INOVÁCIA PROCESU VYUČOVANIA DERIVÁCIE FUNKCIE V PROSTREDÍ POČÍTAČOVÝCH TECHNOLÓGIÍ

INOVATION OF THE TEACHING OF THE DERIVATIVE OF A FUNCTION IN A COMPUTATIONAL ENVIROMENT

Lýdia Kontrová

Abstract
In this article we deal a possibility of using didactic software Graphmatica and Excel as a motivating and effecting factor in a teaching of mathematics, especially in a teaching of differentiability and continuity of the functions. We present the lesson with insist to better understanding of this topic and the abillity to applied its in the daily experience.

1 Úvod

V súčasnosti registrujeme vo vyučovaní matematiky celosvetový trend, ktorý sa snaží posunúť obsah jej výučby bližšie k požiadavkám každodenného života. V snahe akceptovať túto tendenciu, využívame pri vyučovaní čo najviac prostriedkov, predovšetkým počítače a počítačové technológie k tomu, aby vedomosti študentov boli neformálne a dobre aplikovateľné v praxi. Vďaka týmto prostriedkom sa nám darí dostať študenta v procese výučby do pozície aktívneho a tvorivého subjektu, ktorý si sám konštruuje svoje matematické poznanie.

V článku predstavíme scenár vyučovacej hodiny zameranej na výučbu derivácie funkcie, pri ktorom použijeme stratégiu experimentovania a následného overovania hypotéz. Aplikujeme pri tom vhodný didaktický softvér. Študentov "vtiahneme" do procesu objasňovania nových matematických pojmov tak, aby v závere hodiny boli schopní samostatne na základe pozorovaní a zistení vysloviť všeobecne platné tvrdenia.

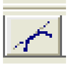
1.1 Voľba didaktického softvéru

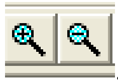
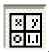
Pri preberaní vyššie spomenutej témy sme sa rozhodli pre jednoduchý, ale veľmi dobre využiteľný kreslič grafov Graphmatica a tiež tabuľkový procesor Excel (študenti už prácu s ním ovládajú z hodín informatiky). Excel umožňuje vytvárať vhodné numerické dynamické modely takých dôležitých abstraktných matematických pojmov, ako sú napríklad limity postupností a funkcií. Skúsenosti nám potvrdzujú, že takéto prezentovanie pojmov pomáha študentom lepšie im porozumieť.

Dbali sme tiež, aby použitý didaktický softvér:

- ✓ zodpovedal intelektuálnej úrovni učiacich sa, nepreťažoval ich prehnanou náročnosťou a zložitou manipuláciou,
- ✓ aby študentov dostatočne motivoval k učeniu sa,
- ✓ program musí akcentovať špecifiká vyučovania matematiky, s dôrazom na konkrétnu tému,
- ✓ počas práce s didaktickým softvérom musí mať študent možnosť aktívne a tvorivo kooperovať s technológiou,
- ✓ študent vníma takýto spôsob výučby ako pozitívny, podnetný a atraktívny.

2 Etapy vyučovacej hodiny

V prvej etape vyučovacej hodiny sme volili aktivitu zameranú na intuitívne vnímanie pojmu derivácie funkcie, s ohľadom na jej geometrický význam. Využili sme schopnosť programu Graphmatica vykresliť dotyčnicu ku grafu funkcie f(x) v bode x_0. Aktivujeme ju tlačidlom  na paneli nástrojov .

Pre naše ciele nám veľmi dobre poslúži aj schopnosť približovať označený fragment získaného grafu tzv. "zoomovanie" prostredníctvom tlačidla . Využívame tiež "trasovanie funkcie" a možnosť získať tabuľku funkčných hodnôt f(x) pre zvolené argumenty x pomocou .

2.1 Aktivita 1

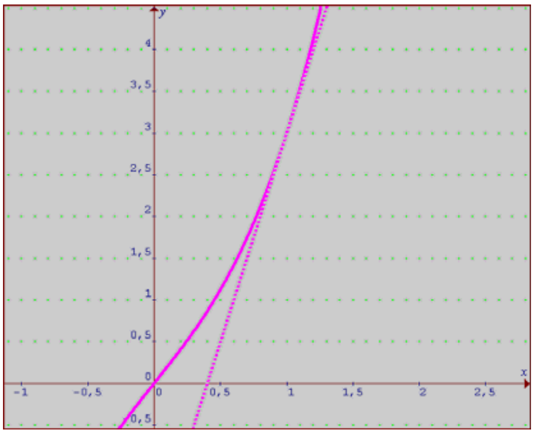
V tejto aktivite sa využíva poznatok o najlepšej lineárnej aproximácii funkcie f(x) polynómom 1. stupňa pomocou diferenciálu v okolí zvoleného bodu x_0. Študenti majú za úlohu získať graf funkcie $y = x^3 + 2x$, použiť „zoom" na jeho priblíženie a linearizovanie v dostatočne blízkom okolí bodu $x_0=1$, vykonať tieto činnosti:

1. Narysujte graf funkcie $y = x^3 + 2x$.
2. Zostrojte dotyčnicu ku grafu funkcie v bode $X =[x_0, y_0]$; $x_0 = 1$
3. Zapíšte si jej smernicu k = .
4. Zväčšite graf v okolí bodu $x_0 =1$.
5. Získajte tabuľku hodnôt funkcie v blízkom okolí bodu $x_0 = 1$.
6. Ako sa javí graf funkcie po viacnásobnom zväčšení v okolí bodu $x_0 = 1$?
7. Zvoľte bod $Y = [x_1,y_1]$ v blízkom okolí bodu $x_0 =1$.
8. Vypočítajte hodnotu $q = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$
9. Porovnajte výsledky získané v (3) a (8)!

Program Graphmatica poskytol napríklad takéto výsledky:

x_i	$f(x_i)=y_i$
0,6	1,416
0,7	1,743
0,8	2,112
0,9	2,529
1,0	3,0
1,1	3,531
1,2	4,128
1,3	4,797
1,4	5,544
1,5	6,375

Tangent of:
y=x*x*x+2*x
x=1,001, y=3,007, slope =5,0032
tangent line: y = 5x - 2



Obr.1 Graf f(x) a dotyčnice v bode x=1

Cieľom tohto cvičenia je vyzdvihnúť fakt, že pri dostatočnom zväčšení grafu f(x) v okolí bodu x_0 =1 jeho zakrivenie "mizne ", graf prechádza do lineárnej funkcie. Využijúc tabuľku hodnôt funkcie si študenti zvolia bod Y = $[x_1, y_1]$ z okolia bodu x_0 a vypočítajú smernicu priamky určenej bodmi X aY: $k_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$.

Túto následne porovnajú so smernicou dotyčnice ku grafu funkcie v bode x_0 = 1 získanou použitím tlačidla .

Diskusia so študentmi sa upriami na analýzu otázok: Prečo nie sú získané výsledky zhodné u všetkých študentov? Čo spôsobilo zistené diferencie? Ku akej hodnote sa napriek istej odchýlke výsledky blížia? Koho výsledok sa najmenej líši od hodnoty smernice dotyčnice ku grafu funkcie f(x) v bode x = 1?

Snažíme sa študentov priviesť na myšlienku limitného prechodu; *"ak sa x_i blíži k x_0 potom sa získané k_i približuje ku hodnote k"*, aby tak lepšie pochopili, prečo je derivácia f(x) v bode x_0 definovaná ako limita podielu (1).

Vyzveme ich tiež, aby sa pokúsili objasniť význam a funkciu čísla "k" vzhľadom k funkcii f(x). Úvahy smerujeme k vysloveniu poznatku: číslo "k" vyjadruje kvantitatívnu zmenu (mieru zmeny) funkcie f(x), vzhľadom na jednotkovú zmenu argumentu funkcie f(x) v okolí bodu x_0. Prezentujeme takto nielen geometrický význam derivácie funkcie, ale tiež jej kardinálny zmysel. Pochopenie tohto jej významu je rozhodujúce pri riešení aplikačných príkladov z praxe, (Často ide o úlohy zamerané na skúmanie rastu či poklesu istých ukazovateľov, teda zmien funkčných hodnôt funkcií, pripadajúcich na istú jednotku argumentu).

Záver:

Deriváciu funkcie f(x) v danom bode x_0 určíme ako limitu podielu:

(1) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ alebo

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ kde $\Delta x = x - x_0$ a x patrí do blízkeho okolia bodu x_0.

