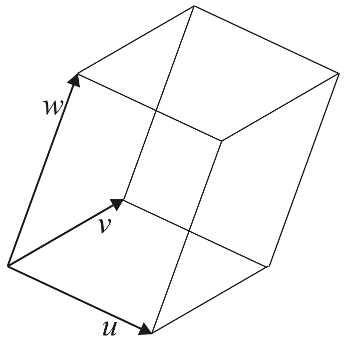
Obr. 11.5



$S = |\boldsymbol{u}|\,|\boldsymbol{v}|\sin(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$

Obr. 11.6

Zmiešaný súčin vektorov $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{w}$ je súčin $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w}$. Ako vidieť z definície, zmiešaný súčin je číslo, závisiace od troch vektorov. Jeho geometrický význam je ten, že jeho absolútna hodnota je rovná veľkosti objemu rovnobežnostena vytvoreného týmito tromi vektormi umiestnenými v spoločnom začiatku.



Obr. 11.7

$$\boldsymbol{V} = |(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w}|$$

Pomocou súradníc: $$(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Smerový vektor priamky *p* je každý vektor rovnobežný s priamkou *p*. **Normálový vektor priamky** *p* je každý vektor kolmý na priamku *p*.

Smerový vektor roviny α je každý vektor rovnobežný s rovinou α. **Normálový vektor roviny** α je každý vektor kolmý na rovinu α.

Poznamenajme, že ak niektorý vektor je smerovým alebo normálovým vektorom priamky alebo roviny, tak aj jeho ľubovoľný nenulový skalárny násobok je taký.

To znamená, že každá priamka alebo rovina má nekonečne veľa smerových a normálových vektorov. Dôležité však je, že

- ak máme určenú priamku v rovine, tak **smery** jej **normálového** a **smerového** vektora sú **jednoznačne určené**,
- ak máme určenú priamku v priestore, tak **smer** jej **smerového** vektora je **jednoznačne určený**, avšak má **nekonečne veľa normálových** vektorov **rôznych smerov,**
- ak máme určenú rovinu v priestore, tak **smer** jej **normálového** vektora je **jednoznačne určený**, avšak má **nekonečne veľa smerových** vektorov **rôznych smerov**.

11.3 Rovnice rovinných útvarov

Vo všeobecnosti **rovnica rovinného útvaru** je rovnica s dvomi neznámymi *x* a *y*, ktorá určuje tento útvar spôsobom nazvaným v úvode kapitoly ako pravidlo:

Ľubovoľný bod $X = [x; y]$ roviny leží v danom útvare práve vtedy, ak jeho súradnice x a y spĺňajú rovnicu útvaru.

Spôsob, akým získame rovnicu útvaru, závisí od toho, aké informácie o útvare máme k dispozícii. V rôznych situáciách dostávame rôzne typy rovníc.

11.3.1 Rovnice priamky v rovine

Normálová rovnica priamky

Predpokladajme, že poznáme súradnice jedného bodu X_0 danej priamky a niektorý jej normálový vektor $\boldsymbol{n}$. Potom ľubovoľný bod roviny X leží na danej priamke práve vtedy, ak vektory $X - X_0$ a $\boldsymbol{n}$ sú navzájom kolmé. Na základe uvedených vlastností skalárneho súčinu dostávame normálovú rovnicu priamky:

$$(X - X_0) \cdot \boldsymbol{n} = 0\,.$$

Ak túto rovnicu rozpíšeme v súradniciach, dostaneme všeobecnú rovnicu danej priamky.

Všeobecná rovnica priamky v rovine je rovnica v tvare

$$a\,x + b\,y + c = 0, \text{ kde } a, b, c \text{ sú reálne čísla.}$$

Geometrický význam týchto reálnych čísel je ten, že $\boldsymbol{n} = (a\,;\,b)$ je normálový vektor priamky a číslo $-c$ je rovné skalárnemu súčinu polohového vektora ľubovoľného bodu priamky s normálovým vektorom $(a\,;\,b)$, t. j., ak X je ľubovoľný bod priamky, tak $(X - O) \cdot \boldsymbol{n} = -c$.

Poznamenajme ešte, že číslo $|c|$ je priamo úmerné vzdialenosti priamky od začiatku súradnicovej sústavy.

Polroviny určené touto priamkou majú nerovnice

$$a\,x + b\,y + c \le 0 \text{ a } a\,x + b\,y + c \ge 0.$$

Smernicová rovnica priamky je rovnica v tvare

$$y = k\,x + q, \text{ kde } k, q \text{ sú reálne čísla.}$$

Číslo k nazývame **smernica** priamky a je rovné tangensu uhla priamky s kladným smerom osi x. Smernica priamky vyjadruje relatívnu zmenu závislej premennej y pri zmene nezávislej premennej x. Číslo q je y-ová súradnica priesečníka priamky s osou y. Rovnica priamky so smernicou k prechádzajúca bodom $[x_0;\, y_0]$ je

$$y - y_0 = k\,(x - x_0).$$

Smernicový tvar rovnice priamky nemožno vyjadriť, ak je priamka rovnobežná s osou y.

Parametrické rovnice priamky

Ak poznáme jeden bod X_0 priamky a jej smerový vektor $\boldsymbol{s}$, tak ľubovoľný bod X leží na danej priamke práve vtedy, ak vektory $X - X_0$ a $\boldsymbol{s}$ sú navzájom rovnobežné. Potom ale existuje reálne číslo t (jednoznačne určené bodom X), pre ktoré platí:

$$X - X_0 = t\,\boldsymbol{s}.$$

Ak túto rovnicu rozpíšeme pomocou súradníc, dostávame parametrické rovnice priamky:

$$x = x_0 + s_1\,t \qquad y = y_0 + s_2\,t, \text{ kde } t \text{ je reálne číslo.}$$

Číslo t sa volá parameter, $X_0 = [x_0;\, y_0]$ je niektorý bod priamky a $\boldsymbol{s} = (s_1;\, s_2)$ je smerový vektor priamky. Parametrické rovnice tejto priamky sa tiež píšu vo vektorovom tvare

$$[x;\, y] = [x_0 + s_1\,t;\, y_0 + s_2\,t], \text{ kde } t \text{ je reálne číslo.}$$

Polpriamka určená bodom X_0 = [x_0; y_0] a smerovým vektorom $\boldsymbol{s}$ = (s_1; s_2) má parametrické rovnice

$$[x;\, y] = [x_0 + s_1\, t;\, y_0 + s_2\, t],\ \text{kde } t \in \langle 0, \infty).$$

Úsečka AB, kde A = [a_1; a_2] a B = [b_1; b_2] má parametrické rovnice

$$[x;\, y] = [a_1 + t\,(b_1 - a_1);\, a_2 + t\,(b_2 - a_2)],\ \text{kde } t \in \langle 0, 1\rangle.$$

Stred úsečky

Nech úsečka AB má koncové body A = [a_1; a_2] a B = [b_1; b_2], potom pre jej stred S platí:

$$S = \frac{A+B}{2},\ \text{teda } S = \left[\frac{a_1+b_1}{2};\frac{a_2+b_2}{2}\right].$$

Ťažisko trojuholníka

Nech sú A = [a_1; a_2], B = [b_1; b_2] a C = [c_1; c_2] vrcholy trojuholníka ABC. Potom pre jeho ťažisko platí:

$$T = \frac{A+B+C}{3},\ \text{teda } T = \left[\frac{a_1+b_1+c_1}{3};\frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right].$$

Úsekový tvar rovnice priamky

Nech priamka pretína os x v bode P = [p; 0] a os y v bode Q = [0; q]. Potom čísla p a q nazývame úsekmi, ktoré priamka vytína na súradnicových osiach x a y. Úsekový tvar rovnice priamky je

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1,$$

kde čísla p a q sú rôzne od nuly. Rovnicu priamky, ktorá prechádza začiatkom súradnicovej sústavy alebo je rovnobežná s niektorou zo súradnicových osí pravouhlého súradnicového systému nemožno vyjadriť v úsekovom tvare.

11.3.2 Rovnice kužeľosečiek

Kužeľosečky sú rovinné útvary, ktoré môžu vzniknúť prienikom rotačnej kužeľovej plochy a roviny. Delíme ich na pravé (kružnica, elipsa, hyperbola, parabola) a nepravé (prázdna množina, jeden bod, jedna priamka, dvojica rovnobežiek a dvojica rôznobežiek).

Všeobecná rovnica kužeľosečky je $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, kde aspoň jeden koeficient A alebo B je rôzny od nuly a osi súmernosti kužeľosečky ležia na súradnicových osiach alebo sú s nimi rovnobežné.

Kružnica

Je to množina všetkých bodov roviny, ktoré majú od pevného bodu roviny rovnakú vzdialenosť. Pevný bod je stred kružnice S a rovnaká vzdialenosť je polomer kružnice $r > 0$.

Zápis: $\{k = (S, r)\} = \{X \in E_2,\ |X, S| = r\}$, kde $r > 0$.

Nech $S = [m; n]$ je stred kružnice v karteziánskej súradnicovej sústave a bod $X = [x; y]$ je ľubovoľný bod kružnice, potom:

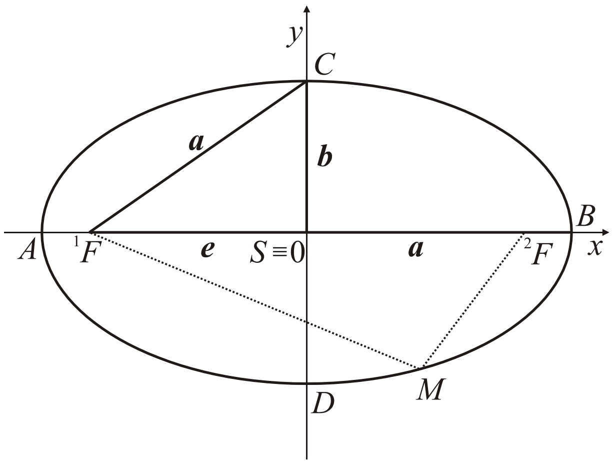
Stredový tvar rovnice kružnice: $(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$

Všeobecný tvar rovnice kružnice: $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$, kde $A\neq 0$, $B\neq 0$, $A=B$ a výraz $C^2+D^2-4EA>0$.

