



## KONŠTRUKTIVISTICKÉ PRÍSTUPY K VYUČOVANIU KRITÉRIÍ DELITEĽNOSTI S VYUŽITÍM TABUĽKOVÉHO KALKULÁTORA

## CONSTRUCTIVIST APPROACHES IN TEACHING DIVISIBILITY RULES USING A SPREADSHEET

Júlia Lukáčová, Stanislav Lukáč

**Abstract:** Rapid development of the information society and the necessity for reforming the education system requires modernization of attitudes towards education and improvements in teaching outputs. One way of modernizing the mathematics education, which could lead to an active acquisition and better understanding of mathematical knowledge, is the application of constructivist approaches in learning mathematics. This paper is focused on the application of constructivist approaches to teaching selected divisibility rules. The main attention is devoted to the composition of a sequence of tasks implemented within a spreadsheet environment, the solution of which should encourage students to actively learn and discover divisibility by 4 rule.

**Key words:** constructivism, mathematics teaching and learning, divisibility rules, mathematical tasks, spreadsheet, feedback

### Úvod

Vyučovanie v modernej škole 21. storočia nastoľuje nové požiadavky na vyučovacie stratégie aj na pedagogické a odborné kompetencie učiteľov. V aktuálnych dokumentoch európskych vzdelávacích agentúr, alebo aj v dokumentoch UNESCO sa zdôrazňuje dôležitosť inovácie vzdelávania, v ktorej má dôležité postavenie aj matematické vzdelávanie [7]. V súlade s celoeurópskymi trendmi prebieha od školského roka 2008/09 reforma vzdelávacieho systému aj na Slovensku. Reforma vzdelávania je zložitý a relatívne pomalý proces. Vyžaduje plánovité a systematické pôsobenie zamerané na inováciu vzdelávania, ktorej základom je vo vyučovaní matematiky dôsledné uplatňovanie metód skúmania a objavovania matematických vzťahov a aktívneho osvojovania nových poznatkov.

Významnou súčasťou školskej reformy je kurikulárna transformácia. Redukcia vzdelávacieho obsahu je odozvou na transmisívne odovzdávanie poznatkov vo vzdelávacom procese, ktorého základom je transformácia hotových poznatkov do žiakovej poznatkovej štruktúry. V súlade s modernými koncepciami vzdelávania má byť vyučovanie matematiky orientované na porozumenie matematických štruktúr a vzťahov a na rozvíjanie schopnosti aplikovať osvojené poznatky pri riešení matematických problémov. Jednou z ciest modernizácie matematického vzdelávania, ktorá by mohla viesť k aktívnemu osvojovaniu a lepšiemu porozumeniu matematických poznatkov, je uplatňovanie konštruktivistických prístupov k vyučovaniu a učeniu sa matematiky.

## 1 Konštruktivistické prístupy k matematickému vzdelávaniu

Švajčiarsky psychológ Jean Piaget nadviazal na práce iných bádateľov, ako boli napr. Dewey, Montessori a vypracoval základy teórie konštruktivistického učenia sa. Vo filozofii učenia sa vychádza konštruktivizmus z predpokladu, že žiak v aktívnej interakcii s prostredím na základe reflexie svojich skúseností konštruuje vlastné chápanie sveta. Pri vykonávaní učebných činností si postupne vytvára vlastné „pravidlá a mentálne modely“, ktoré konfrontuje s novými zisteniami a skúsenosťami.

Hejný a Kuřina [2] prispôsobili teóriu konštruktivizmu špecifickým podmienkam a cieľom matematického vzdelávania do podoby tzv. didaktického konštruktivizmu. V publikácii [3] je sformulovaných desať zásad vyjadrujúcich ich chápanie konštruktivistického vyučovania matematiky, pre ktoré je typické aktívne vytváranie časti matematiky v myslí žiaka. Ako zdôrazňuje aj Fulier [1], pri uplatňovaní konštruktivistických prístupov k vyučovaniu by mali učitelia matematiky neustále klásť dôraz na aktivitu žiakov, aktívne ich zapojiť do procesu vytvárania nových poznatkov, t.j. aby čo najviac zákonitostí a princípov odvodzovali sami, prostredníctvom ich samostatnej výskumnej práce.

