GRAFICKÉ RIEŠENIE ROVNÍC S PODPOROU PROGRAMU EQUTION GRAPHER

Lýdia Kontrová

Kľúčové slová: princíp názornosti, implementácia ICT, vizualizácia matematických pojmov, využitie Internetu, výukový program Equation Grapher, grafické riešenie rovníc, nelineárne rovnice, Polynomické rovnice, sústavy rovníc

1 Úvod

Väčšina súčasných didaktikov matematiky uprednostňuje také didaktické postupy, ktoré umožňujú študentom v maximálnej miere aktívne participovať pri objavovaní nových matematických pojmov. Volia konštruktívne metódy, pri ktorých sa učiaci aktívne zmocňuje nových poznatkov, zdôrazňujú dostatočnú a primeranú mieru názornosti pri vyučovaní, podporujúcu vznik trvácich a neformálnych vedomostí.. Napriek tomu je zjavné, že vizuálny komunikačný kanál pri výučbe matematiky nie je používaný v dostatočnej miere. Presviedčajú nás o tom často zjavné „nevedomosti“ študentov, z ktorých si len malé percento dokáže pri riešení matematických problémov „pomôcť“ vhodnou geometrickou interpretáciou skúmaného problému, „často nevidia dostatočne do danej problematiky“, ich vedomosti sú následne poznačené formalizmom.

Uveďme príklad z hodiny numerickej matematiky, ktorý nás sčasti inšpiroval k napísaniu tohto článku. Pri riešení nelineárnej rovnice : $3^x - x^2 - 1 = 0$ mali študenti za úlohu určiť počiatočnú aproximáciu koreňa rovnice, čiže jeho približnú hodnotu. Väčšina mala problém riešiť takúto netypickú rovnicu, ktorá im nezapadala do skupiny žiadnych známych typov rovníc. Navrhli sme im grafické riešenie. Ukázalo sa, že len daktorí majú skúsenosť s grafickými interpretáciami riešenia rovníc, a tiež že vzájomnú súvislosť medzi riešením rovnice $f(x) = 0$ a hľadaním nulových bodov príslušnej funkcie $y = f(x)$ študenti nie vždy vnímajú a využívajú pri výpočtoch. *A práve tu sa otvára priestor pre využitie prostriedkov ICT (Information and communication technology), konkrétne Internetu, ktorý nám umožňuje venovať pri výučbe dostatok priestoru konkretizácii, vizualizácii a experimentovaniu s rôznymi variantmi skúmaného matematického problému.*

Na tvorbu názornejších didaktických postupov môžeme využiť jednoduché výukové programy, získané prostredníctvom Internetu, medzi ktoré patrí aj program *EQUATION GRAPHER*, ktorý nás upútal jednoduchou, prehľadnou manipuláciou a širokým využitím.

Výhody využívania takýchto výukových programov vidíme predovšetkým v:

- ich dostupnosti a finančnej nenáročnosti v porovnaní s nakupovaním programov typu Matematika, Maple či Matlab,
- zefektívnení výučby, upútaní pozornosti študentov, obrázok žiaka isto zaujme, nie je možné si ho nevšimnúť,
- sami študenti sa aktívne zmocňujú poznatkov, nie sú len pasívnymi poslucháčmi,
- kombinovaní rôznych foriem výučby.

Napriek tomu, že v súčasnosti sa ustavične pertraktuje téma implementácie ICT do výučby, pociťujeme absenciu konkrétnej metodickej pomoci učiteľom, chýbajú návody ako použiť *konkrétny didaktický softvér* pri preberaní *konkrétneho matematického učiva*. Viaceré freewerové výukové programy, dostupné na Internete, sú prevažne v anglickom jazyku, a práve toto často odrádza predovšetkým tých „skôr narodených“. Chceme preto predstaviť a bližšie popísať jeden z mnohých výukových programov – tzv. „kresličov grafov“ a tiež podať podrobnejší návod, ako ho implementovať do vyučovania pre konkrétne témy stredoškolského učiva.

Sharewarovú verziu programu *Equation Grapher* si môžeme stiahnuť na webovej stránke ***www.mfsoft.com***. Je vhodný pre názornejšie vyučovanie viacerých tém stredoškolskej matematiky. Zaujal *nenáročnou, intuitívnou obsluhou,* tiež tým, že jeho popis, ktorý je síce v anglickom jazyku je doplnený sprievodnými veľmi výstižnými obrázkami. Vďaka tlačidlám s adekvátnymi symbolmi je možný rýchly a pohodlný servis a využitie.

