MAŤKO A KUBKO ALEBO KTORÝ ÚTVAR MÁ PRI DANOM OBVODE NAJVÄČŠÍ OBSAH?

MAŤKO A KUBKO OR WHICH PLANE FIGURE WITH GIVEN PERIMETER HAS THE LARGEST AREA?

Monika Porkertová

Abstract: External testing of 9th grade pupils shows that for them geometry is the most problematic and unpopular part of mathematics. Secondary school students also do not show any increased preference for geometry. Due to insufficient knowledge obtained at primary school and due to higher difficulty of the taught subject, pupils� problems with geometry arise. The article describes activity that combines knowledge of plane geometry of primary and secondary schools and use of technologies that help students with imagining and generalizing the connection between area of basic plane figures and their given perimeter.

Key words: perimeter of basic plane figures, area of basic plane figures, maximum of a function.

Úvod

Väčšina žiakov, nezávisle od veku, má ku geometrii negatívny vzťah. Skúsenosti z praxe potvrdzujú aj výsledky merania Testovanie 9 – geometria je najproblematickejšou a najneobľúbenejšou z testovaných oblastí matematiky. Analýzy žiackych odpovedí z uskutočnených testovaní poukazujú na to, že naši žiaci nemajú osvojené základné učivo do takej hĺbky, aby ho vedeli pri riešení úloh efektívne použiť. Žiaci zlyhávajú nie len pri viackrokových výpočtoch, ale nedokážu bez chyby využiť ani základné vzorce (napr. vypočítať obsah trojuholníka). Problémom je i voľba či návrh vhodnej stratégie riešenia úlohy (NÚCEM, 2012). Po príchode na strednú školu sa tieto problémy väčšinou iba prehlbujú, keďže pribúdajú nové poznatky a geometria je oveľa abstraktnejšia než na základnej škole. Mnohí žiaci sa snažia úlohy riešiť na základe naučených algoritmov, pričom jednotlivým krokom vôbec nerozumejú. Aj z týchto dôvodov sa problematikou stratégií riešenia planimetrických úloh a ich zdôvodňovania zaoberáme v našej dizertačnej práci, ktorej súčasťou je aj aktivita o *Maťkovi a Kubkovi*. Ako cieľovú skupinu sme zvolili žiakov 1. ročníka gymnázií, nakoľko Planimetria je zaradená v učebných osnovách pre tento ročník a zároveň sme brali do úvahy aj rozdelenie elementárnej geometrie, ktoré urobili Houdement a Kuzniak (2003). Tí vo svojom výskume poukazujú na to, že pojem Geometria sa používa na všetkých stupňoch škôl, pričom je zrejmé, že nemôže mať vždy ten istý význam. Elementárnu geometriu preto rozdelili do troch paradigiem:

Geometria I. - prirodzená geometria – je charakteristická tým, že je silno prepojená s reálnym zmyslovým svetom, dedukcia nastáva prostredníctvom vnímania a manipulácie s objektami a pri zdôvodňovaní zohráva hlavnú rolu kreslenie.

Táto paradigma podľa nás vo veľkej miere zodpovedá geometrii základnej škole. Žiaci sa stretnú predovšetkým s útvarmi a telesami s konkrétnymi rozmermi, riešia úlohy z reálneho života (rebríky, strechy, tiene objektov, bazény, akváriá), konštrukcie sú pomerne jednoduché. V mnohých prípadoch sa využívajú osobné skúsenosti žiakov, modely rovinných útvarov či telies.

Geometria II. – prirodzená axiomatická geometria – existencia axiomatického systému je nevyhnutná, no napriek tomu môže byť neúplný a pomerne silno prepojený s reálnym svetom a osobnými skúsenosťami; významnou zložkou je deduktívne zdôvodňovanie.

V tomto prípade možno hovoriť o posledných ročníkoch základnej školy a geometrii stredných škôl. Základné poznatky sa rozširujú, zovšeobecňujú, posilňujú sa väzby medzi nimi. Hierarchia poznatkov žiakom umožňuje riešiť náročnejšie a abstraktnejšie úlohy, pričom významnou súčasťou by malo byť zdôvodňovanie postupov na základe osvojených axióm.

Geometria III. – formalistická axiomatická geometria – výrazný rozdiel oproti predchádzajúcim dvom – axiomatický systém je úplný, konzistentný, oddelený od reality, validácia je založená výhradne na logickom zdôvodňovaní.

Ide o najvyšší stupeň, ktorý môže (nie je to podmienka) zodpovedať vysokoškolskej úrovni.

Prelínanie prvých dvoch paradigiem je podľa nás najvýraznejšie vidieť v období prechodu zo základnej na strednú školu, kedy dochádza k zásadným zmenám v spôsobe aj obsahu vyučovania. Z tohto dôvodu je podľa nás veľmi dôležité pomôcť žiakom prostredníctvom vhodne zvolených úloh a aktivít plynule prejsť z jednej paradigmy do druhej, pretože nárazová zmena môže u väčšiny žiakov vyvolať len tvorbu formálnych poznatkov a viesť k prehlbovaniu ich nedostatkov.