Pri aplikovaní konštruktivistických prístupov k učeniu by mali žiaci aktívne hľadať odpovede na otázky, ktoré sa vynorili pri riešení úloh v učebnom prostredí, v ktorom sa nedajú ľahko získať odpovede na nastolené otázky a hotové výsledky, ale ktoré poskytuje stimuly na experimentovanie, samostatné skúmanie, nadobúdanie skúseností a hľadanie vhodných argumentov na zdôvodňovanie nových zistení. Stehlíková a Cachová [6] sformulovali 5 téz, ktoré charakterizujú konštruktivistické prístupy učiteľa k organizovaniu učebných činností žiakov:

- učiteľ prebúdzá záujem žiaka o matematiku a jej poznávanie,
- učiteľ predkladá žiakom podnetné prostredia (úlohy a problémy) a vhodne s nimi pracuje,
- učiteľovi ide predovšetkým o žiakovu aktívnu činnosť,
- učiteľ nazerá na chybu ako na vývojové štádium žiakovho chápania matematiky a impulz pre ďalšiu prácu,
- učiteľ sa u žiakov prednostne orientuje na diagnostiku porozumenia ako na reprodukciu odpovede.

Aby učitelia aplikovali vo svojej výučbe konštruktivistické prístupy k učeniu je užitočné transformovať všeobecné princípy tejto koncepcie učenia do konkrétnejších modelov a metód vyučovania. V našom výskume sme upriamili pozornosť na trojfázový model EUR [5], ktorý ponúka príležitosti pre rozvoj kritického myslenia a schopností žiakov samostatne objavovať nové poznatky a porozumieť ich významu. Model EUR poskytuje rámec pre konštruktivistickú realizáciu základných etáp procesu učenia:

- **Evokácia** – proces učenia začína tým, že si žiaci vybaví v pamäti a zopakujú, čo si myslia, že vedú o predloženej téme. Zámerom prvej fázy je nadviazať na už existujúce poznatky, ktoré tvoria východisko pre objavovanie nových poznatkov.
- **Uvedomenie si významu** – zámerom druhej etapy je konfrontácia žiakovho pôvodného konceptu danej témy s novými aktívne získanými informáciami a zisteniami. Žiaci sa

snažia porozumieť objavené vlastnosti a vzťahy a vytvárať väzby medzi novými a skôr osvojenými poznatkami.

- **Reflexia** - žiaci si prehĺbujú nové vedomosti a aktívne transformujú nové poznatky do svojich vnútorných poznatkových štruktúr. Výsledkom záverečnej fázy by mali byť znalosti a schopnosti využívať osvojené poznatky pri riešení úloh.

Proces poznávania nových pojmov a vzťahov sa realizuje v prepojení na už známe pojmy a vzťahy na základe praktických činností, ktoré prinášajú žiakovi nové skúsenosti. Pri plánovaní výučby je dôležitá dekompozícia matematického obsahu do menších nadväzujúcich krokov, ktoré stimulujú aktivitu žiaka pri experimentovaní, skúmaní a objavovaní nových poznatkov. Prechod k zovšeobecňovaniu a k abstrakcii umožňuje riešenie vhodne zvolenej postupnosti úloh, ktoré podnecujú žiaka k vytváraniu a využívaniu rôznych modelov v procese ich riešenia. Transmisívny prenos poznatkov od učiteľa k žiakom predstavuje najľahšiu cestu vzdelávania. Na prebudenie záujmu žiakov o aktívny prístup k učeniu má kľúčový význam motivácia. Preto je dôležité nastoliť ešte pred fázou evokácie alebo v jej závere vhodnú problémovú situáciu, ktorá by mala mať priamy vzťah s reálnym životom žiaka.

Vzhľadom na charakter súčasnej informačnej spoločnosti je jedným z aspektov modernizácie vzdelávania integrácia digitálnych technológií (DT) do vyučovania. Úspešnosť zavádzania DT do vzdelávania je podmienená nielen rozvíjaním digitálnej gramotnosti učiteľov, ale aj poskytovaním námetov a ukážok efektívneho a zmysluplného využívania DT v rôznych etapách procesu učenia. Pri vytvorení podnetného učebného prostredia na skúmanie vlastností geometrických útvarov a geometrických vzťahov možno využívať dynamické geometrické systémy. V publikácii [8] je uvedených niekoľko námetov na využitie tabuľkového kalkulátora vo výučbe matematiky. Tabuľkové kalkulátory môžu poskytnúť interaktívne prostredie aj na skúmanie a objavovanie vlastností čísel a závislostí medzi číselnými údajmi.

