ČÍSELNÁ OS AKO POMÔCKA NA KARTÉZSKY POPIS PRIESTORU

NUMBER AXIS AS A INSTRUMENT ON CARTESIAN DESCRIPTION OF AREA

Zuzana Malacká

Abstract

In this paper we try to explain that the picture has nothing to be only graphic record of this, what we present with words. The picture is very useful when we define new terms, when we solve examples.

Key words
Number axis, Cartesian coordinate system, didactic software

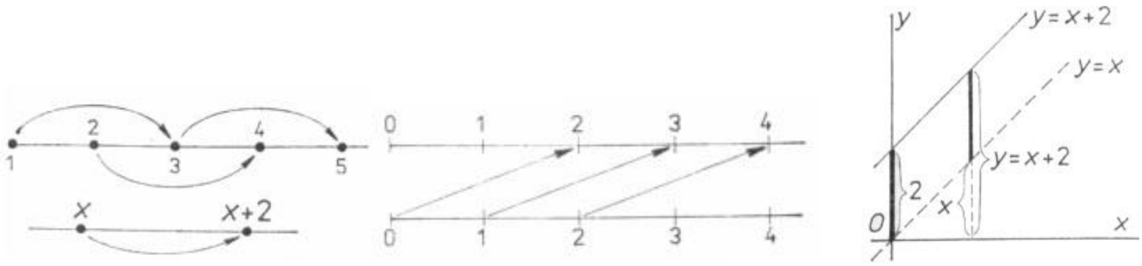
„*Niektorí matematici, asi 10 zo 100, myslia vo vzorcoch. Taká je ich intuícia. Ostatní myslia v obrazoch, ich intuícia je geometrická. Obrazy prenášajú omnoho viac informácií ako slová. Posledné roky sme odvykali žiakov používať obrázky, pretože „ nie sú presné.“ To je ale smutné nedorozumenie. Naozaj, obrázky nemusia byť presné, ale pomáhajú myslieť* a takouto pomocou *nemožno opovrhovať*.“

I. Stewart

Z technickej praxe je nám dobre známe sprostredkovanie informácií pomocou schém, grafov, technických výkresov. Už je nám ale menej známa úloha, ktorú by mohli mať geometrické znázornenia v matematike pri zavádzaní nových pojmov a pri riešení úloh. Myslíme si, že obrázok by nemal byť iba grafickým záznamom toho, čo vyjadrujeme slovami, ale mal by výrazne pomáhať pri samotnom zavádzaní nových pojmov, pri popise postupov a pri riešení úloh.
Multimediálne spracovaný didaktický softvér využíva živšie a príťažlivejšie formy spracovania učebnej látky pomocou animácie, textu, obrázkov, autentických fotografií, videosekvencií a iných. Každá z týchto častí môže byt sprevádzaná zvukom, buď hudbou alebo originálnym hovoreným slovom.
Multimediálne a interaktívne učebné pomôcky zároveň vyžadujú od žiaka a študenta, aby sa sami aktívne zapájali do vzdelávacieho procesu. Takéto podmienky žiakovi a študentovi umožnia ľahšie pochopiť, osvojovať si a zapamätávať nové poznatky a motivovať ich k hlbšiemu záujmu o učenie sa. Z toho vyplýva, že nielen použitý prostriedok, ale hlavne spôsob spracovania, prezentácia a štruktúra samotného obsahu učebnej látky vplývajú na proces osvojovania si učiva. Nemenej dôležitým momentom je aj správny spôsob používania a zaradenia multimediálnych aplikácií do vyučovacieho procesu.

Číselná os ako pomôcka na kartézsky popis priestoru

Prenos informácií môžeme z hľadiska psychológie učenia sa chápať ako proces, v ktorom prichádzajúca informácia v podobe správy obohacuje príjemcu o nové poznatky. Vo vyučovacom procese je riadiacim článkom a zdrojom komunikácie učiteľ, ktorý predkladá žiakom a študentom informácie o obsahu učiva buď priamo alebo sprostredkovane cez technické vyučovacie prostriedky.
Pred koncom európskej renesancie bola matematika rozdelená na dva samostatné predmety a to geometriu a algebru. V geometrii sa nepoužívali žiadne algebraické rovnice a v algebre žiadne obrázky. Ale okolo roku 1637 francúzsky chlapík menom René Descartes prišiel s nápadom ako dať tieto dva predmety dohromady. René Descartes (31.3.1596- 11.2.1650), ktorý je tiež známy ako Renatus Cartesius (meno v latinčine) bol veľmi vplyvný francúzsky filozof, matematik, vedec a spisovateľ. Na jeho diela mala veľký vplyv východná filozofia. Jeho najznámejším výrokom je „Cogito ergo sum“ („Myslím, teda som“). Ako vynálezca karteziánskeho súradnicového systému vytvoril základ modernej analytickej geometrie, čím ovplyvnil celý vývoj infinitezimálneho počtu.
Vzťahy medzi číslami môžeme znázorňovať na jednej alebo dvoch číselných osiach. Býva výhodné tieto osi voliť buď rovnobežné alebo na seba kolmé ako v karteziánskej sústave súradníc.
1.Napríklad zobrazenie, ktoré ľubovoľnému reálnemu číslu x priraďuje číslo o 2 väčšie, môžeme znázorniť (Obr.1) pomocou jednej číselnej osi, dvoch rovnobežných alebo dvoch na seba kolmých osí.