Popis programu získame, ak po jeho spustení a otvorení sa hlavného okna programu, vyberieme položku *Help* z hlavného programového *Menu* a následne položku *Contents,* kde nájdeme ukážky jeho základných funkcií:

- vykresľovanie grafov funkcií počnúc od elementárnych, cez zložené až po cyklometrické,
- vykreslenie 1. derivácie funkcie f(x), dotyčnice a normály ku grafu funkcie f(x) v danom bode,
- *výpočet určitého integrálu funkcie f(x) na intervale < a, b >,*

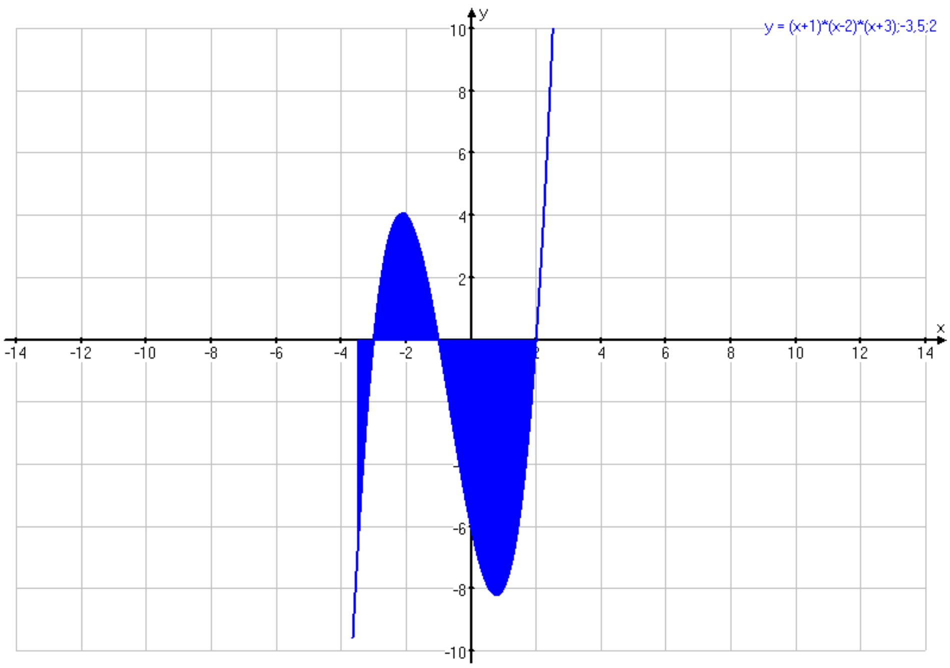
Príklad 1.:

Ak chceme pomocou programu Equation Grapher vypočítať určitý integrál z funkcie

y = (x+1)(x-2)(x+3) stačí zadať do textového riadku symbol ∫ a následne funkciu v tvare

f(x) = (x+1)*(x-2)*(x+3) ; -3,5; 2

pričom bodkočiarkou sú oddelené hranice intervalu, na ktorom integrál rátame. Vidíme, že program vykreslí plochu prislúchajúcu určitému integrálu a do záznamového okna vypíše jeho hodnotu. Študenti majú možnosť získať názornú predstavu o určitom integráli z funkcie f(x) na intervale <a, b> ako obsahu plochy ohraničenej grafom príslušnej funkcie a priamkami x = a; x = b.