Ako zdôrazňuje Slavíčková [4], pri vedení vyučovacieho procesu musí učiteľ vykonávať rôznorodé činnosti, medzi ktoré patria aj úlohy vychovávateľa, poradcu, policajta alebo sudcu. Pri niektorých z uvedených činností môže učiteľovi pomôcť počítač. Kvalitne didakticky spracované digitálne učebné materiály sú nielen nositeľom informácií a zadávateľom úloh pre žiaka, ale môžu poskytovať aj potrebnú mieru interaktivity, prostriedky na skúmanie, modelovacie činnosti a komunikáciu so vzdelávacím prostredím, ktorá spolu so spätnou väzbou vytvára možnosti pre usmerňovanie procesu učenia.

V ďalšej časti sa zameriame na obsah a didaktické spracovanie interaktívneho pracovného zošita pre podporu realizácie konštruktivistického prístupu k výučbe deliteľnosti v obore prirodzených čísel. Pracovný zošit je vytvorený pomocou tabuľkového kalkulátora MS Excel a jeho obsah tvorí osem stránok obsahujúcich postupnosť úloh, ktorých riešenie by mohlo žiakov priviesť k objaveniu kritéria deliteľnosti číslom 4. Na jednotlivých stránkach sú umiestnené riadiace a navigačné tlačidlá, ktoré zabezpečujú kontrolu žiackych riešení a prechod na nasledujúcu úlohu, ktorý je vo väčšine prípadov podmienený správnym vyriešením zadanej úlohy.

## 2 Úlohy na objavovanie kritéria deliteľnosti číslom 4

V etape evokácie je vhodné zopakovať so žiakmi rozvinutý zápis čísla v desiatkovej číselnej sústave a význam vzťahu „číslo  $b$  je deliteľom čísla  $a$ “. Ešte pred objavovaním kritéria

## Konstruktivistické prístupy k vyučovaniu kritérií deliteľnosti s využitím tabuľkového kalkulátora

deliteľnosti číslom 4 by mali žiaci už poznať kritéria deliteľnosti číslami 2, 5 a 10. Učiteľ by už v tejto etape mohol zaviesť zápis čísla obsahujúci zástupný znak „c“, za ktorý možno do zápisu čísla dosadzovať ľubovoľnú číslicu. Pre porozumenie zápisu čísla s premennou a zopakovanie kritérií deliteľnosti číslami 2, 5 a 10 by učiteľ mohol zadať žiakom úlohy typu:

- Vytvorte zápis dvojčiferného čísla s jedným zástupným znakom „c“, z ktorého po dosadení ľubovoľnej číslice získame číslo deliteľné číslom 2.
- Vytvorte zápis trojčiferného čísla s jedným zástupným znakom „c“, z ktorého po dosadení ľubovoľnej číslice nemožno získať číslo deliteľné číslom 5.

Bolo by vhodné, aby učiteľ vyžadoval od žiakov nielen zopakovanie znenia kritérií deliteľnosti číslami 2, 5 a 10, ale aj porozumenie, prečo stačí preverovať poslednú číslicu v skúmaných číslach.

Po zopakovaní vedomostí a zručností zadáme žiakom úlohy vypracované vo forme pracovného zošitu. Prvý hárok zošita obsahuje motivačnú úlohu, pri riešení ktorej by mali žiaci hľadať zvyšky pri delení dvojčiferných prirodzených čísel číslom 4. Na pomocné výpočty by mohli využívať aj papier a ceruzku. Žiaci môžu zapisovať údaje len do niekoľkých buniek pracovného hárku, lebo ostatné bunky sú zamknuté. Nepredpokladáme, že žiaci budú pri riešení úlohy používať vzorce programu MS Excel, ale výpočty podobného typu, aké ponúkajú kalkulačky by neznamenali oslabenie zámerov, ktoré boli zohľadňované pri zostavovaní postupnosti úloh pracovného zošita. Po otvorení pracovného zošita sa skryjú všetky hárky okrem prvého obsahujúceho motivačnú úlohu. Hlavná časť prvého hárku je zobrazená na obrázku 1.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	<b>Rozdeľovanie predmetov</b>							
2	<p>Otec nakúpil pre dvoch synov predmety do školy. V tabuľke je uvedený zoznam predmetov spolu s cenami. Rozhodol sa, že predmety rozdelí synom tak, aby cena predmetov, ktoré dostane starší syn bola trikrát väčšia, ako cena predmetov, ktoré dostane mladší syn. Ešte pred rozdelením sa rozhodol, že si jednu vec nechá pre seba. Nájdite aspoň jedno rozdelenie predmetov vyhovujúce požiadavkám otca.</p>							
3								
4								
5	Do riadku s názvom Rozdelenie, zapíšte čísla podľa toho, komu bude daný predmet pridelený: otcovi - 0, staršiemu synovi - 1, mladšiemu synovi - 2.							
6								
7	<b>Vec</b>	<b>aktovka</b>	<b>kniha</b>	<b>USB kľúč</b>	<b>značkové pero</b>	<b>karisblok</b>	<b>pero</b>	<b>popisovačka</b>
8	<b>Cena</b>	30	20	14	10	9	6	1
9	<b>Rozdelenie</b>	1	2	1	0	1	1	1
10		30	0	14	0	9	6	1
11		0	20	0	0	0	0	0
12		<b>Spolu</b>						
13		Starší syn		Znova		Pomocník		
14		Mladší syn						
15								
16	1	<b>Vyhodnotenie</b>	správne				Návod	