Elipsa

Nech ${}^1F$, ${}^2F$ sú rôzne body v rovine, také, že $|{}^1F\,{}^2F|<2a$, $a>0$. Množinu všetkých bodov roviny, ktorých súčet vzdialeností od bodov ${}^1F$, ${}^2F$ je rovný $2a$, nazývame elipsa. Body ${}^1F$, ${}^2F$ sú ohniská elipsy a $2a$ je veľkosť hlavnej osi.

Zápis: $\mathcal{E}=\{X\in E_2, |X\,{}^1F|+|X\,{}^2F|=2a\}$, kde $a>0$, $|{}^1F\,{}^2F|<2a$.



Obr. 11.8

- ${}^1F$, ${}^2F$ – ohniská elipsy,
- A, B – hlavné vrcholy,
- C, D – vedľajšie vrcholy,
- ${}^1o=AB$ – hlavná os,
- ${}^2o=CD$ – vedľajšia os,
- $a=|SA|=|SB|$ – veľkosť hlavnej polosi,
- $b=|SC|=|SD|$ – veľkosť vedľajšej polosi,
- $e=|S\,{}^1F|=|S\,{}^2F|$ – excentricita,
- excentricitu e vypočítame zo vzťahu $e=\sqrt{a^2-b^2}$, $a>b>0$.

Nech $X=[x;y]$ je ľubovoľný bod elipsy a $S=[m;n]$ je stred elipsy.

Stredový tvar rovnice elipsy:

${}^1o\parallel x$ $$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1\,,$$

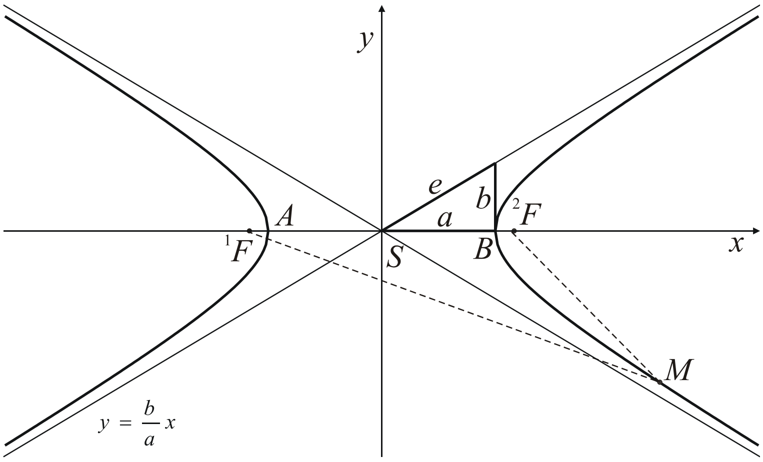
${}^1o\parallel y$ $$\frac{(x-m)^2}{b^2}+\frac{(y-n)^2}{a^2}=1\,.$$

Všeobecný tvar rovnice elipsy: $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, kde $A \neq B$, $A \cdot B > 0$ a výraz $BC^2 + AD^2 - 4ABE$ >0.

Hyperbola

Nech ${}^1F$, ${}^2F$ sú dva rôzne body roviny a $\left|{}^1F\,{}^2F\right| > 2a > 0$. Množinu všetkých bodov roviny, ktorých absolútna hodnota rozdielu vzdialeností od bodov ${}^1F$, ${}^2F$ je rovná $2a$, nazývame hyperbola.

Zápis: $\mathcal{H} = \left\{X \in E_2, \left\|X\,{}^1F\right| - \left|X\,{}^2F\right\| = 2a\right\}, \left|{}^1F\,{}^2F\right| > 2a > 0$.



Obr. 11.9

- ${}^1F$, ${}^2F$ – ohniská hyperboly,
- A, B – hlavné vrcholy hyperboly,
- ${}^1o = AB$ – hlavná os,
- $a = |SA| = |SB|$ – veľkosť hlavnej polosi,
- $e = \left|S\,{}^1F\right| = \left|S\,{}^2F\right|$ – excentricita, $e = \sqrt{a^2 + b^2}$, $a > b > 0$,
- $b = \sqrt{e^2 - a^2}$ – veľkosť vedľajšej polosi,
- ${}^1a$, ${}^2a$ – asymptoty hyperboly.

Smery, v ktorých každá priamka má s hyperbolou najviac jeden spoločný bod, nazývajú sa *asymptotické smery hyperboly*. Priamky týchto smerov, ktoré nemajú s hyperbolou ani jeden reálny spoločný bod, nazývame ***asymptoty hyperboly***.

Nech $X = [x; y]$ je ľubovoľný bod hyperboly a $S = [m; n]$ je stred hyperboly.

Stredová rovnica hyperboly:

ak ${}^1o \parallel x$ $$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1,$$

ak ${}^1o \parallel y$ $$-\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1.$$

Rovnice asymptot:

$^{1}o \parallel x \qquad y - n = \pm\frac{b}{a}(x - m)$,

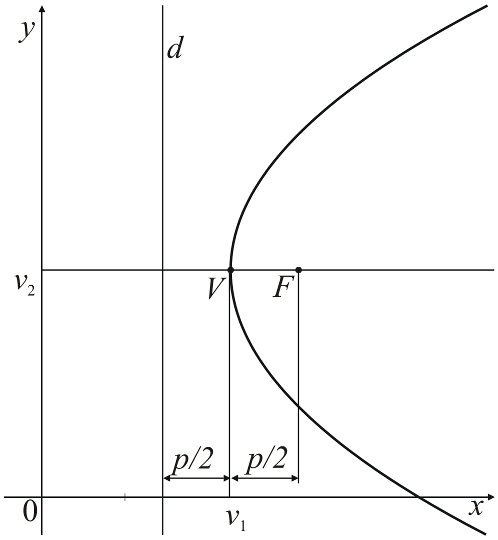
$^{1}o \parallel y \qquad y - n = \pm\frac{a}{b}(x - m)$.

Všeobecná rovnica hyperboly: $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, kde $A \neq B$ a $A \cdot B < 0$.

Parabola

Daná je priamka *d* a bod *F*, ktorý na nej neleží. Množina všetkých bodov roviny, ktorých vzdialenosť od bodu *F* a od priamky *d* je rovnaká, sa nazýva parabola.

Zápis: $\mathcal{P} = \{X \in E_2, |XF| = |Xd|\}$, kde $F \notin d$.



Obr. 11.10

- V – vrchol paraboly,
- F – ohnisko paraboly,
- $o = VF$ – os paraboly,
- d – riadiaca priamka,
- $p = |FD|$ – parameter paraboly, kde $D \in d \cap o$.

Nech $X = [x ; y]$ je ľubovoľný bod paraboly a $V = [v_1 ; v_2]$ je vrchol paraboly.

Vrcholová rovnica paraboly:

ak $o \parallel x \qquad (y - v_2)^2 = \pm 2p(x - v_1)$,

ak $o \parallel y \qquad (x - v_1)^2 = \pm 2p(y - v_2)$.

Všeobecná rovnica paraboly:

$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, kde $A \neq 0$, $B = 0$, $D \neq 0$ alebo $A = 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$.

11.4 Analytické vyjadrenia vzájomných polôh lineárnych a kvadratických útvarov

Vzájomná poloha bodu a priamky:

- ak bod $[x_0; y_0]$ patrí priamke, jeho súradnice vyhovujú rovnici (rovniciam) priamky,
- ak bod $[x_0; y_0]$ nepatrí priamke, jeho súradnice nevyhovujú rovnici (rovniciam) priamky,

Ak bod $[x_0; y_0]$ nepatrí priamke $ax + by + c = 0$, tak jeho vzdialenosť od priamky určíme podľa vzťahu:

$$\rho = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} .$$

Vzájomná poloha dvoch priamok:

- **určených smernicovými rovnicami** $p : y = k_1 x + q_1$ a $q : y = k_2 x + q_2$

a) priamky sú rovnobežné, ak $k_1 = k_2$ a $q_1 \neq q_2$,

b) priamky sú splývajúce (totožné), ak $k_1 = k_2$ a $q_1 = q_2$,

c) priamky sú rôznobežné, ak $k_1 \neq k_2$,

d) priamky sú na seba kolmé, ak $k_1 \cdot k_2 = -1$.

- **určených parametrickými rovnicami** $p : x = a_1 + tu_1,\ y = a_2 + tu_2$, kde $t \in \boldsymbol{R}$ a q: $x = b_1 + sv_1,\ y = b_2 + sv_2$, kde $s \in \boldsymbol{R}$

a) priamky sú rovnobežné, ak $(u_1; u_2) = k \cdot (v_1; v_2)$ a $[a_1; a_2] \neq [b_1; b_2] + c \cdot (u_1; u_2)$, kde $c \neq 0$,

b) priamky sú splývajúce (totožné), ak $(u_1; u_2) = k \cdot (v_1; v_2)$ a $[a_1; a_2] = [b_1; b_2] + c \cdot (u_1; u_2)$, kde $c \neq 0$,

c) priamky sú rôznobežné, ak $(u_1; u_2) \neq k \cdot (v_1; v_2)$,

d) priamky sú na seba kolmé, ak $u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0$.

- **určených všeobecnými rovnicami** p: $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ a q: $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ pričom $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \boldsymbol{R}$, $(a_1; b_1) \neq (0; 0)$, $(a_2; b_2) \neq (0; 0)$

a) priamky sú rovnobežné, ak $a_1 : a_2 = b_1 : b_2 \neq c_1 : c_2$,

b) priamky sú splývajúce (totožné), ak $a_1 : a_2 = b_1 : b_2 = c_1 : c_2$,

c) priamky sú rôznobežné, ak $a_1 : a_2 \neq b_1 : b_2$.

- **jedna je určená parametricky** $q : x = a_1 + tu_1,\ y = a_2 + tu_2,\ t \in \boldsymbol{R}$ a **jedna všeobecne** $p : ax + by + c = 0$, $a, b, c \in \boldsymbol{R}$, $(a; b) \neq (0; 0)$

za x a y dosadíme z parametrických rovníc q do všeobecnej rovnice p a podľa počtu riešení určíme vzájomnú polohu:

a) priamky sú rovnobežné, ak rovnica nemá riešenie,

b) priamky sú splývajúce, ak má rovnica nekonečne veľa riešení,

c) priamky sú rovnobežné, ak má rovnica jedno riešenie.