Aktivitou o *Maťkovi a Kubkovi* sa snažíme prepojiť a rozšíriť poznatky o obsahoch a obvodoch základných rovinných útvarov zo základnej školy, pričom výsledkom celej aktivity je úplne nový poznatok. V rámci výskumu sme aktivitu testovali dvakrát, v oboch prípadoch sme pracovali so žiakmi 1.ročníka gymnázií. Po prvom testovaní sme dospeli k záveru, že úloha je pre žiakov príliš abstraktná a všeobecné riešenia sú pre nich veľmi náročné. Z toho dôvodu sme sa pri druhom testovaní rozhodli využiť programy Excel a Geogebra, čo sa ukázalo ako veľmi efektívne. Aktivita popísaná v článku vychádza práve z tohto testovania.

1 Príprava aktivity

Úloha o *Maťkovi a Kubkovi* je súčasťou súboru úloh, ktoré sme pripravili a použili v rámci didaktického výskumu k dizertačnej práci. Úloha je prebraná od G.Polya (1981) pričom zadanie sme upravili do nasledujúcej podoby:

Maťko a Kubko sa jedného dňa rozhodli, že svojim ovečkám postavia novú ohradu. Materiál, ktorý mali na salaši, však vystačil len na postavenie plotu dlhého 100 metrov. Maťko s Kubkom preto začali úpenlivo rozmýšľať: Aký tvar musí mať ohrada, aby mali ovečky k dispozícii čo *najviac priestoru a aby sme využili všetok náš materiál? Ktoré riešenie by bolo pre nich najideálnejšie? Svoju odpoveď zdôvodnite! (uvažujte kruh, trojuholníky, štvoruholníky)*

Zadanie v tomto znení najprv žiaci dostali riešiť za domácu úlohu. Na základe ich riešení sme vytvorili jeho rozšírenú verziu. Rozšírené zadanie okrem tabuliek s rozmermi a obsahmi útvarov, ktoré žiaci navrhli obsahovalo aj doplňujúce otázky a úlohy. Žiaci mali:

- overiť, či obsahy zodpovedajú útvarom s danými rozmermi.
- zistiť, či okrem uvedených útvarov neexistujú ďalšie – s inými rozmermi a či ich obsah nebude väčší.
- rozšíriť riešenie o ďalšie útvary – kosoštvorec, kosodĺžnik.

Zároveň bolo nutné pripraviť aj elektronické materiály, ktoré mali byť použité počas hodiny. Išlo o tabuľky, grafy a záverečné zhrnutie získaných informácií (bližšie popíšeme v nasledujúcej časti).

2 Priebeh aktivity

Aktivita prebiehala počas delenej hodiny, kedy žiaci opätovne riešili úlohu o *Maťkovi a Kubkovi*, pričom tento krát pracovali s rozšíreným zadaním v skupinách po 3 – 4 žiakoch.

Kruh

V riešení domácej úlohy všetci žiaci uviedli kruh ako útvar s najväčším možným obsahom pri danom obvode. Väčšina žiakov vedela bez problémov zdôvodniť, že existuje len jeden kruh s obvodom 100m a tým pádom jediným možným obsahom kruhu. Ostatní žiaci s trochou pomoci dospeli k rovnakému záveru.

Štvorec

Obsah štvorca s obvodom 100m v domácej úlohe správne uviedli tiež všetci žiaci. Po skúsenosti s kruhom zároveň oveľa rýchlejšie reagovali na našu otázku, či nemôžu existovať ďalšie štvorce s obvodom 100m, ale väčším obsahom.

Obdĺžnik

V celej triede sa vyskytli len dva prípady obdĺžnika s obvodom 100m a to s rozmermi 24m x 26m a 15m x 35m. Na hodine žiaci bez námahy našli aj obdĺžniky ďalších celočíselných rozmerov. Väčšina z nich takmer okamžite uviedla, že nie je možné určiť rozmery všetkých obdĺžnikov s obvodom 100m, pretože ich je „strašne veľa“. Navrhnúť spôsob, akým by z tohto množstva obdĺžnikov určili ten, ktorý má najväčší obsah bolo pre nich nepredstaviteľné. Situáciu, kedy by sme uvažovali aj obdĺžniky s neceločíselnými rozmermi, považovali za absolútne neriešiteľnú.

Trojuholník

Rovnako ako v prípade kruhu a štvorca, aj výpočet obsahu rovnostranného trojuholníka zvládli všetci žiaci. Existenciu viacerých rovnostranných trojuholníkov s obvodom 100m vylúčili. Tabuľka pre trojuholník z rozšíreného zadania obsahovala aj rozmery dvoch rovnoramenných trojuholníkov – 40m, 40m, 20m a 30m, 30m, 40m. Po skúsenosti s obdĺžnikom žiaci opäť odpovedali, že vypísanie rozmerov všetkých rovnoramenných trojuholníkov s obvodom 100m a určenie ich obsahov by bolo príliš zdĺhavé a teda o maximálnom obsahu nevedia rozhodnúť.