Obr. 1: Motivačná úloha

Žiaci môžu zapisovať údaje len do riadku s poradovým číslom 9. Na začiatku sú uložené v tomto riadku samé nuly. Na obrázku 1 je už vytvorené jedno riešenie úlohy. V riadkoch s poradovými číslami 10 a 11 a v bunke A16 sú údaje pre vyhodnotenie riešenia. Pôvodne sú v pracovnom hárku zapísané bielym písmom, aby ich žiak nevidel. V bunke B10 je zapísaný vzorec:  $=IF(B9=1;B8;0)$ . Podobné vzorce sú uložené aj v ďalších bunkách v týchto dvoch riadkoch, ktoré slúžia na výpočet cien predmetov pridelených jednotlivým synom. Súčet cien predmetov, ktoré dostal starší syn (riadok s poradovým číslom 10), je uložený v bunke C13 a súčet cien predmetov, ktoré dostal mladší syn, je uložený v bunke C14. V bunke A16 je spočítané pomocou vzorca:  $=COUNTIF(B9:H9;"=0")$ , koľko núl je zapísaných v tabuľke v riadku s poradovým číslom 9. Pomocné údaje sú využité vo vzorci v bunke C16, ktorý poskytuje žiakovi informáciu o správnosti riešenia úlohy. Vzorec z aktívnej bunky C16 je zobrazený vo vzorcovom paneli. Pri zamýknaní hárkov v zošite bolo zobrazovanie vzorcov vypnuté, takže žiak vzorce nevidí a nemôže z nich vypočítať správne riešenie úlohy.

Motivačná úloha má 8 rôznych riešení. Pre šikovných žiakov je v dolnej časti pracovného hárku otvorená oblasť buniek, do ktorých môžu zapísať aj ďalšie riešenia úlohy takým spôsobom, že vymenujú predmety, ktoré dostal mladší syn. Ak žiak nevie riešiť úlohu, môže využiť pomocníka, ktorý zobrazí pomocnú informáciu nabádajúcu žiaka, aby sa zamyslel, či si môže otec nechať aktovku. Ešte podrobnejšiu pomocnú informáciu poskytuje tlačidlo **Návod**, ktoré upozorňuje žiaka, že pri hľadaní riešenia úlohy by sa mal zamyslieť nad tým, ktoré veci si otec nemôže ponechať. Otec si napríklad určite nemôže ponechať knihu, lebo súčet cien zvyšných predmetov je 70, a nemožno ich už rozdeliť medzi synov v pomere 3:1.

V dolnej časti pracovného hárku je tlačidlo **Ďalej**, zatlačenie ktorého zobrazí pracovný hárak s nasledujúcou úlohou. V prípade hárku s motivačnou úlohou môže žiak prejsť na ďalšiu úlohu, aj keď túto úlohu nevyrieši správne. Na ďalších hárkoch však už tlačidlo **Ďalej** zobrazí hárak s nasledujúcou úlohou len v tom prípade, ak žiak správne vyriešil príslušnú úlohu. Tento spôsob vypracovania pracovného zošita sme aplikovali za tým účelom, aby žiak musel požiadať o pomoc učiteľa, ak nerozumie zadaniu úlohy, alebo ju nevie vyriešiť. V tomto prípade by nebolo vhodné, aby pokračoval riešením nadväzujúcich úloh. Učiteľ tak môže zabezpečovať žiakom priebežnú pomoc, pri ktorej by však mal mať na zreteli, aby žiakovi neprezradil príliš veľa, aby žiak v závislosti od svojich schopností, čo najväčšiu časť riešení úloh vykonal samostatne.