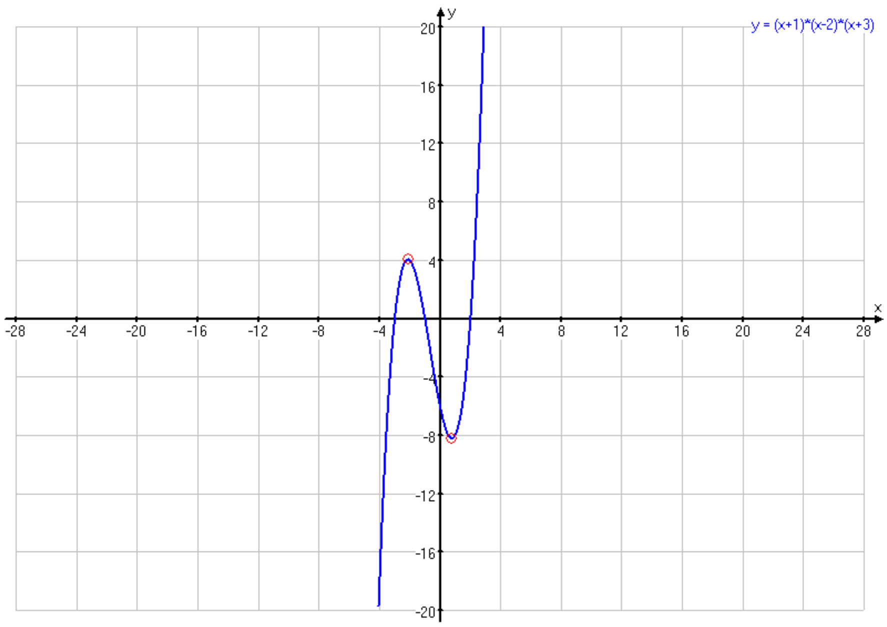
Obr. 1: Výpočet určitého integrálu

Výsledok: y = (x+1)*(x-2)*(x+3);-3,5;2

Integral=-11,974

Príklad 2.:

Pri určovaní lokálnych extrémov funkcie y = (x+1)(x-2)(x+3) do textového riadku zadáme funkciu v tvare ***f(x) = (x+1)*(x-2)*(x+3).*** Na panely nástrojov vyberieme položku so symbolom maxima alebo minima funkcie, zadáme interval ťahom kurzora. Program vyznačí lokálny extrém červeným krúžkom a do záznamového okna vypíše súradnice nájdeného bodu.



Obr. 2: Určovanie extrémov funkcií

Výsledok:

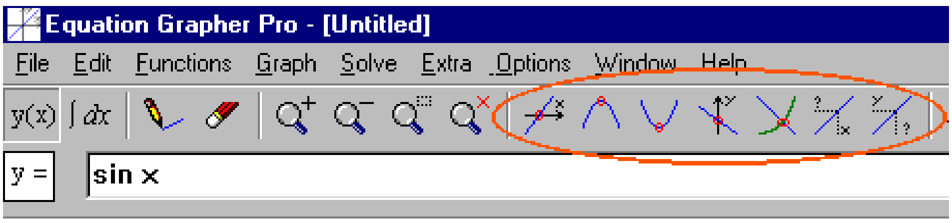
y = (x+1)*(x-2)*(x+3)

Maximum: Ymax=4,060672587 for x = -2,119632981

y = (x+1)*(x-2)*(x+3)

Minimum: Ymin=-8,208820735 for x = 0,7862996478

Popíšeme bližšie hlavné *programové menu* a panel nástrojov



Obr. 3:

Pomocou položky *File* môžeme uložiť a vytlačiť výsledky úloh.

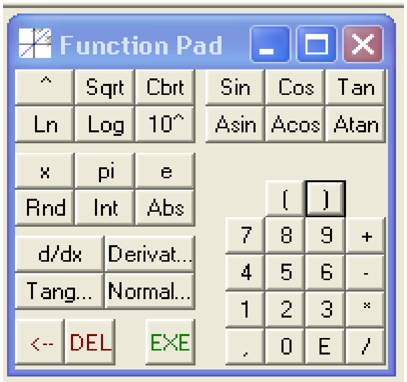
Položkou *Edit* zabezpečíme uloženie výsledkov úloh a grafov do schránky v grafickom formáte WMF a BMP s možnosťou následného vloženia do iného dokumentu.

Ako zapisovať jednotlivé funkcie v tomto programe informuje položka *Functions*.

Položka *Options* umožňuje prispôsobiť hrúbku vykresľovaných kriviek, úpravu rozsahu a mierky či mriežky karteziánskeho grafu, úpravu farby a štýlu písmu .

Tlačidlá vyznačené na panely nástrojov červenou elipsou zabezpečia postupne výpočet minima a maxima funkcie, pomocou nich nájdeme a určíme hodnotu priesečníka grafov dvoch funkcií, nulové body funkcie, k danej hodnote x prislúchajúcu hodnotu f(x) a tiež aj naopak.