Obr.1

Je jasné, že v poslednom prípade ide o klasický graf funkcie $y = x + 2$.
Zobrazenie $x \to x + 2$, by sme mohli nazvať **posunutie na priamke**.

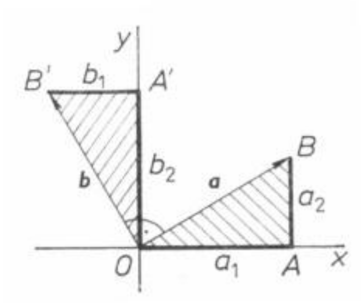
2. Zobrazenie, ktoré ľubovoľnému reálnemu číslu x priraďuje číslo y tak, že platí $x + y = 8$, môžeme zasa znázorniť troma spôsobmi : na jednej osi, na dvoch rovnobežných alebo dvoch na seba kolmých číselných osiach.
Zobrazenie $x \to -x + 8$ je zrejme **súmernosť podľa stredu na priamke.**
Pretože základnou charakteristikou bodu je jeho poloha, môžeme pre štúdium mnohých súvislostí stotožniť body s usporiadanými n-ticami reálnych čísel

$B[x]$ – bod na priamke,

$B[x,y]$ – bod v rovine,

$B[x,y,z]$ – bod v priestore.

Analogicky môžeme popísať pomocou usporiadaných *n*-tíc i vektory
u = (x) = $B - O$ = ***OB*** - vektor na priamke
u = (x,y) = $B - O$ = ***OB*** - vektor v rovine
u = (x,y,z) = $B - O$ = ***OB*** - vektor v priestore
Ak otočíme trojuholník *OAB* okolo začiatku o pravý uhol do polohy *OA´B´*, potom vektor **b** = (b_1, b_2) je kolmý na vektor **a** = (a_1, a_2) a podľa Obr.2



Obr.2

platí ***b*** = (b_1, b_2) = $(-a_2,\ a_1)$. Tento výsledok môžeme popísať tak, že súčet súčinov prvých a druhých zložiek vektora **a** a vektora **b** k nemu kolmého je rovný nula t.j.

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0.$$

To je ale aritmetický popis kolmosti dvoch vektorov (ich skalárny súčin je rovný nule).
Geometrické znázornenia umožňujú názorne vysvetliť i niektoré poznatky o mohutnostiach nekonečných množín.
Množiny M,K majú rovnakú mohutnosť, ak existuje prosté zobrazenie jednej z nich na druhú.
Množina P všetkých kladných párnych čísel má rovnakú mohutnosť ako množina N všetkých prirodzených čísel, pretože párne čísla môžeme „zoradiť" do postupnosti, kde každému *x* priradíme *2x* ($x \to 2x$). Každú množinu, ktorá má rovnakú mohutnosť ako množina všetkých prirodzených čísel, nazývame **spočítateľnou množinou**.
Množina Z$\times$ Z všetkých usporiadaných dvojíc celých čísel je spočítateľná množina, pretože túto množinu môžeme „usporiadať " do postupnosti, napr. tak, že postupujeme od dvojice $[0,0]$ po špirále tak, že dvojici vždy priradíme novú dvojicu $[p,q]$. Vzhľadom k tomu, že každý zlomok môžeme písať v tvare usporiadanej dvojice celých čísel (z ktorých druhé je nenulové), sú niektoré zo znázornených dvojíc reprezentanti zlomkov. Množina všetkých zlomkov je teda časťou množiny Z$\times$ Z. Postup po špirále, pri ktorom budeme vynechávať dvojice $[p,0]$, vedie k očíslovaniu množiny všetkých zlomkov, ktorá je teda tiež spočítateľná.
Ak pri pohybe po špirále budeme číslovať iba dvojice predstavujúce zlomky v základnom tvare, dospejeme k postupnosti racionálnych čísel. Teda i množina Q všetkých racionálnych čísel je spočítateľná. V ďalšom ukážeme, že napr. množina I- množina všetkých reálnych čísel intervalu $(0,1)$ už spočítateľná nie je. Ukážeme to spôsobom, ktorý pochádza od zakladateľa