Pri riešení prvej úlohy museli žiaci preskúmať deliteľnosť číslom 4 niektorých celých čísel súvisiacich s cenami predmetov. Aj z týchto celých čísel môžu žiaci vybrať vyhovujúce čísla a využiť ich pri riešení druhej úlohy, v ktorej majú zapísať do tabuľky päť rôznych celých čísel väčších ako 50, ktoré sú deliteľné číslom 4. Pri riešení druhej úlohy môžu žiaci pri výbere čísel využívať rôzne postupy. Napríklad môžu zapísať do tabuľky päť za sebou idúcich násobkov čísla 4. Aby sme žiakov upozornili na niektoré súvislosti, v tretej úlohe majú rozhodnúť, ktoré z piatich čísel uvedených v tabuľke (63, 88, 204, 314, 500) sú deliteľné číslom 4. Pri riešení úlohy by si mali uvedomiť, že celé číslo zakončené párnou číslicou napríklad 4 nemusí byť deliteľné číslom 4. Ďalšou dôležitou vlastnosťou celých čísel vo vzťahu k deliteľnosti číslom 4, na ktorú sme chceli žiakov naviesť, je skutočnosť, že násobky čísla 100 sú deliteľné číslom 4.

Štvrtá úloha znamená prechod od vyšetrovania konkrétnych celých čísel k skúmaniu zapisov celých čísel obsahujúcich zástupný znak „c“ predstavujúci ľubovoľnú číslicu, čo už predstavuje určitú mieru abstrakcie. Spracovanie štvrtej úlohy pracovného zošita je zobrazené na obrázku 2.

## Konstruktivistické prístupy k vyučovaniu kritérií deliteľnosti s využitím tabuľkového kalkulátora

Nájdite všetky možnosti, ako možno doplniť za znak "c" číslicu tak, aby vzniklo číslo deliteľné číslom 4. Jednu možnosť zapíšte aj do tabuľky.

Všeobecný zápis	Príklad	Počet možností
8c		

Znova

Hodnotenie **nevyplnené**

Obr. 2: Dopĺňovanie číslice za znak „c“

Žiaci môžu uviesť pri riešení úlohy ako príklad jedno z troch čísel 80, 84, 88. Nasledujúca úloha pracovného zošita poskytuje žiakom viac priestoru na samostatné skúmanie, lebo vyžaduje vytvorenie zápisu dvojciferného čísla, ktorý má obsahovať jeden zástupný znak „c“ a má mať požadované vlastnosti. Zadanie piatej úlohy spolu s jedným možným riešením je zobrazené na obrázku 3.

Vytvorte zápis dvojciferného čísla s jedným znakom "c", aby z neho bolo možné vytvoriť čo najviac dvojciferných čísel deliteľných číslom 4.

Desiatky	Jednotky	Počet možností
c	2	5

Znova

Hodnotenie **správne**

Obr. 3: Riešenie piatej úlohy pracovného zošita

Pri riešení štvrtej úlohy mohli žiaci zistiť, že ak je zástupný znak „c“ v čísle na mieste jednotiek, tak možno za neho dosadiť dve alebo tri číslice, aby bolo vytvorené číslo deliteľné číslom 4. Preto by sa pri riešení piatej úlohy mali žiaci sústrediť na skúmanie zápisov celých čísel, v ktorých je zástupný znak „c“ na mieste desiatok. Ak by sme zostavili zápis čísla  $c0$ , tak v prípade, že za znak „c“ dosadíme číslicu 0, nevznikne dvojciferné celé číslo a ostanú nám štyri možnosti pre doplnenie číslice za znak „c“ (2, 4, 6, 8). Štyri riešenia dostaneme aj pri zápisoch čísel:  $c4$ ,  $c8$ . Až päť riešení v sebe zahŕňajú zápisy čísel  $c2$  a  $c6$ .