Výhodou programu je tiež, že niektoré príkazy a funkcie nemusíme vypisovať prostredníctvom klávesnice, ale možno využiť paletku na ľavej strane hlavného okna programu, v ktorej stačí „klikať myšou" na názvy funkcií a preddefinované príkazy v tvare ikon (obrázok 4).



Obr. 4:

Program Equation Grapher (ďalej už len EG) môžeme využiť na tvorbu názornejších didaktických postupov, ktoré kladú zvýšený dôraz na vizualizáciu matematických pojmov, pri vyučovaní nasledujúcich tém zo stredoškolského učiva:

- grafické riešenie niektorých typov rovníc (kvadratické, nelineárne, rovnice s absolútnou hodnotou)
- riešenie niektorých typov sústav dvoch rovníc s dvoma neznámymi,
- polynomické rovnice a nerovnice.

Program EG, má na rozdiel od niektorých ďalších „kresličov grafov", veľmi jednoducho riešené vyhľadávanie nulových miest funkcie f(x) s ich následným vyznačením prostredníctvom červeného krúžku a vypísaním presnej hodnoty priesečníka do textového okna. K tomuto účelu použijeme tlačidlo na panely nástrojov s príslušným označením. To isté môžeme povedať aj o funkcii vyhľadávania priesečníka grafov dvoch funkcií a následnom určení súradníc priesečníka. *Práve tieto jeho dve schopnosti umožnia študentom graficky interpretovať a tiež graficky riešiť rôzne typy rovníc, vnímať lepšie súvislosť medzi riešením rovnice f(x) = 0 a hľadaním nulových bodov príslušnej funkcie y = f(x), zoznámiť sa lepšie s konkrétnymi grafmi funkcií.*

Pri grafickom riešení rovnice f(x) = 0 môžeme postupovať dvoma spôsobmi:

1. ***spôsob***: Ak je daná rovnica f(x) = 0, kde f(x) je spojitá funkcia, tak na určenie jej reálnych koreňov v intervale $< a, b >$ zostrojíme graf funkcie y = f(x) a vyhľadáme x-ové súradnice priesečníkov grafu funkcie f(x) s osou x; postup s využitím programu EG bol popísaný vyššie. Tieto čísla sú koreňmi rovnice f(x) = 0.
2. ***spôsob***: Niekedy býva výhodnejšie prepísať rovnicu f(x) = 0 na tvar $F_1(x) = F_2(x)$; pričom rovnice f(x) = 0 a $F_1(x) = F_2(x)$ sú ekvivalentné. V tej istej súradnicovej sústave zostrojíme grafy $y_1 = F_1(x)$ a $y_2 = F_2(x)$. Využitím programu EG určíme x-ové súradnice priesečníkov týchto grafov , ktoré sú koreňmi rovnice f(x) = 0. Tento spôsob sa využíva napríklad pri grafickom riešení kvadratickej rovnice.

2 Grafické riešenie kvadratických rovníc

Kvadratickú rovnicu $ax^2 + bx + c = 0$ prepíšeme do tvaru $y_1 = ax^2$ a $y_2 = -(bx + c);\ \ a \neq 0$. Využijeme grafy funkcií y_1 a y_2, pričom *x – ové* súradnice priesečníkov paraboly a priamky sú koreňmi rovnice $ax^2 + bx + c = 0.$

Postupujeme od znázorňovania rýdzokvadratickej rovnice, následne preskúmame typ kvadratickej rovnice $ax^2 + bx = 0$, *kde* $c = 0$ až po všeobecnú kvadratickú rovnicu.

Pozornosť študentov upriamujeme na sledovanie nasledovných javov a faktov:

Akú polohu majú priamky vzhľadom k parabole (získame informáciu o počte riešení v obore R),

Aký vzťah má hodnota diskriminantu k určitému typu zobrazenia (vzťah diskriminantu a počtu riešení v R)