Uhol dvoch priamok

Uhol φ dvoch priamok je ostrý alebo pravý. Určíme ho ako uhol smerových vektorov $\boldsymbol{s}_1$, $\boldsymbol{s}_2$ týchto priamok $\cos\varphi = \dfrac{|s_1 \cdot s_2|}{|s_1||s_2|}$, resp. normálových vektorov $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$ týchto priamok $\cos\varphi = \dfrac{|n_1 \cdot n_2|}{|n_1||n_2|}$, alebo pomocou ich smerníc k_1, k_2 zo vzťahu $\operatorname{tg}\varphi = \left|\dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right|$.

Vzájomná poloha priamky a kužeľosečky:

Ak je priamka daná všeobecnou rovnicou $p: ax + by + c = 0$ a kužeľosečka rovnicou $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, potom riešime sústavu dvoch rovníc s dvoma neznámymi. Z lineárnej rovnice vyjadríme y resp. x a dosadíme do rovnice kužeľosečky. Dostaneme kvadratickú rovnicu tvaru $A_1 x^2 + B_1 x + C_1 = 0$, resp. $A_2 y^2 + B_2 y + C_2 = 0$ s diskriminantom D_1, resp. D_2.

O vzájomnej polohe priamky a kužeľosečky pre $i = 1$, resp. 2 platí:

- $A_i \neq 0 \wedge D_i = 0 \Rightarrow$ existuje jediné reálne riešenie, priamka a kužeľosečka majú spoločný práve jeden bod a priamku *p* nazývame dotyčnicou kužeľosečky,
- $A_i \neq 0 \wedge D_i > 0 \Rightarrow$ existujú dve rôzne reálne riešenia, priamka a kužeľosečka majú dva spoločné body a priamku *p* nazývame sečnicou kužeľosečky,
- $A_i \neq 0 \wedge D_i < 0 \Rightarrow$ neexistuje žiadne riešenie v $\boldsymbol{R}$, priamka a kužeľosečka nemajú spoločné body a priamku *p* nazývame nesečnicou kužeľosečky,
- $A_i = 0 \wedge D_i \neq 0 \Rightarrow$ existuje jediné reálne riešenie, priamka a kužeľosečka majú spoločný práve jeden bod a priamku *p* nazývame sečnicou kužeľosečky (tento prípad môže nastať len u hyperboly – ak je priamka rovnobežná s niektorou asymptotou alebo u paraboly – ak je priamka rovnobežná s osou paraboly).

Rovnice dotyčníc ku kužeľosečkám

Nech bod $T = [x_0; y_0]$ je dotykovým bodom a

- kružnica je daná rovnicou $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$, potom jej dotyčnica má rovnicu:

$$(x-m)(x_0-m) + (y-n)(y_0-n) = r^2,$$

- elipsa je daná rovnicou $\dfrac{(x-m)^2}{a^2} + \dfrac{(y-n)^2}{b^2} = 1$, potom jej dotyčnica má rovnicu:

$$\frac{(x-m)(x_0-m)}{a^2} + \frac{(y-n)(y_0-n)}{b^2} = 1,$$

- elipsa je daná rovnicou $\dfrac{(x-m)^2}{b^2} + \dfrac{(y-n)^2}{a^2} = 1$, potom jej dotyčnica má rovnicu:

$$\frac{(x-m)(x_0-m)}{b^2}+\frac{(y-n)(y_0-n)}{a^2}=1,$$

- hyperbola je daná rovnicou $\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$, potom jej dotyčnica má rovnicu:

$$\frac{(x-m)(x_0-m)}{a^2}-\frac{(y-n)(y_0-n)}{b^2}=1,$$

- hyperbola je daná rovnicou $-\frac{(x-m)^2}{b^2}+\frac{(y-n)^2}{a^2}=1$, potom jej dotyčnica má rovnicu:

$$-\frac{(x-m)(x_0-m)}{b^2}+\frac{(y-n)(y_0-n)}{a^2}=1,$$

- parabola je daná rovnicou $(y-v_2)^2=\pm 2p(x-v_1)$, potom jej dotyčnica má rovnicu:

$$(y-v_2)(y_0-v_2)=\pm p(x+x_0-2v_1),$$

- parabola je daná rovnicou $(x-v_1)^2=\pm 2p(y-v_2)$, potom jej dotyčnica má rovnicu:

$$(x-v_1)(x_0-v_1)=\pm p(y+y_0-2v_2).$$

Poznámka. Ak zisťujeme vzájomnú polohu dvoch kužeľosečiek, tzn. hľadáme ich spoločné body, tak riešime sústavu dvoch kvadratických rovníc s dvoma neznámymi, krivky môžu mať najviac 4 spoločné body. (Príklad: vzájomná poloha 2 kružníc – vhodným sčítaním násobkov ich rovníc dostávame priamku, ďalej postupujeme, ako v prípade vzájomnej polohy kružnice a priamky.)

11.5 Rovnice útvarov v priestore

Rovnice roviny

Normálová rovnica roviny

Podobnou úvahou ako pre priamku v rovine dostávame normálovú rovnicu roviny určenej bodom X_0 a normálovým vektorom $\boldsymbol{n}$

$$(X - X_0)\cdot \boldsymbol{n} = 0\,.$$

Ak sú súradnice normálového vektora $\boldsymbol{n} = (a;\ b;\ c)$ a určujúceho bodu $P = [x_0;\ y_0;\ z_0]$, tak rozpísaním do súradníc dostávame

$$a\,(x-x_0) + b\,(y-y_0) + c\,(z-z_0) = 0\,.$$

Po úprave dostávame všeobecnú rovnicu roviny.

Všeobecná rovnica roviny je rovnica v tvare

$$a\,x + b\,y + c\,z + d = 0, \text{ kde } a, b, c, d \text{ sú reálne čísla a } (a;\ b;\ c) \neq (0;\ 0;\ 0).$$

Ich geometrický význam je podobný ako vo všeobecnej rovnici priamky v rovine. Vektor $\boldsymbol{n} = (a;\ b;\ c)$ je normálový vektor roviny a číslo $-d$ je rovné jeho skalárnemu súčinu s polohovým vektorom ľubovoľného bodu roviny.

Polpriestory určené touto rovinou majú nerovnice

$$a\,x + b\,y + c\,z + d \leq 0 \quad \text{a} \quad a\,x + b\,y + c\,z + d \geq 0\,.$$

Poznamenajme, že rovnicu roviny sme mohli tiež hľadať podobným spôsobom ako rovnicu priamky danej dvomi bodmi, t. j. dosadením súradníc daných bodov do všeobecnej rovnice roviny a riešením sústavy lineárnych rovníc.

Iná možnosť je založená na nasledujúcej úvahe. Predpokladajme, že máme nájsť všeobecnú rovnicu roviny určenej tromi bodmi $A = [x_0;\ y_0;\ z_0]$, $B = [x_1;\ y_1;\ z_1]$, a $C = [x_2;\ y_2;\ z_2]$. Ľubovoľný bod $X = [x;\ y;\ z]$ leží v tejto rovine práve vtedy, ak trojica vektorov $X - A$, $B - A$ a $C - A$ umiestnená v spoločnom začiatku A leží v tej istej rovine. To platí práve vtedy, ak tieto vektory nevytvoria skutočný rovnobežnosten, ale jeho priemet do roviny, inak povedané objem vytvoreného rovnobežnostena bude 0. Použitím vzťahu pre zmiešaný súčin dostávame

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Úsekový tvar rovnice roviny

Nech rovina α pretína os x v bode $P = [p;\ 0;\ 0]$, os y v bode $Q = [0;\ q;\ 0]$ a os z v bode $R = [0;\ 0;\ r]$. Potom pod úsekovou rovnicou roviny α rozumieme rovnicu

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1\,.$$

Ak je niektoré číslo z trojice p, q, r rovné nule, tak je rovina rovnobežná s príslušnou súradnicovou osou. Rovina prechádzajúca začiatkom súradnicovej sústavy nemá úsekový tvar rovnice.

Parametrické rovnice roviny

Ak poznáme jeden bod roviny X_0 a tiež jej dva nerovnobežné smerové vektory $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{s}$, tak ľubovoľný bod X priestoru leží v danej rovine práve vtedy, ak vektor $X - X_0$ je lineárnou kombináciou vektorov $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{s}$. To znamená, že existujú také reálne čísla t a u, že platí

$$X - X_0 = t\,r + u\,s$$

Rozpísaním tejto rovnice v súradniciach dostávame parametrické rovnice roviny určenej bodom $X_0 = [x_0;\ y_0;\ z_0]$ a smerovými vektormi $\boldsymbol{r} = (r_1;\ r_2;\ r_2)$ a $\boldsymbol{s} = (s_1;\ s_2;\ s_2)$

$$x = x_0 + t\,r_1 + u\,s_1,$$
$$y = y_0 + t\,r_2 + u\,s_2,$$
$$z = z_0 + t\,r_3 + u\,s_3.$$

V týchto rovniciach parametre t a u sú ľubovoľné reálne čísla. Poznamenávame, že vo väčšine prípadov je práca s parametrickými rovnicami roviny dosť komplikovaná, a preto sa prakticky menej používajú.

Rovnice priamky

Parametrické rovnice priamky v priestore sú analogické rovniciam v rovine. Ich vektorový tvar pre priamku určenú bodom $X_0 = [x_0;\ y_0;\ z_0]$ a smerovým vektorom $\boldsymbol{s} = (s_1;\ s_2;\ s_2)$ je

$$[x;\ y;\ z] = [x_0 + t\,s_1;\ y_0 + t\,s_2;\ z_0 + t\,s_3], \text{ kde } t \in \boldsymbol{R}.$$

Priamka v priestore nemá všeobecnú rovnicu, pretože v priestore nie je možné jednoznačne určiť smer jej normálového vektora.