Po práci s dvojcifernými číslami predstavuje dôležitý krok pri objavovaní kritéria deliteľnosti prirodzených čísel číslom 4 vyšetřovanie trojciferných čísel. V šiestej úlohe majú žiaci doplniť v tabuľke konkrétne číslice na miesta desiatok a jednotiek, pričom na mieste stoviek už je zadaná číslica 1. Aby sme žiakov nabádali k uvedomeniu si, že rovnako by mohli postupovať aj keď bude na mieste stoviek iná číslica väčšia ako nula, v nadväzujúcej siedmej úlohe znova prechádzame k zápisu trojciferného čísla so zástupným znakom „c“.

Riešenie siedmej úlohy vyžaduje od žiakov vytvorenie zápisu trojciferného čísla s jedným zástupným znakom „c“ spĺňajúceho požiadavku, aby pri dopĺňovaní číslic za znak „c“ bolo možné získať čo najviac trojciferných čísel deliteľných číslom 4. Siedma úloha predstavuje zovšeobecnenie riešenia štvrtej a piatej úlohy. Žiaci už vedľa, že ak zapíšeme zástupný znak na miesto desiatok, tak možno získať najviac 5 dvojciferných čísel deliteľných číslom 4. Preto má zmysel preskúmať zápisy trojciferných čísel, v ktorých je zástupný znak umiestnený na mieste stoviek.

Siedma úloha má v pracovnom zošite z hľadiska naplnenia vyučovacieho cieľa zásadné postavenie. Žiakov sa snažíme priviesť k zisteniu, že nezáleží na tom, aká nenulová číslica bude dosadená za zástupný znak na mieste stoviek, lebo odpovedajúci násobok čísla 100 bude stále deliteľný číslom 4. Ak k príslušnému násobku čísla 100 pripočítame číslo zostavené z dvoch cifier, ktoré predstavujú zápis čísla deliteľného číslom 4, tak aj výsledné číslo musí byť deliteľné číslom 4.

Na záver už ostáva len privedenie žiakov k uvedomeniu si, že objavené pravidlo platí aj pre väčšie ako trojciferné čísla. Pri riešení poslednej úlohy pracovného zošita majú žiaci vytvoriť štvorciferné číslo s práve jedným zástupným znakom „c“ tak, aby sme po doplnení ľubovoľnej cifry za znak „c“ získali štvorciferné číslo deliteľné číslom 4. Vypracovanie posledného hárku pracovného zošita s jedným možným riešením je zobrazené na obrázku 4. Zástupný znak „c“ je potrebné zapísať na miesto stoviek, aby sme aj po dosadení číslice 0 za znak „c“ získali štvorciferné číslo.

Vytvorte zápis štvorciferného čísla s práve jedným znakom "c" tak, aby sme po doplnení ľubovoľnej číslice za znak "c" získali štvorciferné číslo deliteľné číslom 4.

Tisícky	Stovky	Desiatky	Jednotky
1	c	4	0

Hodnotenie	správne
------------	---------

Obr. 4: Riešenie poslednej úlohy pracovného zošita

Pod vyhodnotením riešenia úlohy je vyfarbená oblasť buniek, ktoré sú pre žiakov otvorené pre zápis. Žiaci sú vyzvaní, aby zapísali svoje nápady na uľahčenie rozhodovania o deliteľnosti prirodzeného čísla číslom 4. Po vyriešení úloh v pracovnom zošite by mali žiaci uložiť pracovný zošit pod svojim menom, aby sa pre učiteľa zachovali ich riešenia úloh.

V etape reflexie by mal učiteľ spolu so žiakmi zhrnúť objavené zistenia. Od žiakov by mal vyžadovať uvádzanie správnych argumentov pri ich zdôvodňovaní. Aby žiaci aj porozumeli nové poznatky a vedeli ich transformovať do už existujúcich poznatkových štruktúr je vhodné aplikovať nové poznatky pri riešení ďalších úloh, napríklad pri hľadaní kritéria deliteľnosti číslom 25 a podnecovať žiakov k hľadaniu súvislostí medzi novými a skôr osvojenými poznatkami. Učiteľ by mohol napríklad žiadať od žiakov vysvetlenie vzťahu medzi deliteľnosťou dvomi a štyrmi. Pri aplikovaní poslednej etapy modelu EUR by podľa nášho názoru bolo vhodné využiť skupinovú formu vyučovania. Žiaci by vo vzájomnej diskusii vysvetľovali a zdôvodňovali svoje zistenia, prípadne aj oponovali pri nesprávnych argumentoch spolužiakov. Na ďalšie skúmanie by mohlo byť žiakom zadané hľadanie kritéria deliteľnosti číslom 8.

