Vybrané diskrétne rozdelenia pravdepodobnosti v prírode

Ivana Pobočíková[1], **Lýdia Kontrová**[2]

[1] *Department of Applied Mathematics*
Faculty of Mechanical Engineering, University of Žilina
Univerzitná 1, 010 26 Žilina, Slovak republic
e-mail: ivana.pobocikova@fstroj.uniza.sk

[2] *Department of Applied Mathematics*
Faculty of Humanities Sciences, University of Žilina
Univerzitná 1, 010 26 Žilina, Slovak republic
e-mail: lydia.kontrova@fpv.uniza.sk

Abstract
The teachers of math are often confronted with questions from the students about where and how to use this mathematical knowledge in practice. If we want in a such moment to respond appropriately, we can draw your attention to the world of biology and give the students a good example. We can stimulate students' interest for mathematics if we will show the practical application of the abstract mathematical concepts for modeling the specific problems in nature. In this paper we offer an alternative: to teach some concepts of probability theory attractive by implementing the appropriate application tasks from the field of biology.

1. Úvod

V posledných rokoch registrujeme vo vzdelávaní silnejúce úsilie o prepájanie obsahov učiva jednotlivých vyučovacích predmetov a akcentovanie využitia preberaných pojmov a faktov pri riešení problémov každodenného života. Zdôrazňuje sa hlavne nutnosť transferu vedomostí získaných pri vyučovaní jedného prírodovedného predmetu do oblasti iného predmetu.
Matematika bohužiaľ v súčasnej dobe patrí k predmetom najmenej populárnym. Jej vyučovanie je totiž často príliš abstraktné. Stále naliehavejšie si uvedomujeme, že didaktické majstrovstvo učiteľa matematiky spočíva predovšetkým v schopnosti vidieť a upozorniť na možnosti interdisciplinárnych prepojení tohto predmetu s celou paletou prírodovedných, technických, ekonomických, spoločensko - vedných odborov a zatraktívnení jej vyučovania zaujímavými aplikáciami preberaných pojmov.

Pri skúmaní rôznych prírodných javov existuje veľa situácií, ktoré sme schopní popísať vhodnými pravdepodobnostnými modelmi. Tieto modely nám dokážu zrozumiteľne popísať skúmané javy a slúžia pri štúdiu ich chovania. Pozorovanú situáciu zjednodušíme, predstavíme si ju ako náhodný pokus a zadefinujeme si vhodnú náhodnú premennú. Zistíme, aké hodnoty môže nadobúdať, s akými pravdepodobnosťami tieto hodnoty nadobúda, aby sme určili rozdelenie pravdepodobnosti. Rozdelenie pravdepodobnosti a parametre, od ktorých rozdelenie pravdepodobnosti závisí, sú dôležité pre pochopenie pozorovanej situácie. Slúžia na predpovedanie budúcich javov, výpočet dôležitých charakteristík, ktoré popisujú vlastnosti skúmanej náhodnej premennej.
V tomto príspevku popíšeme vybrané diskrétne rozdelenia pravdepodobnosti. V praktických aplikáciách majú veľký význam binomické a Poissonovo rozdelenie. Ich aplikáciu ukážeme na jednoduchých príkladoch z biológie. Prepojenie teoretických poznatkov z teórie pravdepodobnosti a biológie môže poslúžiť ako motivácia pre študentov na zvýšenie záujmu o preberanú problematiku.

2. Vybrané diskrétne rozdelenia pravdepodobnosti

V praxi sa stretávame s rôznymi typmi diskrétnych rozdelení. V tejto časti si stručne popíšeme dve vybrané diskrétne rozdelenia pravdepodobnosti- binomické a Poissonovo rozdelenie.

2.1. **Binomické rozdelenie -** $Bi(n, p)$**.** Charakteristika náhodnej premennej s binomickým rozdelením :

1. Robí sa n nezávislých pokusov. Každý pokus končí iba dvoma možnými výsledkami - nastane "úspech" resp. nastane "neúspech".
2. Pravdepodobnosť nastatia "úspechu" p je v každom pokuse rovnaká.
3. Náhodná premenná X znamená počet "úspechov" v n nezávislých pokusoch.

Náhodná premenná X má binomické rozdelenie s parametrami $n \in N$, $p \in (0,1)$, ak nadobúda hodnoty $0, 1, 2, ..., n$ s pravdepodobnosťami

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, ..., n.$$

Stredná hodnota a rozptyl sú rovné: $E(X) = np,\ D(X) = np(1-p)$.

Binomické rozdelenie je užitočné pri popise mnohých praktických situácií. Binomické rozdelenie má napr.