Rovnica guľovej plochy

Guľová plocha určená stredom $S = [x_0; y_0; z_0]$ a polomerom r má rovnicu

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2.$$

11.6 Analytické vyjadrenia vzájomných polôh priamok a rovín v priestore

Vzájomná poloha dvoch priamok:

Nech p: $x = a_1 + t\,u_1$, $y = a_2 + t\,u_2$, $z = a_3 + t\,u_3$, kde $t \in \boldsymbol{R}$ a q: $x = b_1 + s\,v_1$, $y = b_2 + s\,v_2$, $z = b_3 + s\,v_3$, kde $s \in \boldsymbol{R}$:

a) priamky sú rovnobežné, ak

$$(u_1; u_2; u_3) = k\cdot(v_1; v_2; v_3) \text{ a } [a_1; a_2; a_3] \neq [b_1; b_2; b_3] + c\cdot(u_1; u_2; u_3), \text{ kde } c \neq 0,$$

b) priamky sú splývajúce (totožné), ak

$$(u_1; u_2; u_3) = k\cdot(v_1; v_2; v_3) \text{ a } [a_1; a_2; a_3] = [b_1; b_2; b_3] + c\cdot(u_1; u_2; u_3), \text{ kde } c \neq 0,$$

c) priamky sú rôznobežné, ak $(u_1; u_2; u_3) \neq k\cdot(v_1; v_2; v_3)$

a $(b_1 - a_1; b_2 - a_2; b_3 - a_3) = c_1\cdot(u_1; u_2; u_3) + c_2\cdot(v_1; v_2; v_3)$, kde $(c_1; c_2) \neq (0; 0)$,

d) priamky sú mimobežné, ak $(u_1; u_2; u_3) \neq k\cdot(v_1; v_2; v_3)$

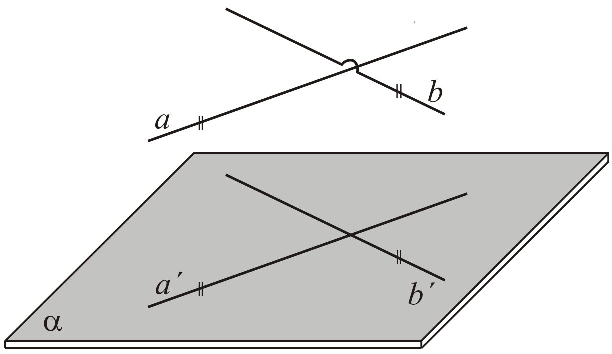
a $(b_1 - a_1; b_2 - a_2; b_3 - a_3) \neq c_1\cdot(u_1; u_2; u_3) + c_2\cdot(v_1; v_2; v_3)$, kde $(c_1; c_2) \neq (0; 0)$.

Uhol dvoch priamok v priestore

Uhol priamok v priestore určíme podobne ako uhol priamok v rovine, ak ležia obe priamky v jednej rovine, pomocou ich smerových vektorov $(u_1; u_2; u_3)$ a $(v_1; v_2; v_3)$.

$$\cos\varphi = \frac{|u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\cdot\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

Pre zistenie uhla dvoch mimobežných priamok zostrojíme ľubovoľným bodom priestoru priamky rovnobežné s oboma mimobežkami a uhol týchto rôznobežiek je hľadaným uhol daných mimobežiek.



Obr. 11.11

Vzájomná poloha dvoch rovín:

Nech $\alpha: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ a $\beta: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ sú všeobecné rovnice týchto rovín, potom

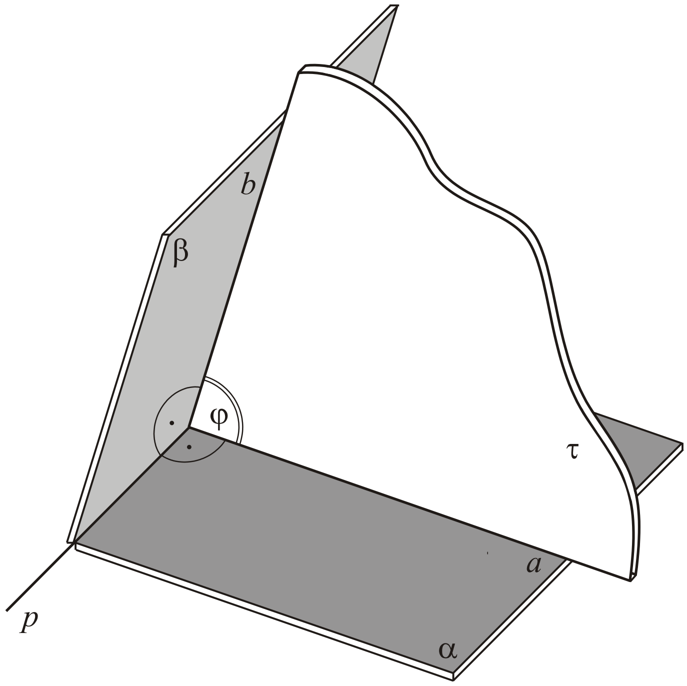
a) roviny sú rovnobežné, ak $a_1 : a_2 = b_1 : b_2 = c_1 : c_2 \neq d_1 : d_2$, nemajú spoločný bod,

b) roviny sú splývajúce (totožné), ak $a_1 : a_2 = b_1 : b_2 = c_1 : c_2 = d_1 : d_2$, všetky body majú spoločné,

c) roviny sú rôznobežné, ak $(a_1; a_2; a_3) \neq k \cdot (b_1; b_2; b_3)$, kde $k \in \boldsymbol{R} - \{0\}$, majú spoločné body jednej priamky.

Uhol dvoch rovín

Uhol dvoch rovnobežných rovín je nulový uhol. Uhlom dvoch rôznobežných rovín sa nazýva uhol dvoch priamok, ktoré ležia v daných rovinách a sú kolmé na spoločnú priamku (priesečnicu) daných rovín.



Obr. 11.12

Pre výpočet veľkosti uhla dvoch rovín použijeme nasledovné tvrdenie:

Uhol dvoch rovín sa rovná uhlu dvoch priamok kolmých na dané dve roviny.

Teda uhol dvoch rovín vypočítame pomocou ich normálových vektorov $\boldsymbol{n}_\alpha$ a $\boldsymbol{n}_\beta$.

$$\cos\varphi = \frac{|n_\alpha \cdot n_\beta|}{|n_\alpha||n_\beta|}.$$

Vzájomná poloha priamky a roviny:

Nech p: $x = x_0 + ts_1$, $y = y_0 + ts_2$, $z = z_0 + ts_3$, kde $t \in \boldsymbol{R}$ sú parametrické rovnice priamky a $\alpha: ax + by + cz + d = 0$ je všeobecná rovnica roviny, potom

a) priamka p leží v rovine α, ak $as_1 + bs_2 + cs_3 = 0$ a $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$, t. j. smerový vektor $\boldsymbol{s} = (s_1; s_2; s_3)$ priamky p je kolmý na normálový vektor $\boldsymbol{n} = (a; b; c)$ roviny α a bod $X_0 = [x_0; y_0; z_0]$ priamky p leží v rovine α, všetky body priamky ležia v rovine,

b) priamka p je rovnobežná s rovinou α, ak $as_1 + bs_2 + cs_3 = 0$ a $ax_0 + by_0 + cz_0 + d \neq 0$, nemajú spoločný bod,

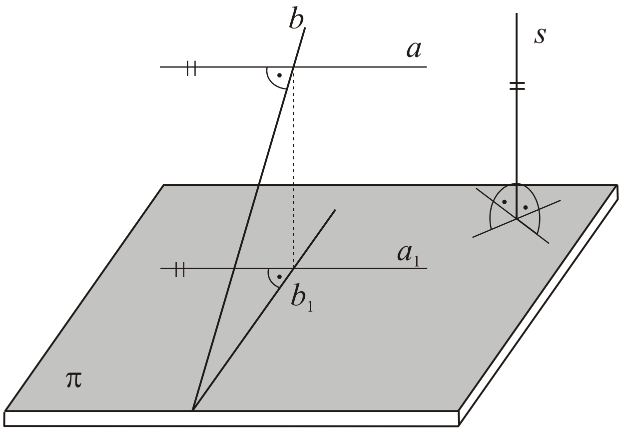
c) priamka p je rôznobežná s rovinou α, ak $as_1 + bs_2 + cs_3 \neq 0$, majú spoločný jeden bod (priesečník).

Poznámka. Pri riešení zvyčajne dosadzujeme parametrické rovnice priamky do všeobecnej rovnice roviny. Vzájomnú polohu priamky a roviny potom určíme podľa počtu riešení vzhľadom na neznámu *t* takto vzniknutej rovnice. Ak má rovnica jedno riešenie, potom sú rôznobežné, ak má nekonečne veľa riešení, potom priamka leží v rovine, ak nemá riešenie, potom sú rovnobežné.

Uhol priamky a roviny

Uhol priamky s rovinou, ak nie sú navzájom kolmé, nazývame uhol priamky s jej kolmým priemetom do danej roviny. Uhol priamky s rovinou, ak sú navzájom kolmé, je pravý. Uhol vypočítame pomocou smerového vektora $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_2)$ priamky a normálového vektora $\boldsymbol{n} = (a; b; c)$ roviny.

$$\sin\varphi = \frac{|s_1 a + s_2 b + s_3 c|}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$



Obr. 11.13

Vzdialenosť bodu od roviny

Vzdialenosť bodu od roviny nazývame vzdialenosť daného bodu od jeho kolmého priemetu do danej roviny. Ak bod leží v rovine, vzdialenosť sa rovná nule.

Nech je bod X daný súradnicami $X = [x_0; y_0; z_0]$ a rovina ρ daná všeobecnou rovnicou $\rho : ax + by + cz + d = 0$, potom pre vzdialenosť bodu X od roviny ρ platí:

$$|\rho, X| = \frac{|a x_0 + b y_0 + c z_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Kapitola bola spracovaná podľa literatúry [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [11], [12], [13], [17], [18], [20].

12 Kombinatorika

Kombinatorika je súčasť matematiky, ktorá študuje (spravidla) konečné množiny objektov, ktoré vyhovujú zadaným kritériám a zaoberá sa najmä „počítaním“ objektov v týchto množinách a rozhodovaním, či isté objekty a množiny objektov vôbec existujú.

Typický príklad, na ktorý kombinatorika vie nájsť odpoveď, je takýto: Aký je počet všetkých usporiadaní balíčka 52 hracích kariet?

Nech je daná konečná neprázdna množina, ktorá má n prvkov, $n \in \boldsymbol{N}$. Z tejto množiny budeme vytvárať skupinky a budeme si klásť otázky:

a) či sa prvky v danej skupinke opakujú alebo sa neopakujú,

b) či zmenou poradia vznikne nový objekt, t. j. či na poradí prvkov záleží alebo nezáleží.

Ak má konkrétna skupinka k prvkov, ktoré nejakým spôsobom usporiadame, hovoríme o usporiadanej k-tici.

Poznámka: V nasledujúcich výrazoch sa čitateľ bude často stretávať s pojmom faktoriál kladného celého čísla n, ktorý označuje súčin všetkých kladných celých čísel menších alebo rovných n. Zapisuje sa $n!$ a číta sa „n-faktoriál“.
Teda $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$.
Napríklad: $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Samostatne je definovaný 0-faktoriál: $0! = 1$.