### 3 Využitie pracovného zošita vo vyučovacom procese

Pracovný zošit bol vyskúšaný v skupine 7 žiakov 1. ročníka gymnázia ešte pred preberaním témy Deliteľnosť prirodzených čísel. Vybraní žiaci nevedeli na začiatku experimentálnej výučby zapísať kritérium deliteľnosti číslom 4. Vyriešenie úloh v pracovnom zošite trvalo žiakom 20 až

## Konstruktivistické prístupy k vyučovaniu kritérií deliteľnosti s využitím tabuľkového kalkulátora

28 minút. Najviac otázok žiakov sa týkalo riešenia motivačnej úlohy a piatej úlohy, v ktorej mali žiaci prvý krát zostaviť všeobecný zápis čísla s jedným zástupným znakom „c“.

V prvej úlohe niektorí žiaci neporozumeli systém priradovania čísel 0, 1, 2 k predmetom a pri rozdeľovaní predmetov mali v tabuľke viac ako jednu 0, čo znamenalo, že otec si ponechal viac predmetov. Dve žiačky nevyriešili prvú úlohu. Väčšina žiakov našla rozdelenie predmetov, v ktorom si otec ponechal aktovku. Možno predpokladať, že tento výsledok ovplyvnilo využitie pomocnej informácie. Viac ako jedno riešenie zapísal jeden žiak. Pri riešení piatej úlohy niektorí žiaci umiestnili znak „c“ na pozíciu jednotiek a získali najviac tri možnosti na vytvorenie dvojciferného čísla deliteľného číslom 4. Učiteľka musela naviesť týchto žiakov, aby skúsili umiestniť znak „c“ na pozíciu desiatok. Pri riešení poslednej úlohy niektorí žiaci umiestnili znak „c“ na pozíciu tisícok a pýtali sa učiteľky, prečo je ich riešenie vyhodnotené ako nesprávne.

Piaty žiaci po vyriešení poslednej úlohy sformulovali vlastnými slovami kritérium deliteľnosti číslom 4. Dvomi žiačkami Ivane a Simone, ktoré nenapísali kritérium správne, sme položili po vypracovaní pracovného listu niekoľko otázok. Zhodou okolností sú to práve tie žiačky, ktoré nevyriešili motivačnú úlohu.

Ivana napísala na poslednom hárku pracovného zošita, že aby číslo bolo deliteľné číslom 4, musí byť vhodne zakončené. Pri analýze výsledkov jej riešení úloh sme zistili, že všetky zostavené čísla, až na riešenie piatej úlohy, boli zakončené číslicou 0. Preto sa naša prvá otázka týkala tejto skutočnosti a spýtali sme sa, či čísla ukončené číslicou 0 musia byť deliteľné číslom 4. Žiačka správne odpovedala a vedela uviesť príklady, kedy to neplatí. Potom sme sa spýtali, čo to znamená, že číslo musí byť vhodne ukončené. Z odpovede žiačky vyplynulo, že aj ona pri riešení posledných dvoch úloh vedela správne využívať kritérium deliteľnosti číslom 4, ale neuviedla na záver jeho presnú formuláciu.

Simona mala viaceré problémy už pri riešení úloh. Zo začiatku sa za číslice snažila dosadzovať aj čísla väčšie ako 9. Napríklad pri riešení piatej úlohy skúšala deliteľnosť číslom 4 aj pre trojciferné čísla. Výsledky riešenia prvých úloh nevedela využiť pri riešení siedmej úlohy, ktorú vyriešila len s pomocou učiteľky. Simona nezapísala žiadne nápady na uľahčenie rozhodovania o deliteľnosti prirodzených čísel číslom 4. Pri rozhovore s učiteľkou však postupne prišla na to, ako možno jednoducho rozhodnúť o deliteľnosti prirodzených čísel číslom 4. Na ilustráciu uvádzame podstatnú časť rozhovoru medzi učiteľkou (U) a žiačkou Simonou (S).

U: Pri riešení siedmej úlohy ste uviedli ako všeobecný zápis čísla deliteľného číslom 4 zápis  $c16$ . Aké konkrétne čísla sú vyjadrené v tomto zápise?

S: Napríklad 216, 316.

U: Ak za znak „c“ dosadíme číslicu 7, dostaneme číslo deliteľné číslom 4?