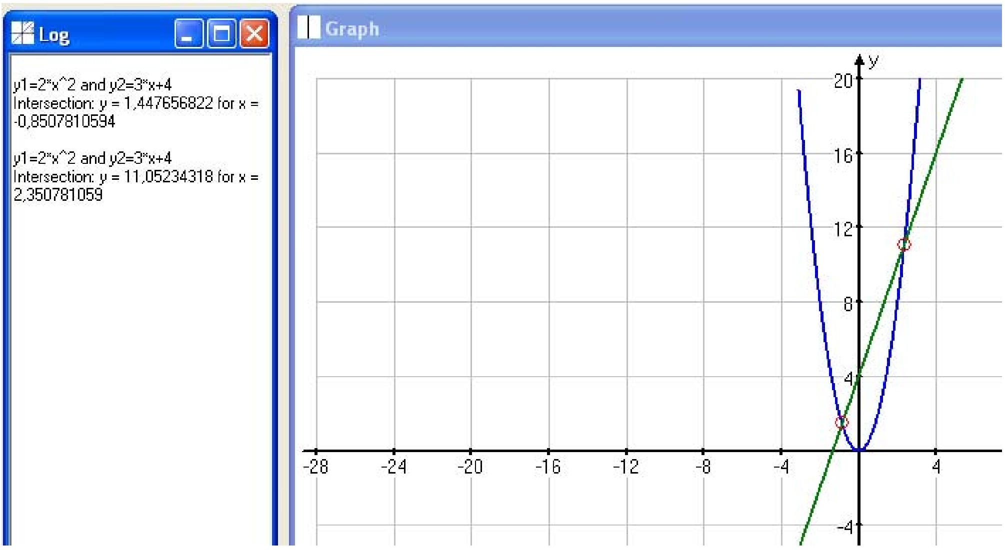
Ako sa javí okolnosť dvojnásobného koreňa pri grafickej interpretácii,

Aká je poloha priamky a paraboly v prípade funkcií typu $ax^2 + bx = 0$, *čo z toho vyplýva,*

Ako sa zjednoduší grafické riešenie, ak sa jedná o rýdzokvadratickú funkciu.

Príklad 3.:

Grafický spôsob riešenia kvadratickej rovnice $2x^2 - 3x - 4 = 0$ pomocou EG demonštruje obrázok 5. Tento program udáva hodnoty koreňov rovnice $x_1 = -0{,}85078105$ a $x_2 = 2{,}35078105$. Výsledky sa zhodujú na osem desatinných miest s výsledkami, ktoré získame, ak riešime rovnicu pomocou diskriminantu, ktorého hodnota je $D = 41$. Vidíme teda, že presnosť programu je veľmi dobrá a môžeme ho využiť aj pri vyhľadávaní koreňov nelineárnych či polynomických rovníc.



Obr. 5:

3 Riešenie nelineárnych rovníc

Pri riešení niektorých slovných úloh sa môže vyskytnúť situácia, že potrebujeme riešiť nelineárnu rovnicu, prípadne algebraickú rovnicu stupňa > 2.

Príklad 4.:

Objem kocky je o 1 cm menší než objem kvádra, ktorého jedna strana meria1,5cm, druhá sa rovná hrane kocky a tretia je o 1cm dlhšia ako hrana kocky. Aké sú rozmery kocky a kvádra?

Príklad vedie na riešenie reciprokej rovnice: $x^3 - 1{,}5\,x^2 - 1{,}5x + 1 = 0$, je to rovnica typu $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$, ktorú riešime analyticky nasledovným spôsobom:

$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0 \Leftrightarrow a(x^3 + 1) + bx(x+1) = 0 \Leftrightarrow$