12.1 *Variácie bez opakovania*

Variácie k-tej triedy z n prvkov bez opakovania sú všetky usporiadané k-tice z tejto n-prvkovej množiny, pričom $k < n$ a všetky prvky k-tice sú navzájom rôzne. Každé dve usporiadané k-tice sa líšia usporiadaním svojich prvkov, t. j. záleží na poradí prvkov.
Počet variácií k-tej triedy z n prvkov bez opakovania vypočítame zo vzťahu

$$V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!} \ .$$

12.2 *Permutácie bez opakovania*

Ak tvoríme usporiadané n-tice z n-prvkovej množiny, pričom všetky prvky n-tice sú navzájom rôzne, potom hovoríme o permutáciách bez opakovania, t. j. permutácie bez opakovania sú variácie bez opakovania pre $n = k$ a teda tiež záleží na poradí prvkov.
Na určenie počtu permutácií bez opakovania dosadíme do predchádzajúceho vzťahu n za k.

$$P(n) = V_n(n) = \frac{n!}{(n-n)!} = n! \quad \Rightarrow \qquad P(n) = n!$$

12.3 *Kombinácie bez opakovania*

Kombinácia k-tej triedy z n prvkov bez opakovania je ľubovoľná k-prvková podmnožina n-prvkovej množiny. Je zrejmé, že $k \leq n$. Počet všetkých kombinácií k-tej triedy sa teda často využíva pri riešení úloh, kde je potrebné zistiť, koľkými spôsobmi možno vybrať spomedzi n prvkov skupinku k prvkov, pričom nezáleží na poradí výberu, t. j. ak zameníme poradie prvkov podmnožiny, máme stále tú istú kombináciu. Počet kombinácií k-tej triedy z n prvkov bez opakovania vypočítame zo vzťahu

$$C_k(n) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \ .$$

Počet kombinácií k-tej triedy z n prvkov bez opakovania nazývame tiež kombinačné číslo, zapisujeme ho $C_k(n) = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} = \dbinom{n}{k}$ a čítame n nad k.

Základné vlastnosti kombinačných čísel:

1. Pre každé $n \in \boldsymbol{N}$ platí: $\dbinom{n}{0} = \dbinom{n}{n} = 1$
2. Pre každé $n \in \boldsymbol{N}$ platí: $\dbinom{n}{1} = n$
3. Pre každé $k, n \in \boldsymbol{N}$ a $k \le n$ platí: $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$
4. Pre každé $k, n \in \boldsymbol{N}$ a $k < n$ platí: $\dbinom{n}{k} + \dbinom{n}{k+1} = \dbinom{n+1}{k+1}$ $\quad \dbinom{n}{k+1} = \dbinom{n}{k}\dfrac{n-k}{k+1}$

Pascalov trojuholník je schéma kombinačných čísel, ktorú môžeme takto zapísať – v každom riadku sa prvé (posledné) kombinačné číslo píše o jedno miesto doľava (doprava) oproti prvému (poslednému) kombinačnému číslu v predchádzajúcom riadku. Ostatné kombinačné čísla sa píšu medzi dve susedné čísla predchádzajúceho riadku. Krajné čísla sú 1 a každé ďalšie číslo v schéme sa rovná súčtu dvoch kombinačných čísel z predchádzajúceho riadku, ktoré sú nad týmto kombinačným číslom.

$n = 0$					1				
$n = 1$				1		1			
$n = 2$			1		2		1		
$n = 3$		1		3		3		1	
$n = 4$	1		4		6		4		1

$n = 0$ $\qquad \binom{0}{0}$

$n = 1$ $\qquad \binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$

$n = 2$ $\qquad \binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$

$n = 3$ $\qquad \binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$

$n = k$ $\qquad \binom{k}{0} \quad \binom{k}{1} \quad \ldots \quad \binom{k}{k-1} \quad \binom{k}{k}$

Binomická veta – pre ľubovoľné $a, b \in \boldsymbol{R}$ a pre každé $n \in \boldsymbol{N}$ platí:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n-2} a^2 b^{n-2} + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n .$$

Binomický rozvoj $(a+b)^n$ má $n+1$ sčítancov. Čísla v jednom riadku Pascalovho trojuholníka sú vlastne koeficienty rozvoja $(a+b)^n$ pre odpovedajúce *n*.

Pre k-ty člen binomického rozvoja $(a+b)^n$ platí: $A_k = \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^{k-1}$.

12.4 Variácie s opakovaním

Každú usporiadanú *k*-ticu prvkov vybranú z *n*-prvkovej množiny nazývame variácia *k*-tej triedy z *n* prvkov s opakovaním, ak môžeme prvky ľubovoľne veľa krát zaradiť do *k*-tice a každé dve usporiadané *k*-tice sa líšia usporiadaním svojich prvkov, t. j. záleží na poradí prvkov. Pri variáciách s opakovaním môžeme uvažovať $k < n$ alebo $k = n$ alebo $k > n$. Pre počet všetkých usporiadaných *k*-tic s opakovaním platí:

$$V'_k(n) = n^k.$$

12.5 Permutácie s opakovaním

Každá usporiadaná *n*-tica vytvorená z týchto *n* prvkov, pričom sa ľubovoľné prvky základnej množiny v tejto *n*-tici môžu ľubovoľne krát opakovať, sa nazýva permutácia z *n* prvkov s opakovaním. Každé dve usporiadané *n*-tice sa líšia usporiadaním svojich prvkov, t. j. záleží na poradí prvkov. Pre počet $P'(n)$ všetkých permutácií z *n* prvkov s opakovaním platí:

$$P'(n) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!},$$

kde *n* je počet prvkov uvažovanej základnej množiny, z toho n_1 je počet prvkov 1.druhu, n_2 je počet prvkov 2.druhu, ... , n_k je počet prvkov *k*-teho druhu, pričom $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

12.6 Kombinácie s opakovaním

Každá k-prvková podmnožina n-prvkovej množiny, v ktorej sa ľubovolné prvky vyskytujú ľubovoľne veľa krát, sa nazýva kombinácia k-tej triedy z n prvkov s opakovaním. Pri kombináciách s opakovaním nezáleží na poradí výberu, t. j. ak zameníme poradie prvkov podmnožiny, máme stále tú istú kombináciu. Pri kombináciách s opakovaním môžeme uvažovať $k < n$ alebo $k = n$ alebo $k > n$. Pre počet $C'_k(n)$ všetkých k-tic z n prvkov platí:

$$C'_k(n) = \binom{n+k-1}{k}.$$

Kapitola bola spracovaná podľa literatúry [1], [4], [7], [17].

13 Pravdepodobnosť a štatistika

13.1 Pravdepodobnosť

Pojem pravdepodobnosť spájame s náhodnými udalosťami, ktoré sa majú v budúcnosti odohrať. Napríklad sa pokúšame odhadnúť tip na výsledok športového podujatia, tipujeme čísla v lotérii. Pravdepodobnosť je reálne číslo, ktoré intuitívne chápeme ako kvantitatívne ohodnotenie stupňa istoty.

Náhodný pokus je pokus, ktorého výsledok sa môže meniť, napriek tomu, že zachovávame rovnaké podmienky pri vykonávaní pokusu. Výsledok náhodného pokusu je ***elementárny jav***. Množina všetkých elementárnych javov je ***základný priestor***. Podmnožiny základného priestoru nazývame ***náhodné javy***. Náhodné javy označujeme veľkými písmenami, napr. A, B, ...

Každý náhodný pokus spĺňa nasledovné predpoklady:

- počet všetkých výsledkov je konečný alebo patrí určitému intervalu,
- všetky výsledky sú rovnako možné,
- žiadne dva výsledky nemôžu nastať súčasne.

Pre pravdepodobnosť $P(A)$ náhodného javu A platí :

Pravdepodobnosť $P(A)$ každého javu	$0 \leq P(A) \leq 1$
Pravdepodobnosť $P(A)$ nemožného javu	$P(A) = 0$
Pravdepodobnosť $P(A)$ istého javu	$P(A) = 1$

Operácie s náhodnými javmi:

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, kde opačný jav $\overline{A}$ nastáva práve vtedy, keď nenastáva jav A,
- ak $A \cap B = \emptyset$, tak sa javy A a B navzájom vylučujú,
- nech $A \cap B \neq \emptyset$, potom nastáva prienik práve vtedy, keď nastanú oba javy A a B súčasne,
- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ vtedy a len vtedy, ak sú javy nezávislé,
- $A \cup B$ – zjednotenie javov nastáva práve vtedy, keď nastane aspoň jeden z javov A a B,
- pre ľubovoľné javy A, B platí $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,
- ak sú javy A, B nezlúčiteľné (disjunktné), čiže $A \cap B = \emptyset$, potom $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$,
- ak $A \cap B = \emptyset$ a $A \cup B = S$, kde S je základný priestor, potom $P(A \cap B) = 0$ a $P(A) + P(B) = 1$.

Klasická definícia pravdepodobnosti

Pravdepodobnosť javu A je číslo $P(A) = \frac{m}{n}$, kde n je počet všetkých možných výsledkov náhodného pokusu a m je počet všetkých priaznivých výsledkov, t. j. výsledkov, pri ktorých nastane jav A.

Geometrická pravdepodobnosť

Ak $m(A)$ je miera (veľkosť) množiny A a $m(\Omega)$ je miera množiny Ω, pričom $A \subset \Omega$, potom pravdepodobnosť javu A je číslo $P(A) = \dfrac{m(A)}{n(\Omega)}$, kde $m(A)$, $m(\Omega)$ sú vyjadrené v rovnakých jednotkách miery (dĺžky, obsahu, objemu, ...).

Podmienená pravdepodobnosť

Pravdepodobnosť $P(A)$ náhodného javu A závisí od podmienok, pri ktorých prebieha daný pokus. Za stálych podmienok je táto pravdepodobnosť konštantná. Ak sa zmenia podmienky pokusu, pri ktorom nastáva jav A, môže sa zmeniť aj jeho pravdepodobnosť. Zaujíma nás pravdepodobnosť javu A, keď sa zmenia podmienky pokusu v tom zmysle, že vieme, že jav B už nastal.