S: Áno, číslo 716 je deliteľné štyrmi.

U: V poslednej úlohe ste uviedli, že zo zápisu štvorciferného čísla  $1c24$  získame po dosadení ľubovoľnej číslice za znak „c“ číslo deliteľné číslom 4. Ako by ste rozhodli, či číslo 1924 je deliteľné číslom 4?

S: Vydelila by som číslo 1924 číslom 4.

U: Nedalo by sa to zistiť aj jednoduchšie?

S: Neviem.



U: Ako by nám bez vydelenia pôvodného čísla mohol pomôcť pri rozhodovaní zápis  $1900 + 24$ ?

S: Číslo 1900 je deliteľné číslom 4 aj číslo 24 je deliteľné číslom 4. Aj súčet bude deliteľný číslom 4.

U: Je každý násobok čísla 100 deliteľný číslom 4?

S: Áno.

U: Je číslo 1982 deliteľné číslom 4?

S: Nie, lebo číslo 82 nie je deliteľné číslom 4.

## Záver

System úloh tvoriaci základ opisovaného pracovného zošita spolu s prostredím tabuľkového kalkulátora poskytujúceho nástroje na výpočty s číselnými údajmi, ale aj na zapracovanie interaktivity a spätnej väzby umožňujú aplikovať konštruktivistický prístup k učeniu sa. Navrhnutý postup učenia predstavuje len jednu zo stratégií, ktorú by mohol učiteľ využiť pre stimulovanie aktívneho osvojovania poznatkov z elementárnej teórie čísel. Pri príprave výučby sa musí učiteľ rozhodnúť aj v závislosti na podmienkach v triede, či uprednostní samostatnú alebo skupinovú prácu, či budú žiaci pri učebných činnostiach používať v prevažnej miere tradičné vyučovacie pomôcky alebo moderné DT. Plánovanie a realizácia konštruktivistických prístupov k učeniu konkrétnych matematických tém je výzvou pre učiteľa zamýšľať sa nad tým, ako pripraviť učebné situácie, aby mohli žiaci experimentovať a na základe svojich skúseností aktívne objavovať nové poznatky a ktoré by uľahčili žiakom porozumenie matematických pojmov, zákonitostí a vzťahov.

## Literatúra

- [1] Fulier, J.: Prvky konštruktivismu pri riešení extrémálnych úloh. In: Šedivý, O. a kol.: Konštruktivismus vo vyučovaní matematiky a budovanie geometrických predstáv. Fakulta prírodných vied Univerzity Konštantína Filozofa v Nitre, Nitra, 2010, 11 s. ISBN 978-80-8094-723-1.
- [2] Hejný, M., Kuřina, F.: Dítě, škola a matematika: Konstruktivistické přístupy k vyučování. Praha, Portál, 2001, 187 s. ISBN 80-7178-581-4.
- [3] Hejný, M., Novotná, J., Stehlíková, N.: Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky, 1. díl. Univerzita Karlova v Praze, 2004, 455 s. ISBN 80-7290-189-3.
- [4] Slavičková, M.: Jednoduché matematické programy vo vyučovaní matematiky na druhom stupni základných škôl. EMATIK, 2007, 7 s.
- [5] Steele, J. L., Meredith, K. S., Temple, Ch.: Rámec pre kritické myslenie vo vyučovaní. Projekt Orava, Bratislava, 1998, 8 s.
- [6] Stehlíková, N., Cachová, J.: Konstruktivistické přístupy k vyučování a praxe. JČMF, 2006, 31 s.

Konstruktivistické prístupy k vyučovaniu kritérií deliteľnosti s využitím tabuľkového kalkulátora

- [7] UNESCO: Challenges in basic mathematics education. Paris, 2012, 99 s. ISBN 978-92-3-001071-3.
- [8] Žilková, K.: Heuristika v informatizácii výučby matematiky. Metodicko-pedagogické centrum v Bratislave, Bratislava, 2006, 88 s. ISBN 80-8052-261-8.

**Mgr. Ing. Júlia Lukáčová**  
Gymnázium Opatovská 7, Košice  
[julia.lukac@gmail.com](mailto:julia.lukac@gmail.com)

**doc. RNDr. Stanislav Lukáč, PhD.**  
Prírodovedecká fakulta UPJŠ v Košiciach, Jesenná 5, 040 01 Košice  
[stanislav.lukac@upjs.sk](mailto:stanislav.lukac@upjs.sk)