2.2 Aktivita 2

Výsledok (k=5) získaný pri predchádzajúcom experimente overíme výpočtom, ktorý realizujeme v Exceli. Vytvoríme tabuľku, vďaka ktorej určíme s veľmi dobrou presnosťou limitu podielu (1). Pri jej tvorbe študenti zadajú všetky požadované parametre pre výpočet podielu (1), čo je možné iba vtedy, ak definícii derivácie funkcie skutočne rozumejú. Pracujú v týchto krokoch:

1. Do buniek A1, B1, C1 vložia záhlavie tabuľky (postupne **Δx**, **f(x$_0$ +Δx)-f(x$_0$), (f(x$_0$+Δx)-f(x$_0$))/Δx).**
2. Do bunky A2 vložia počiatočnú hodnotu Δx = 0,1. využijú funkciu Excelu ***Rady*** do buniek A3 - A20 vložia postupne členy geometrického radu pre: $a_1 = 0,1$ a $q = 0,5$.
3. V bunke B2 zadefinujú potrebnú funkciu v tvare = f(x$_0$ +A2)-f(x$_0$) následne skopírujú do buniek B3 -B20.
4. Do bunky C2 vložia funkciu v tvare = B2/A2, skopírujú do buniek C3 - C20. V tomto stĺpci už odčítajú výsledok; limitu podielu (1).

Takto vytvorená tabuľka je veľmi flexibilná, môžeme modifikovať predpis funkcie alebo prírastok argumentu a tak ju využiť na demonštráciu rôznych variantov takejto úlohy. Môžeme tiež pohotovo poukázať na fakt, že čím väčší prírastok Δx volíme, tým je výpočet menej presný. Získanú tabuľku môžeme použiť aj pri aktivite č.3, tu však treba pracovať s jednostrannými limitami, ktorých pochopenie je vďaka takémuto didaktickému postupu omnoho lepšie.

Δx	f(x+Δx)-f(x)	(f(x+Δx)-f(x))/Δx
0.1	0.531	5.31
0.05	0.257625	5.1525
0.025	0.12689063	5.075625
0.0125	0.0629707	5.03765625
0.00625	0.03136743	5.018789063
0.003125	0.01565433	5.009384766
0.001563	0.00781983	5.004689941
0.000781	0.00390808	5.00234436
0.000391	0.00195358	5.001172028
0.000195	0.00097668	5.000585976
9.77E-05	0.00048831	5.000292978
4.88E-05	0.00024415	5.000146487
2.44E-05	0.00012207	5.000073243
1.22E-05	6.1036E-05	5.000036621
6.1E-06	3.0518E-05	5.000018311
3.05E-06	1.5259E-05	5.000009155
1.53E-06	7.6294E-06	5.000004578
7.63E-07	3.8147E-06	5.000002289
3.81E-07	1.9073E-06	5.000001143
1.91E-07	9.5367E-07	5.000000573
9.54E-08	4.7684E-07	5.000000289
4.77E-08	2.3842E-07	5.000000149

Obr. 2 Výsledky výpočtu získané v Exceli

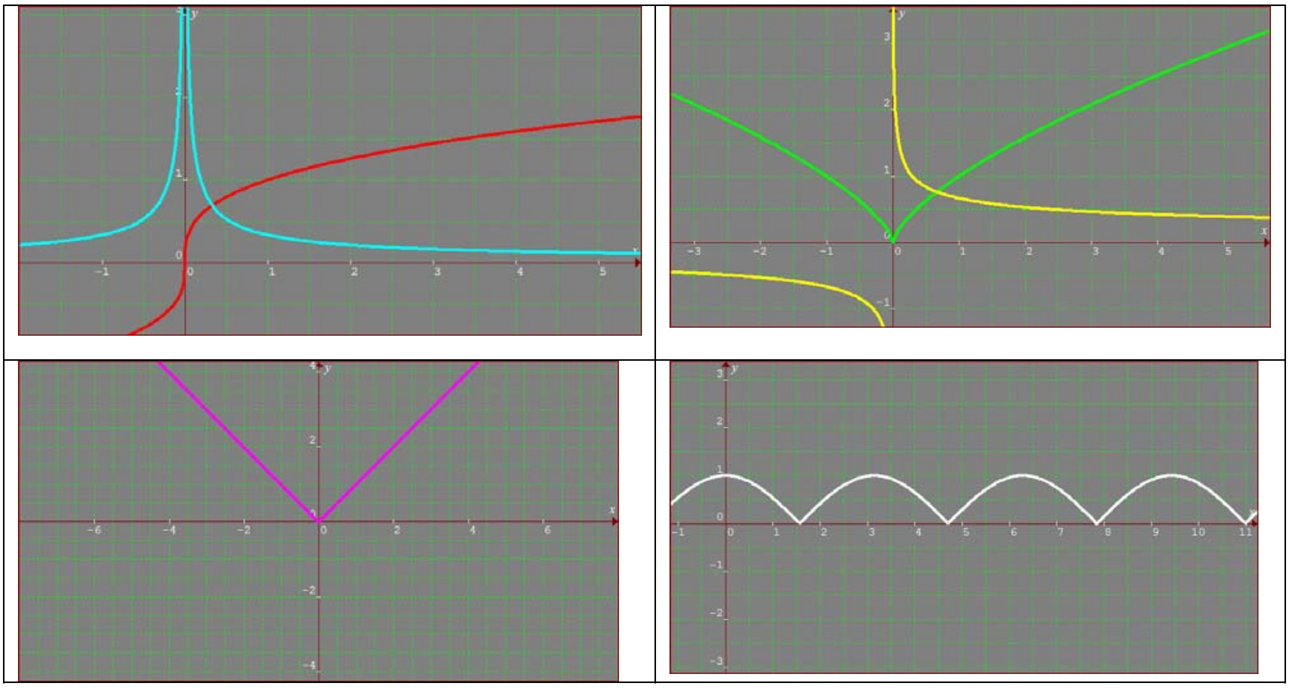
2.3 Aktivita 3:

Pri tomto cvičení chceme docieliť, aby študenti dokázali korektne odpovedať na otázku.: Je každá funkcia diferencovateľná vo všetkých svojich argumentoch?

Študentom zadáme nasledujúce aktivity:

1. Narysujte postupne grafy funkcií: $y_1 = x^{1/3}$, $y_2 = x^{2/3}$, $y_3 = |x|$, $y_4 = |\cos x|$
2. Použite „zoom“ a určite body, v ktorých nie je možné funkcie "linearizovať", teda aproximovať lineárnou funkciou.
3. Rozhodnite, či platí tvrdenie: Ak je funkcia f(x) spojitá na svojom D(f) potom je na ňom aj diferencovateľná.
4. Platí opačné tvrdenie? Ak je funkcia v bode x diferencovateľná, potom je v ňom aj spojitá?

Postupne boli programom Graphmatica vykreslené grafy funkcií a ich derivácií:



Obr. 3 Grafy funkcií

Počas experimentu sa sami študenti presvedčili, že nie všetky funkciu sme schopní "linearizovať" v okolí všetkých jej argumentov, nie sú teda diferencovateľné vo všetkých svojich argumentoch a prišli k záveru:

Diferencovateľnosť funkcie implikuje jej spojitosť a nie naopak.

2.4 Aktivita 4

Táto aktivita má za cieľ priblížiť preberanú problematiku na riešení úlohy z každodenného života. Študenti podľa zadaných bodov analyzujú graf funkcie, uvažujú o je definičnom obore a obore funkčných hodnôt, derivácii funkcie v kontexte reálneho problému. Úloha má predovšetkým motivačný význam.

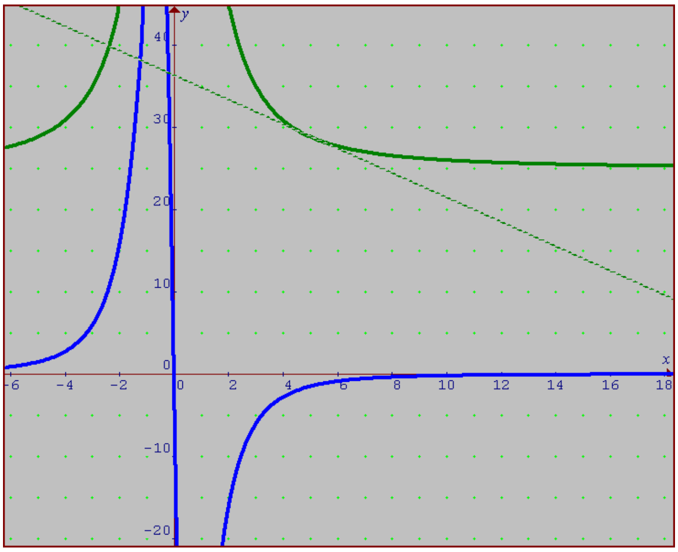
Príklad:

Pri pohybe krvi v organizme zo srdca cez artérie až ku kapiláram a späť, systolický tlak spojito klesá, čo je vyjadrené funkciou: $P = \dfrac{25t^2 + 125}{t^2 + 1}$, *kde P je tlak v milimetroch ortuťového stĺpca a t je čas v sekundách. Aká je miera zmeny tlaku krvi v cievach po piatich sekundách ako krv opustí srdce?*

Pri riešení úlohy realizujte tieto kroky:

1. Programom Graphmatica vytvorte graf funkcie P(t).
2. Zostrojte dotyčnicu ku grafu funkcie v bode t = 5.
3. Zapíšte si veľkosť jej smernice k = !
4. Vypočítajte analyticky 1. deriváciu funkcie P´(t)!
5. Dosadením do P´(t) za t = 5 získajte hodnotu P´(5)!
6. Narysujte deriváciu funkcie P´(t)
7. Zistite z grafu hodnotu P´(5)!
8. Porovnajte výsledky získané v krokoch (3), (5), (7)!