Pravdepodobnosť javu *A* za podmienky, že jav *B* už nastal

Ak $A|B$ je jav podmienený javom B, tak pravdepodobnosť $P(A|B)$ tohto javu sa nazýva podmienená pravdepodobnosť a definuje sa vzťahom:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ pričom } P(B) \neq 0.$$

Binomické rozdelenie pravdepodobnosti (Bernoulliho schéma)

Nech A je jav s pravdepodobnosťou p. Potom pravdepodobnosť, že pri n-násobnom opakovaní pokusu za rovnakých podmienok, jav A nastane práve k-krát, je číslo

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \text{ pričom } k = 0, 1, 2, ..., n.$$

Hypergeometrické rozdelenie pravdepodobnosti

Predpokladajme, že v súbore N prvkov má m prvkov určitú vlastnosť. Potom $N - m$ prvkov túto vlastnosť nemá. Zo súboru náhodne vyberieme n prvkov, bez toho aby sme ich vracali späť do pôvodného súboru (tzv. výber bez opakovania). Počet prvkov s danou vlastnosťou, ktoré boli vybrané do výberu, je náhodná premenná X, ktorá môže nadobúdať hodnoty z množiny $\{0, 1, 2, ..., n\}$ a tvorí hypergeometrické rozdelenie. Teda ak náhodná premenná X má hypergeometrické rozdelenie s parametrami N, m a n, potom pravdepodobnosť, že spomedzi n náhodne vybraných prvkov má túto danú vlastnosť práve k prvkov, je číslo

$$P(X = k) = \frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Hypergeometrické rozdelenie sa líši od binomického v tom, že je rozdelením pri výbere bez vrátenia, t. j. náhodne vybrané jednotky nevraciame späť do základného súboru a jednotlivé opakované pokusy sú závislé od výsledkov predchádzajúcich pokusov. U binomického rozdelenia pravdepodobnosť úspechu je rovnaká, kým u hypergeometrického rozdelenia sa pravdepodobnosť úspechu mení po každom pokuse. Ak je N počet prvkov súboru veľký a k a pomer $m : N$ sa nemenia, môžeme hypergeometrické rozdelenie aproximovať binomickým.

Pravdepodobnosti zložitých udalostí

Pri výpočte pravdepodobností zložitejších udalostí je často užitočné nasledujúce pravidlo označované niekedy ako veta o úplnej pravdepodobnosti.

Najskôr však definujme pojem úplný systém vzájomne sa vylučujúcich javov:

Úplný systém vzájomne sa vylučujúcich javov nazývame systém javov $A_1, A_2, \dots, A_n$, ktoré sú po dvoch disjunktné, t. j. $A_i \cap A_j = \emptyset$ pre $i \neq j$, a súčasne ich zjednotenie tvorí istý jav, t. j. $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$.

Veta o úplnej pravdepodobnosti

Nech $A_1, A_2, \dots, A_k$ tvorí úplný systém vzájomne sa vylučujúcich javov, teda ich pravdepodobnosti spĺňajú podmienky:

- $P(A_i) > 0$ pre $i = 1, 2, \dots, k$,
- $P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i) = 1$.

Nech B je ľubovoľný jav, pre ktorý podmienené pravdepodobnosti $P(B|A_i)$ sú pre každé i známe. Potom pravdepodobnosť javu B sa rovná

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(B|A_i) \cdot P(A_i).$$

Bayesova veta

Ak javy A_i , $i = 1, 2, \dots, k$ tvoria úplný systém javov a B je ľubovoľný jav, potom pre výpočet pravdepodobnosti javu A_i podmienenej javom B platí:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)\,P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(A_i)\,P(B|A_i)}.$$

Poznámka. Bayesova veta sa nazýva aj veta o pravdepodobnosti hypotéz alebo veta o inverznej pravdepodobnosti. Je dôsledkom základných vlastností podmienenej pravdepodobnosti. Náhodné javy A_i ($i = 1, 2, \dots, k$) v uvedených vzťahoch sa nazývajú *hypotézami*.

13.2 Štatistika

13.2.1 Základné pojmy

Štatistický prístup k skúmaniu prírodných a spoločenských javov sa zakladá na tom, že tieto javy nepozorujeme na jednotlivom prípade, ale na celom dostatočne rozsiahlom súbore prípadov. Tým jednak objavujeme zákonitosti, ktoré sa prejavujú až vo väčších súboroch, jednak dostávame spoľahlivejšie podklady pre svoje rozhodnutia.

Jednotlivé prípady, na ktorých pozorujeme skúmané javy, nazývame **štatistickými jednotkami** a nimi utvorený súbor nazývame **štatistickým súborom**. Jednotky daného súboru skúmame z hľadiska zvolených znakov (napr. vek, hmotnosť, farba). Každý znak je určený sústavou navzájom nezlučiteľných javov (napr. chlapec – dievča), z ktorých jeden nastáva vždy. Určiť hodnotu znaku znamená zistiť, ktorý z týchto javov nastal u danej jednotky.

Ak sa javy líšia kvalitou (napr. druh choroby, druh povolania, zrelosť), hovoríme o **kvalitatívnom znaku**. Ak sa javy líšia kvantitou (číselnou veľkosťou), ako napríklad vek, výška postavy, hmotnosť, hovoríme o **kvantitatívnom znaku** čiže **veličine**. Zisťovanie hodnôt zvolených znakov v určitom štatistickom súbore nazývame **štatistickým skúmaním**. Hodnoty štatistického znaku označujeme $x_1, x_2, ... , x_n$.

Triedou nazývame ľubovoľný čiastkový súbor skúmaného štatistického súboru zložený z jednotiek, ktoré majú spoločný určitý jav. Vytvorenie navzájom neprekrývajúcich sa tried, z ktorých každá zodpovedá jednému z javov (jednej z hodnôt) rozlišovaných pri danom znaku, nazývame **triedením podľa** tohto **znaku**. Triedenie je teda usporiadanie dát do skupín podľa určitého štatistického znaku javu tak, aby čo najlepšie vynikli vlastnosti tohto javu.

Triedenie štatistických znakov podľa početnosti znaku x_i **:**

- **Rozsah** štatistického súboru je počet prvkov štatistického súboru – množiny M, označujeme ho $|M| = n$.
- **Absolútna početnosť** javu A_i je číslo, ktoré udáva, koľkokrát bol tento jav zistený v súbore M, koľkokrát sa vyskytuje hodnota znaku x_i. Absolútnu početnosť označujeme n_i. Nech teda n je rozsah súboru a $n_1, n_2, ... , n_k$ sú absolútne početnosti javov $A_1, A_2, ... , A_k$, potom platí:

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_k.$$

- **Relatívna početnosť** javu A_i je podiel $\frac{n_i}{n}$, kde n_i je absolútna početnosť javu A_i a n je rozsah súboru M. Pre relatívne početnosti platí:

$$\frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} + \frac{n_3}{n} + ... + \frac{n_k}{n} = 1.$$

  Relatívnu početnosť nazývame tiež štatistická početnosť. Pomocou relatívnych početností možno porovnať, ktorá udalosť v danej sérii pokusov nastala častejšie a ktorá zriedkavejšie. Udalosť s väčšou relatívnou početnosťou nastala častejšie, ako udalosť s menšou relatívnou početnosťou. Ak sa urobí viac sérii toho istého pokusu, možno sa presvedčiť, že relatívna početnosť vykazuje štatistickú stabilitu, t. j. s rastúcim počtom pokusov relatívna početnosť kolíše stále v užších medziach okolo určitej pevnej hodnoty. Táto zákonitosť sa využíva pri definícii pravdepodobnosti.
- **Kumulatívna početnosť** javu A_i sa získa sčítaním (kumulovaním) hodnôt početností. Udáva, koľko prvkov štatistického súboru má hodnotu znaku menšiu, alebo rovnú danej hodnote.

Rozdelenie absolútnych početností je množina výsledkov štatistického skúmania, t. j. všetky získané hodnoty znaku a im odpovedajúce absolútne početnosti. Toto rozdelenie zadávame vo forme tabuľky, ktorú nazývame **tabuľka rozdelenia početností**. Z údajov v štatistickom súbore so znakom x môžeme vždy zistiť rozdelenie relatívnych početností znaku. Naopak, z tabuľky rozdelenia relatívnych početností nemôžeme zistiť absolútne početnosti výskytov hodnôt znaku.

13.2.2 Spracovanie štatistického súboru

Spracovanie štatistického súboru vykonávame pomocou grafov a tabuliek.

Príklad. V istej školskej triede boli namerané tieto hodnoty výšok žiakov, ktoré sú usporiadané do takejto tabuľky rozdelenia početností, v ktorej sú zistené hodnoty v 1. stĺpci usporiadané vzostupne.

x_i	n_i	$\frac{n_i}{n}$
170	2	0,1
172	5	0,25
174	8	0,4
176	3	0,15
179	2	0,1

Tab. 13.1

Tabuľka rozdelenia početností nám umožňuje získať niektoré informácie rýchlo a v prehľadnej forme. Napríklad z tabuľky môžeme zistiť, koľko žiakov je v triede (sčítaním prvkov prvého stĺpca) alebo koľko žiakov má výšku menšiu ako 176 cm (sčítaním prvkov v prvých troch riadkoch druhého stĺpca). V prípade, že by sme chceli vyjadriť početnosť žiakov, ktorí majú výšku menšiu ako 176 cm v percentách, sčítame hodnoty v prvých troch riadkoch tretieho stĺpca (0,75) a vynásobíme číslom 100. Tak dostaneme hodnotu 75 %, t. j. 75 % žiakov je v triede nižších než 176 cm.