$a(x + 1)(x^2 - x + 1) + bx(x + 1) = 0 \Leftrightarrow$

$(x + 1)(ax^2 + bx - ax + a) = 0 \Leftrightarrow x = -1$

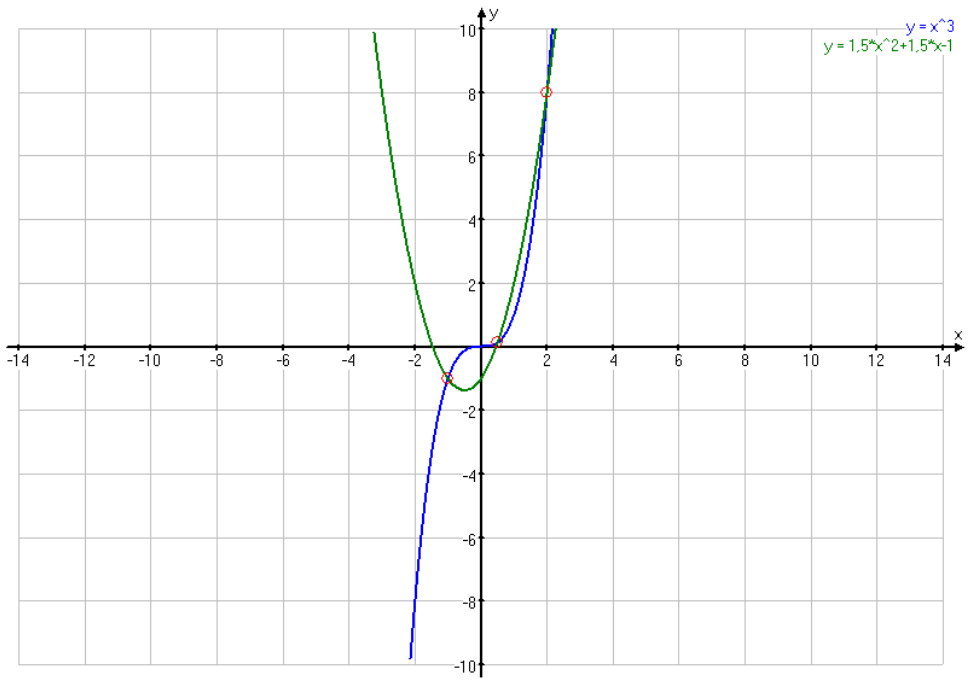
ďalšie dva korene získame riešením kvadratickej rovnice $(ax^2 + bx - ax + a) = 0$.

V našom konkrétnom prípade získavame korene $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ a $x_3 = 0{,}5$

Riešme rovnicu graficky s podporou EG (obrázok č.6).

Získame grafy funkcií $y_1 = x^3$ a $y_2 = 1{,}5x^2 + 1{,}5x - 1$ a následne ich priesečníky.

Výsledky získané programom EG sú:



Obr. 6:

y1=x^3 and y2=1,5*x^2+1,5*x-1

Intersection: y = -1 for x = -1

y1=x^3 and y2=1,5*x^2+1,5*x-1

Intersection: y = 0,125 for x = 0,5

y1=x^3 and y2=1,5*x^2+1,5*x-1

Intersection: y = 8 for x = 2

Program EG s veľmi dobrou presnosťou našiel korene x = -1, x = 2 a x = 0,5. Môžeme ho teda využiť aj ako spätnú väzbu na kontrolu výsledkov výpočtov a súčasne na upevňovanie predstavy o grafoch funkcií, ktoré pri riešení využívame.

Vyššie spomenutým spôsobom môžeme riešiť aj niektoré ďalšie typy nelineárnych rovníc, (napríklad $e^x + x^3 = 0$ a ďalšie). Často nás aj aplikačné úlohy z oblasti určitého integrálu môžu postaviť pred problém, nájsť riešenie nelineárnej rovnice.

Príklad 5.:

Vypočítajte obsah plochy ohraničenej grafmi funkcií $f(x) = x^3$, $g(x) = (\cos x)^2$ a osou y.

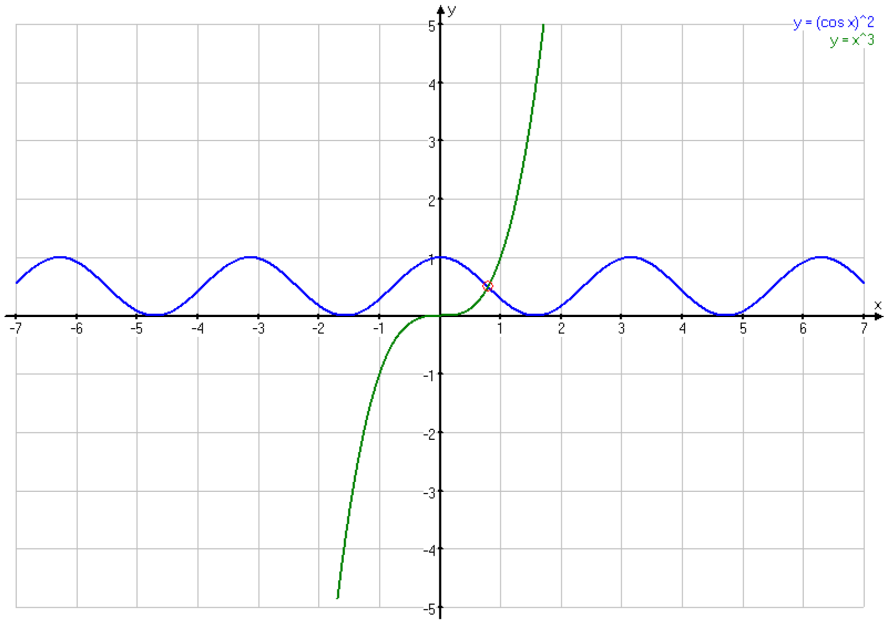
Pri riešení potrebujeme nájsť priesečník grafov oboch funkcií, čiže riešiť nelineárnu rovnicu $x^3 = (\cos x)^2$ následne x- ovú súradnicu priesečníka grafov funkcií použijeme ako hornú hranicu určitého integrálu:

$$\int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Pri použití programu EG získame výsledky :

y1=(cos x)^2 and y2=x^3

Intersection: y = 0,4945774389 for x = 0,7908208308



Obr. 7:

Obsah plochy vypočítame zo vzťahu: S = $\int_0^{0,7908} ((\cos x)^2 - x^3)dx$

Na výpočet integrálu sme využili opäť program EG, pričom sme získali tieto čiastkové výsledky:

y = (cos x)^2;0;0,7908

Integral=0,64539

y = x^3;0;0,7908

Integral=0,09777

Obsah plochy **S = 0,54762j²**.

Grafické interpretácie riešenia rovníc navrhujeme využívať aj pri niektorých jednoduchších rovniciach s absolútnymi hodnotami ako sú napr.: $|x + 2| = |x| - 3$. Umožníme tak študentom získať väčšiu prax vo vykresľovaní aj týchto typov funkcií.

Graficky môžeme riešiť aj niektoré sústavy dvoch rovníc s dvoma neznámymi. Či už sa jedná o sústavy lineárnych rovníc, alebo o sústavy rovníc typu:

(1) $x^2 + y^2 = r^2$

(2) $ax + by + c = 0$ ako i ďalšie,

ktoré riešime tak, že graficky interpretujeme prvú rovnicu (ako kružnicu) a tiež druhú rovnicu (ako priamku). Súradnice priesečníkov (x_1, y_1), (x_2, y_2) kružnice s priamkou sú riešením sústavy.

Prostredníctvom grafickej interpretácie môžeme demonštrovať počet riešení takýchto sústav, súčasne zopakovať so študentmi grafy priamky, paraboly, kružnice, či hyperboly. Poukázať nato, ako sa vedomosti získané pri preberaní istej matematickej témy dajú využiť v niektorej ďalšej oblasti matematiky.