Program Graphmatica ponúkol takéto grafické a numerické výstupy. Navyše "vypočítal" prvú deriváciu analyticky a ponúkol tak študentom možnosť overiť si správnosť svojho výpočtu. Môžeme ho teda používať aj ako spätnú väzbu pre študentov pri výpočte derivácie funkcie (potrebné je len poznať syntax).



Obr 4: Závislosť tlaku P v organizme človeka na čase t

Equation(s):
y= (25*x*x+125)/(x*x+1) (1)
y=((1 + x*x)*(25*x + 25*x) - (125 + 25*x*x)*(x + x))/((1 + x*x)^2) ' deriv. of y

x	***y***	***y2***
5,00	***28,9452***	***-1,4836***
5,02	***28,8462***	***-1,4793***
5,52	***28,2***	***-1,1264***
6,02	***27,7027***	***-0,8766***
6,52	***27,3121***	***-0,695***
7,02	***27,0***	***-0,56***
7,52	***26,7467***	***-0,4577***
8,02	***26,5385***	***-0,3787***
8,52	***26,3652***	***-0,3168***
9,02	***26,2195***	***-0,2677***
9,52	***26,0959***	***-0,2282***
10,0	***25,9901***	***-0,1961***

Tangent of:
y= (25*x*x+125)/(x*x+1)
x=5,0, y=28,85, slope=-1,4834
Tangent line: y = -1,48x + 36,26

Výsledkom výpočtu je teda číslo k = -1,48 mm/sec. Odpoveď znie: Ak krv opustila srdce pred piatimi sekundami, tak tlak v cievach v tejto chvíli klesá v miere 1,48mm/s.

3 Záver

- Môžeme konštatovať, že študenti po primeranom usmernení veľmi úspešne zvládli zadané úlohy.
- V závere hodiny boli schopní iniciatívne diskutovať o riešených úlohách, klásť relevantné otázky, čo ešte viac upevnilo ich neformálne vedomosti.
- Stali sa aktívnymi tvorcami svojho vlastného poznania.
- Sami dokázali zovšeobecniť výsledky svojich pozorovaní.
- Vedomosti, ktoré takto získali boli neformálne, dobre pochopené.

Takto získané poznatky sú trvácejšie a dobre použiteľné v praxi, čo je cieľ, ktorý chceme pri vyučovaní matematiky predovšetkým dosiahnuť.

4 Literatúra

Fulier, J. 2005. *IKT vo vyučovaní matematiky.* Nitra: Prírodovedec č.199. FPV UKF. 2005. ISBN 80-8050-925-5.

Gábor, O. a kol. 1989. *Teória vyučovania matematiky 1*. Bratislava : SPN. 1989.

Kalaš, I. a kol. 2001. *Informatika pre stredné školy* . Bratislava: Slovenské pedagogické nakladatelstvo. 2001. ISBN 80-08-01518-7.

Lengyelfalusy, T. 2003. *Význam názornosti a logického myslenia pri riešení problémových úloh.* Trnava: In: Acta Fac. Paed. Univ. Tyrnaviensis. Ser.C. 2003. ISBN 80-89074-82-0.

Potůček, J. 1998. *Několik poznámek k didaktickému experimentu*. In: Počítačem podporovaná výuka matematiky a příprava didaktického experimentu. Plzeň,1998 Pedagogické centrum Plzeň. S. 5-11. ISBN 80-7020-040-5.

Gunčaga, J. 2004. *K propedeutike pojmu derivácia.* Žilina. Didactic Conference in Žilina. Zborník príspevkov, Žilina . FPV ŽU, 2005, ISBN 80-8070 - 430-9.

Adresa:

PaedDr. Lýdia Kontrová, Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky, FPV ŽU, Hurbanova 15, 010 26 Žilina, e-mail:lydia.kontrova@fpv.utc.sk

Recenzent: Doc. PaedDr. Tomáš Lengyelfalusy, CSc