Z tejto tabuľky môžeme zostrojiť rôzne grafické spracovanie tohto štatistického súboru. Medzi najčastejšie grafické zobrazenia rozloženia početností štatistických jednotiek patrí polygón početnosti, histogram a kruhový diagram**:**

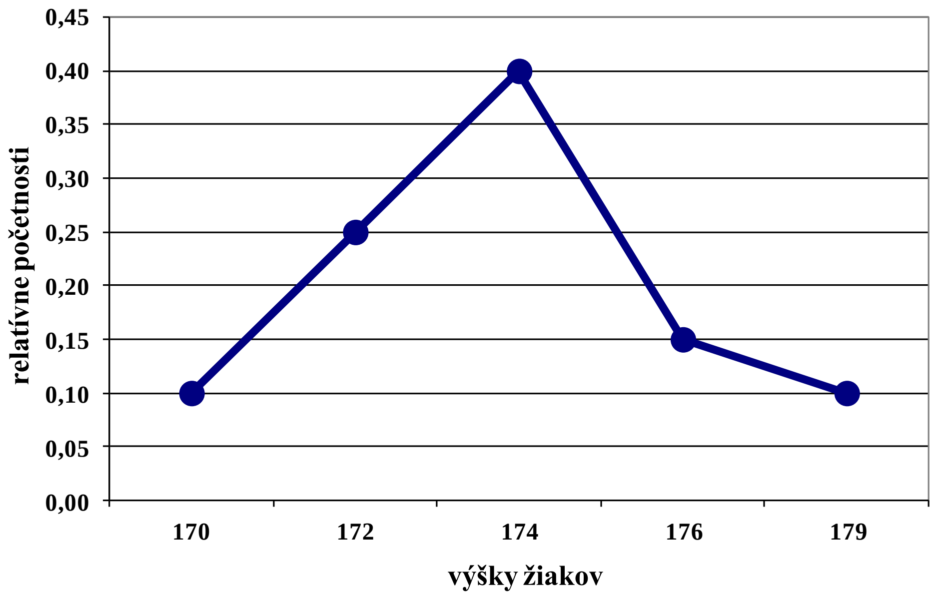
- **Polygón početnosti**

  Najznámejším grafom rozdelenia početností je polygón početnosti čiže spojnicový graf (obr. 13.1 a obr. 13.2). Je to graf, v ktorom sa na os *x* vynášajú sledované hodnoty štatistického znaku a na os *y* hodnota absolútnej lebo relatívnej početnosti odpovedajúcej danej hodnote znaku. Takto získané body sa spájajú úsečkami. Pre správne pochopenie musí polygón početnosti obsahovať nadpis a popis oboch osí s vyznačenými stupnicami. V grafe je možné zobraziť viac spojníc (farebne či inak odlíšených) pre rôzne skupiny respondentov.

1. *Polygón absolútnych početností*

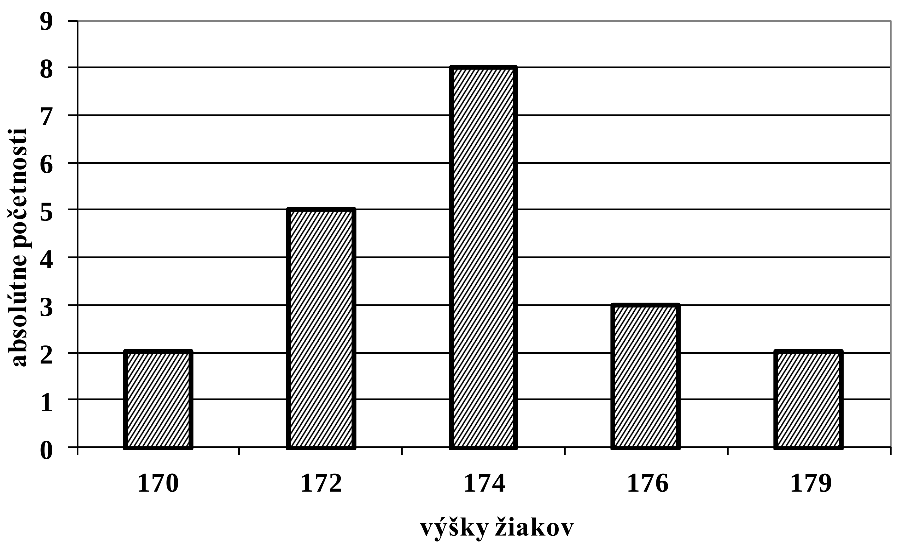
Graf 13.1

2. *Polygón relatívnych početností*



Graf 13.2

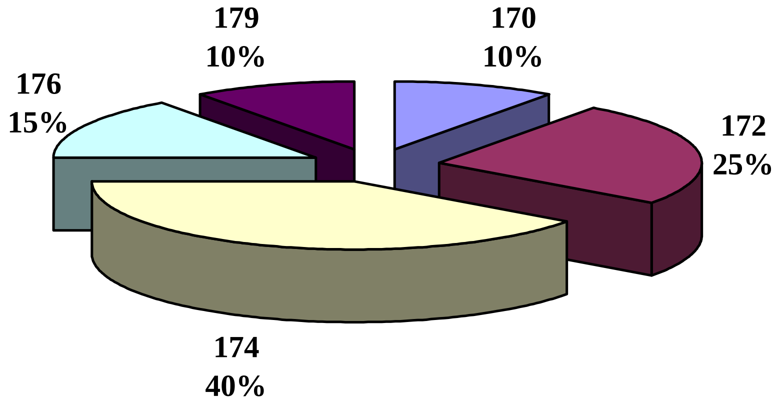
- **Histogram**



Graf 13.3

Histogram alebo histogram početností je stĺpcový diagram (stĺpikový graf) tvorený obdĺžnikmi, ktorých základne (na osi *x*) majú dĺžku zvolených intervalov, a ktorých výšky (na osi *y*) majú veľkosť príslušných absolútnych alebo relatívnych početností zvolených tried. Histogramom zobrazujeme početnosť každej hodnoty (triedy hodnôt) pomocou obdĺžnika, ktorého obsah je úmerný početnosti hodnoty (triedy).

- **Kruhový diagram**



Graf 13.4

Kruhový diagram je diagram tvorený kruhom rozdeleným na kruhové výseky. Počet výsekov zodpovedá počtu štatistických tried. Veľkosti stredových uhlov týchto výsekov sú priamo úmerné početnosti daného znaku.

13.2.3 Charakteristiky štatistického súboru

K štatistickému skúmaniu jedného kvantitatívneho znaku využívame čísla, ktoré dávajú stručné základné informácie o štatistickom súbore z rôznych hľadísk. Štatistický súbor opisujú tzv. **charakteristiky polohy** a **charakteristiky variability**.

Charakteristiky polohy sú čísla, ktoré určitým spôsobom charakterizujú tzv. „priemernú hodnotu“ sledovaného štatistického znaku. Charakteristiky polohy majú byť typickou hodnotou štatistického súboru, musia byť jednoznačne presne definované, pri výpočte sa do úvahy berú všetky jednotky štatistického súboru, majú byť ľahko zistiteľné, mali by slúžiť k porovnávaniu stredných hodnôt za niekoľko súborov a majú čo najmenej podliehať náhodnostiam výberu. Patrí k nim:

a) aritmetický priemer kvantitatívneho znaku *x* je číslo označované $\bar{x}$, pre ktoré platí:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

Aritmetický priemer citlivý na neobyčajne malé alebo na neobyčajne veľké hodnoty, nemal by sa brať do úvahy, ak rozdelenie do tried je asymetrické alebo, ak výber obsahuje málo prvkov.

b) vážený priemer hodnôt $x_1, \dots, x_k$ s početnosťami $n_1, \dots, n_k$ je číslo $\bar{x}$, pre ktoré platí:

$$\bar{x}_v = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3 + \dots + x_n n_k}{n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i} .$$

c) geometrický priemer označujeme $\overline{x_G}$, v praxi sa používa pri časových radoch, pri určovaní priemerného tempa výroby, rastu cien, DPH, inflácie. Je zrejmé, že geometrický priemer má zmysel iba pre dáta, v ktorých sú všetky hodnoty sú kladné. Vypočítame ho zo vzťahu:

$$\overline{x_G} = \sqrt[n]{x_1\, x_2\, x_3 \ldots x_n}\ .$$

d) harmonický priemer označujeme $\overline{x_H}$ a používa sa na charakterizovanie hodnôt, ktoré predstavujú napríklad výkonové limity, t. j. ak treba dosiahnuť u každej osoby ten istý výkon pri rôznom čase alebo na určenie priemernej doby potrebnej na vyrobenie jedného výrobku (1. osoba urobí prácu za hod, teda jej hodinový výkon je…, atď.).
Vypočítame ho zo vzťahu:

$$\overline{x_H} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \ldots + \frac{1}{x_n}}\ .$$

e) modus je hodnota súboru vyskytujúca sa najčastejšie, t. j. hodnota (trieda) s najväčšou početnosťou, ak dve hodnoty (triedy) v súbore sa vyskytujú s najväčšou početnosťou, tak súbor má dva modusy a nazýva sa *bimodálny*. Modus je využívaný ako charakteristika stredu najmä vtedy, ak má štatistický súbor veľký rozsah. Modus označujeme $\hat{x}$.

f) medián označujeme $\tilde{x}$ a je to prostredná hodnota súboru usporiadaného podľa vzrastajúcich alebo klesajúcich hodnôt; využíva sa ako charakteristika stredu najmä vtedy, ak súbor obsahuje extrémne malé alebo veľké hodnoty oproti ostatným hodnotám znaku,

- ak počet meraní je nepárny, tak medián $\tilde{x} = x_i$, kde $i = \frac{n+1}{2}$,
- ak počet meraní je párny, tak medián $\tilde{x} = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$, kde $k = \frac{n}{2}$.

Charakteristiky variability

Charakteristiky variability sú čísla, ktoré udávajú, do akej miery sa hodnoty znaku odchyľujú od zvolenej charakteristiky polohy, respektíve od seba navzájom. Charakteristiky variability umožňujú vzájomne porovnávať štatistické súbory. Patria k nim:

a) odchýlka hodnoty od aritmetického priemeru: $x_i - \bar{x}$,

b) variačné rozpätie štatistického súboru je rozdiel najväčšej a najmenšej hodnoty štatistického znaku, je len orientačnou charakteristikou variability hodnôt znaku

$$R = \max x_i - \min x_i.$$

c) rozptyl (disperzia) označujeme s_x^2 a je to aritmetický priemer druhých mocnín odchýlok hodnôt znaku od aritmetického priemeru. Platí:

pre jednoduchý tvar $s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$, pre vážený tvar $s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 n_i$,

d) smerodajná odchýlka sa označuje s_x a je to druhá odmocnina z rozptylu,

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

Platí: Čím je hodnota smerodajnej odchýlky s menšia, tým bližšie sú hodnoty x_i rozmiestnené okolo aritmetického priemeru.

e) variačný koeficient predstavuje relatívnu mieru variability. Používa sa na porovnávanie variability medzi súbormi dát s odlišnými priemermi. Variačný koeficient výšky vzorky ľudí bude rovnaký bez ohľadu na to, či výšku budeme vyjadrovať v centimetroch alebo metroch. Variačný koeficient sa vypočíta ako podiel štandardnej odchýlky a priemeru:

$$v_x = \frac{s_x}{\bar{x}}$$

Poznámka. Čím väčšia je variabilita sledovaného znaku, tým menej reprezentatívna je charakteristika polohy.