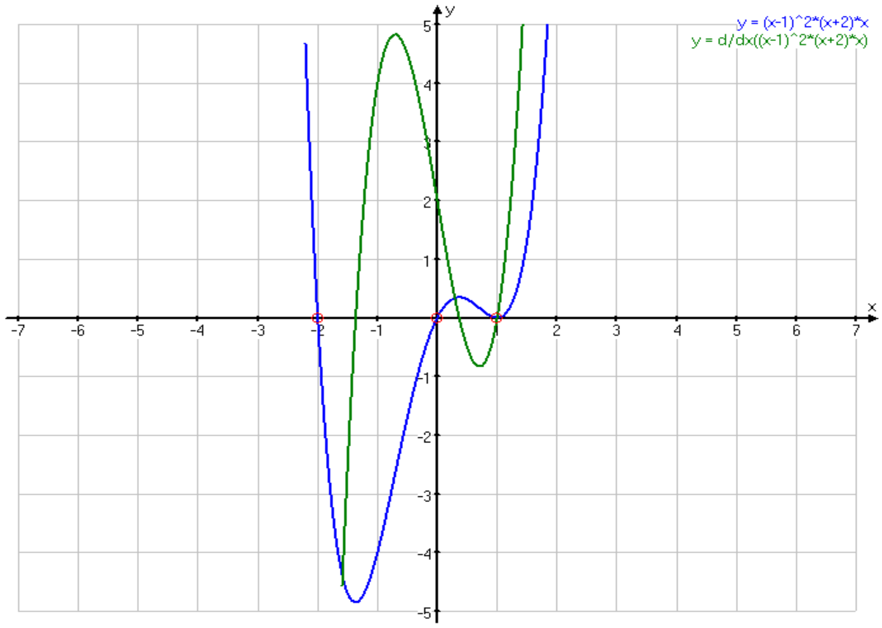
4 Polynomické rovnice a nerovnice

Polynomické nerovnice sú nerovnice typu: $f(x) > 0$; $f(x) < 0$; $f(x) \geq 0$; $f(x) \leq 0$; kde $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$; pričom $a_n \neq 0$, $x \in R$ je polynóm n – tého stupňa, $n \in N$, $n \geq 1$. Riešime ich rozkladom množiny R na časti, ktorých hraničné body sú korene polynómu $f(x) = 0$. Najpoužívanejšie sú tzv. tabuľková alebo intervalová metóda. Názornejší je spôsob, pri ktorom využijeme graf funkcie $f(x) = y$. Tento vytvoríme pomocou programu EG, následne analyzujeme a získame prostredníctvom neho riešenie nerovnice $f(x) \geq 0$; (resp. $f(x) \leq 0$; $f(x)>0$; $f(x)<0$).

Príklad 6.:

Riešme nerovnicu $x^4 - 3x^2 + 2x < 0$. Najčastejšie sa postupuje tak, že študenti vyhľadajú nulové miesta funkcie $f(x) = 0$ a zapíšu ju v tvare súčinu.: $(x-1)^2(x+2)x < 0$. Rozdelia definičný obor na intervaly nulovými bodmi rovnice $f(x) = 0$, následne rozhodujú o znamienku nerovnice na jednotlivých podintervaloch, pričom potrebné fakty zapisujú do tabuľky alebo nad číselnú os a získavajú riešenie. Často ani netušia, ako vyzerá graf funkcie, s ktorou pracujú . V prípade, že máme možnosť pomocou programu EG získať graf funkcie $f(x) = y$ (obrázok 8), môžeme vizualizovať získané výsledky, preskúmať „špeciálne prípady“ nerovníc; t.j. nerovnice, ktoré buď nemajú riešenie v R, alebo ich riešením je celá množina R., súčasne študentov upozorniť na ďalšie zaujímavé fakty a súvislosti ako sú: počet reálnych koreňov algebraickej rovnice, ako sa prejaví viacnásobný koreň na grafe funkcie, môžeme vykresliť graf 1.derivácie funkcie a hlbšie analyzovať priebeh funkciu $f(x)$ z aspektu poznatkov, ktoré už študenti získali na predchádzajúcich hodinách

Jednoducho nemusíme vyučovať určitú tému izolovane, ale *vďaka prostriedkom ICT zefektívnime výučbu*, získame viac času aj na reprodukovanie látky, ktorá má bližší či vzdialenejší súvis s témou práve preberanou.



Obr. 8:

Root: x = -2

y = (x-1)^2*(x+2)*x

Root: x = 0

y = (x-1)^2*(x+2)*x

Root: x = 1,000000955

y = (x-1)^2*(x+2)*x

Riešením nerovnice je interval (-2 ; 0)

V tomto článku sme sa pokúsili upriamiť pozornosť na potrebu názornejšieho vyučovania matematiky s podporou ICT. Vychádzali sme z predpokladu, že vedomosti, ktoré si študent osvojí počas vlastného experimentovania sú vedomosti podstatne trvácejšie, ako vedomosti získané pri klasickom pasívnom transmisívnom vyučovaní. Sú to práve prostriedky ICT, ktoré zefektívňujú výučbu a umožnia nám študentov aktívne zapojiť do vyučovacieho procesu a urobiť ich spoluobjaviteľmi nových matematických pojmov a súvislostí.

Literatúra

[1] RUŽIČKA, O.: Internet pro učitele. Praha: Computer Press, 2001. ISBN 80-7226-647-0

[2] FISCHER, R.: Človek a matematika. Bratislava: SPN, 1992.

[3] MAREŠ, J.: Styly učení žáků a studentů. Praha: Portál, 1998

Mgr. Lýdia Kontrová,
Katedra matematiky, Fakulta prírodných vied ŽU
Hurbanova 15, 010 26 Žilina,
lydia.kontrova@fpv.utc.sk