- počet vyklíčených semien z n náhodne vybraných semien,
- počet stromov, ktoré sa ujmú z n zasadených stromov,
- počet rastlín, ktoré vykvitnú na červeno z n zasadených rastlín,
- počet rastlín napadnutých hubovitou chorobou z n rastlín na poli.

Príklad 1. Podľa zistení je pravdepodobnosť, že sa vrabčie mláďa dožije dospelosti rovná 0,2. Ak sú vo vrabčom hniezde v priemere 4 mláďatá, vypočítajme pravdepodobnosť, že všetky mláďatá v hniezde sa dožijú dospelosti.

Riešenie. Počet mláďat v hniezde, ktoré sa dožijú dospelosti, je náhodná premenná X s binomickým rozdelením s parametrami $n = 4$, $p = 0,2$, t. j. $X \sim Bi(4; 0,2)$. Pravdepodobnosť, že všetky mláďatá v hniezde sa dožijú dospelosti je rovná

$$P(X = 4) = \binom{4}{4} 0,2^4(1 - 0,2)^0 = 0,0016.$$

Príklad 2. Pestuje sa hrach s bielymi alebo červenými kvetmi. Podľa Mendelových pravidiel je červená farba kvetu dominantný znak. Potom pravdepodobnosť, že vykvitne hrach s fialovými kvetmi je rovná $0,75$. Aká je pravdepodobnosť, že z 20 rastlín hrachu práve 12 vykvitne na červeno?
Riešenie. Počet rastlín hrachu, ktoré vykvitnú na červeno je náhodná premenná X s binomickým rozdelením s parametrami $n = 20$, $p = 0,75$, t. j. $X \sim Bi(20; 0,75)$. Potom

$$P(X = 12) = \binom{20}{12} 0,75^{12}(1 - 0,75)^8 = 0,0609.$$

Ako vidíme, pri implementovaní aplikačných úloh uvedeného typu do vyučovania danej problematiky, rutinné výpočty a nezáživné dosadzovania do vzorcov získavajú "nový rozmer a zmysel". Študenti riešia konkrétny, často pre nich podnetný a zaujímavý problém zo života, ich pohľad na daný abstraktný vzorec sa mení, motivácia pre učenie sa matematiky rastie.

2.2. **Poissonovo rozdelenie -** $Po(\lambda)$**.** Charakteristika náhodnej premennej s Poissonovým rozdelením :

1. Zisťujeme, koľkokrát nastane sledovaný jav počas danej jednotky času (plochy, objemu, vzdialenosti, ...).
2. Pravdepodobnosť nastatia sledovaného javu počas danej jednotky času (plochy, objemu, vzdialenosti, ...) je rovnaká pre všetky jednotky.
3. Počet nastatí sledovaného javu počas danej jednotky času (plochy, objemu, vzdialenosti, ...) závisí len od veľkosti danej jednotky.
4. Priemerný počet nastatí sledovaného javu v danej jednotke sa označuje λ.

Náhodná premenná X má Poissonovo rozdelenie s parametrom $\lambda > 0$, ak nadobúda hodnoty $0, 1, 2, ...$ s pravdepodobnosťami

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

Stredná hodnota a rozptyl sú rovné: $E(X) = \lambda$, $D(X) = \lambda$.

Poissonovo rozdelenie je užitočným modelom pri popise mnohých praktických situácií, kde sa vyskytujú zriedkavé javy, teda javy, ktoré sa vyskytujú s malými pravdepodobnosťami. Poissonovo rozdelenie má napr.

- počet vtáčich hniezd (rastlín, škodcov, dážďoviek) na danej ploche,
- počet mikroorganizmov (krviniek) v zornom poli mikroskopu,
- počet baktérií v jednej Petriho miske,
- počet škodcov na jednej rastline,
- ak $n \to \infty$ a $p \to 0$, možno binomické rozdelenie $Bi(n, p)$ aproximovať Poissonovým rozdelením s parametrom $\lambda = n\,p$.