teórie množín nemeckého matematika G. Cantora (1845-1918). Ide o tzv. **Cantorovu diagonálnu metódu.**
Každé reálne číslo $x \in (0,1)$ môžeme, ako je nám známe, vyjadriť pomocou jeho desatinného rozvoja a znázorniť ako bod na úsečke, ktorej krajné body sú 0 a 1. Aby sme vylúčili dvojznačnosť desatinného rozvoja reálnych čísel, budeme ich zapisovať v tzv. základnom tvare, t.j. nebudeme pripúšťať rozvoje s periódou 9. Napríklad namiesto zápisu 0,437999... budeme písať 0,438.
Keby bola množina I spočítateľná, bolo by možné všetky jej prvky zoradiť do určitej postupnosti $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$. Ľahko môžeme nájsť číslo, ktoré ale v postupnosti $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ nemôže byť. Je to číslo *b*, ktoré sa líši od člena a_1 postupnosti $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ na prvom mieste , od člena a_2 postupnosti $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ na druhom mieste, ..., od člena a_n postupnosti $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ na *n*- tom mieste.
Reálnych čísel intervalu $(0,1)$, a teda ani všetkých bodov úsečky, nemôže byť spočítateľne veľa.

Záver

Názornosť hrá významnú úlohu nielen pri vyučovaní matematiky, ale i v samotnej matematike. Uvediem aspoň jeden príklad.
Komplexné čísla sa objavili v matematike pri riešení rovníc tretieho stupňa v 16. storočí (napr. u G. Cardana, 1545). Avšak až ich geometrické znázornenie v rovine, zavedené v rozpätí 7 rokov nezávisle dánskym zememeračom G. Wesselem, švajčiarskym matematikom J. R. Arganom a nemeckým matematikom C. F. Gaussom na prelome 18. a 19. storočia, znamenalo všeobecné uznanie existencie komplexných čísel a rozptýlenie pochybnosti o nich. Toto znázornenie podmieňuje nielen ďalšie teoretické bádanie, ale umožňuje i ich aplikáciu v matematike a fyzike.
Euklides striktne oddeľuje časť „pravdy“ od „sprístupňovania pravdy“. Tam, kde hovorí večné pravdy o nemennom svete ideí, tam obrázok nesmie byť. Ten sa objavuje až vtedy, keď sa má večná pravda predložiť zraku čitateľa. Obrázok teda neintervenuje do sveta ideí, ale zostáva iba pomocníkom, ktorý umožňuje človeku lepšie uchovanie predstavy toho, o čom uvažuje.
Zvyšujúci sa podiel využívania informačných a komunikačných technológií v súčasnej škole je dôvodom, aby sme skúmali ich vplyv na osvojenie nových poznatkov. Využívanie informačných technológií prináša svoje klady, ale aj zápory do vyučovacieho procesu. Nie je vhodné zveličovať úlohu multimédií vo vyučovacom procese. Môžeme povedať, že multimédiá pomáhajú učiteľovi pri jeho práci, ale učiteľa nemôžu nahradiť. Domnievame sa, že multimediálne učebné pomôcky nachádzajú svoje uplatnenie v súčasnej škole. Praktickým skúmaním, tvorivým využívaním a následne aj uplatňovaním vyučovacích metód, organizačných foriem a didaktických prostriedkov môže učiteľ efektívnejšie dosiahnuť vytýčené vzdelávacie ciele. To znamená, že pozná potreby a hlavne nedostatky svojich žiakov a študentov, vie čo je potrebné precvičovať a zdokonaľovať.

Literatúra

SMART, JAMES R.: *Modern Geometries (5th Ed)*, Pacific Grove: Brooks/Cole, 1998, ISBN 0-534-35188-3. „Cartesian Coordinates“, Last updated: Tue Aug 7 2012, http://mathworld.wolfram.com/CartesianCoordinates.html
HOLEŠOVÁ, M.: *Why do students have problems with analytic geometry ?*, DidZA , Proceedings of Conference, Žilina, 2004, ISBN 80-8070-271-3.

KONTROVÁ, L.: *Mathematics is the exact arts*. In: Cieľom vyučovania matematiky je šťastný človek. [The aim of mathematics is a happy man]. Univerzity of Žilina, 2011, ISBN 978-80-554-0393-9,57-62.

Zuzana Malacká, RNDr.,PhD.
Katedra matematiky, FHV ŽU v Žiline,
Univerzitná 1
010 26 Žilina
zuzana.malacka@fhv.uniza.sk

Tento článok vznikol s podporou projektu 046 ŽU - 4/2011.