Pri štatistickom skúmaní rozsiahleho štatistického súboru nepracujeme s celou množinou, ale študujeme len časť, ktorá reprezentuje celý súbor. Túto časť štatistického súboru nazývame **výberom** alebo **vzorkou**. Ak zmeníme výber, zmení sa aj rozdelenie relatívnych početností a odpovedajúci aritmetický priemer. Zisťovanie a rozbor vzniknutých odchýlok v relatívnych početnostiach a priemeroch pri zmene vzorky v rámci daného štatistického súboru sú dôležitým momentom pri štatistickom výskume.

13.2.4 Kovariancia a korelácia

Korelácia je väzba (závislosť) medzi dvomi alebo viacerými znakmi v štatistickom súbore alebo medzi dvoma alebo viacerými náhodnými veličinami v teórii pravdepodobnosti. Intenzita tejto väzby sa vyjadruje najmä korelačným koeficientom alebo korelačným pomerom. Pojem korelácia sa uplatňuje nie len v štatistike, ale aj prakticky všetkých ostatných vedných odboroch.

Ak dva kvantitatívne znaky x, y navzájom korelujú, potom sú možné takéto prípady:

1. x vyvoláva y,
2. x vplýva na y a y vplýva na x,
3. x aj y rovnako závisia od tretieho znaku z.

Korelačný koeficient alebo **koeficient korelácie** je miera intenzity (lineárnej) korelácie. V užšom zmysle a najčastejšie sa ako korelačný koeficient používa len Pearsonov korelačný koeficient.

Nech x_1, x_2, ... , x_n sú hodnoty sledovaného znaku x a nech y_1, y_2, ..., y_n sú hodnoty sledovaného znaku y. Koeficient korelácie r znakov x, y definujeme takto

$$r = \frac{k}{s_x s_y}, \text{ kde } k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}).$$

Symboly $\bar{x}$ a $\bar{y}$ sú aritmetické priemery súborov znakov x a y. V definícii koeficientu korelácie r symboly s_x a s_y sú smerodajné odchýlky sledovaných súborov so znakom x, resp. y. Aby definícia mala zmysel, musí platiť: $s_x \neq 0$ a $s_y \neq 0$. To znamená, že hodnoty znakov x aj y nie sú konštantné.

Čitateľ k zlomku sa nazýva **kovariancia** a vyjadruje, ako sa súčasne menia hodnoty dvoch premenných. Kladná hodnota znamená, že sa menia spoločne jedným smerom, záporná hodnota, že sa menia opačným smerom a nula, že sa menia nezávisle. Vydelením kovariancie smerodajnými odchýlkami vypočítame korelačný koeficient.

Korelačný koeficient môže dosahovať hodnoty od –1 do +1. Hodnota –1 reprezentuje najvyššiu negatívnu a hodnota +1 najvyššiu pozitívnu koreláciu. Hodnota 0 vypovedá o žiadnej korelácii.

Pre koeficient korelácie r platí:

1. Koeficient korelácie r je vždy číslo z intervalu $\langle -1,1 \rangle$.
2. Čím bližšie je číslo r k číslu 1, tým je závislosť medzi znakmi x a y väčšia.
3. Ak $r = 1$, potom s rastúcimi hodnotami x rastú aj hodnoty y.

4. Ak $r = -1$, potom s rastúcimi hodnotami x klesajú hodnoty y.
5. Ak $r = 0$, potom znaky x a y nie sú lineárne závislé.

Interpretácia veľkosti korelačného koeficientu je veľmi častým problémom. Ak sa korelačný koeficient rovná −1, potom všetky pozorovania ležia na klesajúcej priamke, ak sa rovná 1, tak pozorovania ležia na stúpajúcej priamke. Interpretácia korelačného koeficientu závisí od kontextu. Hodnota 0,8 pri overení fyzikálneho zákona použitím presných meracích prístrojov je veľmi nízka, v sociálnych vedách je však veľmi vysoká.

Cohen (1988) vytvoril jednoduchú pomôcku pre interpretáciu korelačných koeficientov v psychologickom výskume: *Korelácia (v absolútnej hodnote) pod 0,1 je triviálna, 0,1–0,3 malá, 0,3–0,5 stredná a nad 0,5 veľká. Korelácia 0,7 – 0,9 sa často uvádza ako veľmi veľká a 0,9 – 1 ako takmer dokonalá.*

Príklad. Pri talentových skúškach do primy športového gymnázia u skupiny chlapcov bola zisťovaná ich výška a hmotnosť. Výsledky tohto merania uvádza tabuľka:

Por. číslo chlapca	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Výška [cm]	123	128	134	139	132	125	142	138	140	129
Hmotnosť [kg]	24	22	35	31	27	24	34	38	34	31

Tab. 13.2

Zistite závislosť medzi výškou a hmotnosťou testovaných chlapcov.

Riešenie. Pri daných výpočtoch pre prehľadnosť využívajte tabuľku:

PČ	Výška x_i	Hmotnosť y_i	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
1	123	24	-10	-6	100	36	60
2	128	22	-5	-8	25	64	40
3	134	35	1	5	1	25	5
4	139	31	6	1	36	1	6
5	132	27	-1	-3	1	9	3
6	125	24	-8	-6	64	36	48
7	142	34	9	4	81	16	36
8	138	38	5	8	25	64	40
9	140	34	7	4	49	16	28
10	129	31	-4	1	16	1	-4
$n = 10$	$\sum x_i = 1330$	$\sum y_i = 300$	-	-	398	268	262

Tab. 13.3

Výpočet aritmetických priemerov a smerodajných odchýlok:

$$\bar{x} = \sum \frac{x_i}{n} = \frac{1330}{10} = 133\,, \qquad \bar{y} = \sum \frac{y_i}{n} = \frac{300}{10} = 30$$

$$s_x^{\,2} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{398}{10} = 39{,}8 \qquad \Rightarrow \qquad s_x = \sqrt{39{,}8} \doteq 6{,}3087$$

$$s_y^{\,2} = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n} = \frac{268}{10}0 = 26{,}8 \qquad \Rightarrow \qquad s_y = \sqrt{26{,}8} \doteq 5{,}1769$$

Výpočet korelačného koeficienta r:

Keďže $k = \dfrac{262}{10} = 26{,}2$, z toho vyplýva, že $r = \dfrac{26{,}2}{6{,}3087 \cdot 5{,}1769} \doteq 0{,}802$.

Záver: Hodnota korelačného koeficientu r je väčšia než 0,8 , preto korelácia medzi výškou a hmotnosťou chlapcov je veľmi veľká (tesná).

✓

Kapitola bola spracovaná podľa literatúry [1], [4], [7], [17].

Použitá literatúra

[1] Bálint, Ľ.: *Kombinatorika, pravdepodobnosť, štatistika, logika, grafy*, Bratislava, Príroda, 2010, ISBN 978-80-07-01841-9.
[2] Božek, M.: *Matematika pre 2. ročník gymnázia – Základy geometrie v priestore*, Bratislava, SPN, 1990,ISBN 80-08-00941-1.
[3] Budinský, B.: *Analytická a diferenciální geometrie*, Praha, SNTL – Nakladatelství technické literatury, 1983, ISBN 04-005-83.
[4] Burjan a kol.: *Prehľad matematiky* 1. SPN. Bratislava. 1998. ISBN 80-08-00277-8.
[5] Burjan a kol.: *Prehľad matematiky* 2. SPN. Bratislava. 1998. ISBN 80-08-02490-9.
[6] Bušek, I.: *Středoškolská matematika ve vzorcích a větách*, Praha, Prometheus, 1993, ISBN 80-85849-79-8.
[7] Ftorek, B. a kol.: *Sprievodca stredoškolskou matematikou*, Žilina, Žilinská univerzita, 1999, ISBN 80-7100-625-4.
[8] Hecht,T.–Sklenáriková,Z.: *Metódy riešenia matematických úloh.* Bratislava. SPN. 1992.
[9] Kadleček, J.: *Geometria v rovine a v priestore* (*pro střední školy*), Praha, Prometheus, 1998, ISBN 80-7196-017-9.
[10] Klenková, P.: *Stereometria - elementárna geometria trojrozmerného euklidovského priestoru*, Diplomová práca, FMFI UK, Bratislava, 2006,
[11] Knichal, V. a kol.: *Matematika I*, Praha, Státní nakladatelství technické literatury, 1965, ISBN 04-037-65.
[12] Knichal, V. a kol.: *Matematika II*, Praha, Státní nakladatelství technické literatury, 1966, ISBN 04-024-66.
[13] Kontrová, L.–Vadovičová, I.: *Úvod do diskrétnej matematiky*. ŽU v Žiline. Edis. 2010.
[14] Kraemer, E. a kol.: *Matematika pre 3. ročník SVŠ vetva prírodovedná*, Bratislava, SPN, 1977, ISBN 67-324-77.
[15] Križalkovič, K., Cuninka, A., Šedivý, O.: *500 riešených úloh z geometrie*, Bratislava, ALFA, 1970, ISBN63-082-70.
[16] Kubát, J.: *Sbírka úloh z matematiky pro prípravu k maturitní zkoušce.* Praha. Victoria publishing. 1993.
[17] Odvárko: *Matematika pro gymnáziá – Funkce*. Praha. Prometeus. 1994.
[18] Sklenáriková, Z., Čižmár, J.: *Elementárna geometria euklidovskej roviny*, Bratislava, Vydavateľstvo UK, 2002, ISBN 80-223-1585-0.
[19] Smida, J.: *Matematika pre 1. ročník gymnázia*, Bratislava, SPN, 1990, ISBN80-08-00939-X,
[20] Svitek, V.: *Základy geometrie*, Bratislava, SPN, 1959.
[21] Šalát, T.: *Malá encyklopédia matematiky*, Bratislava, Obzor, 1978, ISBN 65-035-78,
[22] Šedivý, O. a kol.: *Geometria 2*, Bratislava, SPN, 1987.
[23] Šedivý, O. a kol.: *Stereometria – Umenie vidieť a predstavovať si priestor*, Nitra, Prírodovedec č. 271, 2007, ISBN 978-80-8094-180-2.
[24] Vyšín, J. a kol.: *Geometria II. – pre pedagogické fakulty*, Bratislava, SPN, 1970, ISBN 67-022-70.
[25] http://matematika.havrlant.net/logaritmy
[26] http://mathonline.fme.vutbr.cz
[27] http://www.math.sk/skripta/node27.html (február 2011)
[28] http://www.mathematica.sk/Geometria1/geometria1.html (jún 2011)