Príklad 3. Pokusné pole je rozdelené na rovnako veľké štvorce. Zistilo sa, že priemerný počet nevyklíčených rastlín v jednom štvorci je 3. Aká je pravdepodobnosť, že
a) v jednom štvorci sa nachádza aspoň jedna nevyklíčená rastlína?
b) v jednom štvorci sa nachádza nepárny počet nevyklíčených rastlín?
c) v jednom štvorci sa nachádza párny počet nevyklíčených rastlín?
Počet nevyklíčených rastlín v jednom štvorci je náhodná premenná X s Poissonovým rozdelením s parametrom $\lambda = 3$.
Riešenie.
a) Pretože $X \sim Po(3)$, je pravdepodobnosť, že v jednom štvorci sa nachádza aspoň jedna nevyklíčená rastlina rovná

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{e^{-3}\, 3^0}{0!} = 0,9502.$$

b) Pravdepodobnosť, že v jednom štvorci sa nachádza nepárny počet nevyklíčených rastlín je rovná

$$P(X = 1) + P(X = 3) + P(X = 5) + ... = \frac{e^{-3}\, 3}{1!} + \frac{e^{-3}\, 3^3}{3!} + \frac{e^{-3}\, 3^5}{5!} + ... =$$
$$= e^{-3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{2k+1}}{(2k+1)!} = e^{-3} \sinh 3 = 0,4988.$$

c) Pravdepodobnosť, že v jednom štvorci sa nachádza párny počet nevyklíčených rastlín je rovná

$$P(X = 0) + P(X = 2) + P(X = 4) + ... = \frac{e^{-3}\, 3^0}{0!} + \frac{e^{-3}\, 3^2}{2!} + \frac{e^{-3}\, 3^4}{4!} + ... =$$
$$= e^{-3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{2k}}{(2k)!} = e^{-3} \cosh 3 = 0,5012.$$

Príklad 4. Sleduje sa výskyt istého druhu chránenej rastliny. Lúka je rozdelená na 1 000 rovnako veľkých štvorcov. Na 69 z nich sa nenachádza žiadna chránená rastlina. Na lúke sú chránené rastliny rozmiestnené náhodne. Odhadnime ich počet.
Riešenie. Pravdepodobnosť, že na jednom pokusnom poli sa nenachádza žiadna chránená rastlina je rovná

$$P(X = 0) = \frac{e^{-\lambda}\, \lambda^0}{0!} = 0,069.$$

Potom

$$0,069 = e^{-\lambda} \quad \text{a teda} \quad \lambda = 2,6736.$$

Odtiaľ odhad počtu chránených rastlín na lúke je rovný $n = 1\,000.\lambda = 2\,674$.

Uvedené príklady sú inšpiratívne aj z toho dôvodu, že poukazujú na kontext pojmu z teórie pravdepodobnosti s ďalšími matematickými pojmami. Napr. pri riešení príkladu 3 sme využili aj známe rozvoje funkcií $y = \sinh x$ a $y = \cosh x$ do MacLaurinovho radu. Pri riešení príkladu 4 sme zase riešili jednoduchú exponenciálnu rovnicu.

Študenti pri riešení úloh tohto typu registrujú vzájomné prepojenie pojmov z rôznych oblastí matematiky, čo je jeden z kľúčových didaktických momentov. Ak totiž chceme, aby študenti nazerali na matematické pojmy neformálne, musíme im ich prezentovať vo vzťahoch, a to na dvoch úrovniach: súvis matematických pojmov medzi sebou, matematické pojmy a ich prepojenie na reálny svet.

3. Záver

Príroda (svet prírody) okolo nás ukrýva mnohé tajomstvá, ktoré môže vysvetliť, interpretovať a odkryť práve matematika. Matematické modely a matematické simulácie prinášajú odpovede na mnohé otázky, ktoré v nás vyvoláva obklopujúci svet s celou jeho rozmanitosťou. Kooperácia matematiky s prírodnými vedami je inšpiratívna, obohacujúca, ale predovšetkým, v dnešnom svete, ktorý sa dožaduje exaktných odpovedí a presnej kvantifikácie každého problému, nadovšetko nevyhnutná.
David Hilbert, veľký matematik - teoretik sa nebál vysloviť takýto výrok:
Matematika by nemala byť považovaná za hotovú (zavŕšenú), pokiaľ ju neurobíme takou jasnou a zrozumiteľnou, že ju dokážeme objasniť každému človeku, ktorého stretneme na ulici.
A nám nezostáva iné, len s ním súhlasiť a neustále pokračovať v úsilí: učiť matematiku atraktívnejšie, zaujímavejšie, učiť matematiku aplikovať.

References

[1] Anděl, J., *Statistické metody.* Matfyzpress Praha, 1998.

[2] Dorociaková B., Pobočíková I., *Zbierka úloh z pravdepodobnosti a matematickej štatistiky*, Edis Žilina 2005.

[3] Grofík R., Fľak P., *Štatistické metódy v poľnohospodárstve*, Príroda, Bratislava, 1990.

[4] Plocki A., *Pravdepodobnosť okolo nás*, Katolícka univerzita, Ružomberok, 2004.

[5] Zvára K., *Biostatistika*, Karolinum, Univerzita Karlova v Praze, Praha, 2003.