Ani jeden žiak v domácej úlohe neuviedol rozmery rôznostranného trojuholníka. Niektorým žiakom pripadala táto možnosť taká náročná, že sa nad ňou ďalej ani nezamýšľali. Jedna skupina žiakov sa podujala túto situáciu predsa len riešiť. S cieľom získať maximálny možný obsah navrhovali zvoliť veľkosti strán tak, aby jedna z nich bola v porovnaní so zvyšnými dvoma výrazne dlhšia – pri týchto rozmeroch však nebola splnená trojuholníková nerovnosť. Potom sa snažili ovplyvniť obsah trojuholníka prostredníctvom čo najväčšej výšky – v tomto prípade však nevedeli dopočítať veľkosti zvyšných strán a dodržať požadovaný obvod trojuholníka. V tejto súvislosti navrhol jeden žiak zamerať sa na pravouhlý trojuholník, kedy sa jedna z výšok trojuholníka zhoduje s jeho stranou. Komplikácie nastali keď si uvedomili, že súčet dĺžok strán musí byť 100m a zároveň pre ne musí platiť aj Pytagorova veta. Problém rôznostranného trojuholníka tak nakoniec ostal otvorený.

Kosoštvorec a kosodĺžnik

Skupinu uvažovaných štvoruholníkov s obvodom 100m sme sa rozhodli rozšíriť o kosoštvorec a kosodĺžnik. Po krátkej diskusii všetci žiaci dospeli k záveru, že hoci rozmery štvorca - kosoštvorca i rozmery obdĺžnikov - kosodĺžnikov sa zhodujú, no kosoštvorcov i kosodĺžnikov je „oveľa viac“. Väčšina žiakov mala problém s určením obsahov. Snažili sme sa ich naviesť na porovnanie obsahu štvorca a možných kosoštvorcov, pričom by nemuseli robiť žiadne výpočty. Navrhli sme im, aby pomocou 4 pier (predstavovali zhodnú dĺžku strán kosoštvorca) simulovali kosoštvorce s rôznymi vnútornými uhlami, sledovali ako sa mení ich obsah a snažili sa prísť na to, za akých podmienok bude obsah najväčší. Veľmi rýchlo zistili, že obsah kosoštvorca závisí od veľkosti uhla, ktorý strany zvierajú a že v porovnaní so štvorcom bude tento obsah vždy menší. Na základe tohto zistenia boli schopní sformulovať analogické tvrdenie pre kosodĺžniky.

Po slede týchto úvah začali niektorí žiaci pochybovať o tom, či je obsah kruhu za daných podmienok naozaj najväčší. Našim cieľom bolo ukázať, že z uvažovaného množstva útvarov obvodom 100m, má kruh naozaj najväčší obsah.

3 Ako sme využili IKT?

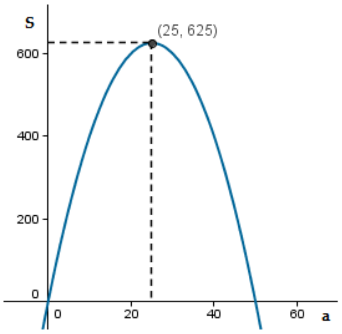
Keď žiaci riešili úlohu o *Maťkovi a Kubkovi* doma, v rámci riešení celej triedy bolo uvedených len 7 útvarov (kruh, štvorec, 2 obdĺžniky, rovnostranný trojuholník, 2 rovnoramenné trojuholníky), ktorých obvod je 100m. Najväčší obsah z nich mal kruh. Keď riešili úlohu o *Maťkovi a Kubkovi* v škole, tak na základe doplňujúcich otázok a pomoci spolužiakov i učiteľky dospeli k záveru, že týchto útvarov je nekonečne veľa. O tom, ktorý z nich má najväčší obsah, nevedeli rozhodnúť.

Žiaci sa zhodli, že existuje len jeden kruh, štvorec i rovnostranný trojuholník s obvodom 100m, pretože rozmery týchto útvarov získame riešením rovníc s jednou neznámou. Na tejto úrovni by mali vedieť úlohu riešiť aj žiaci základnej školy.

Prvý problém nastal pri riešení obdĺžnika. Žiaci dospeli k záveru, že obdĺžnikov s obvodom 100m existuje nekonečne veľa. Ako ale zistíme, ktorý z nich má najväčší obsah? Je to vôbec možné? Žiaci cítia, že pokiaľ nenájdu nejaký efektívny spôsob určenia obsahov jednotlivých obdĺžnikov, nemôžu sa k maximálnemu obsahu nijako vyjadriť. Skúsili sme teda porovnať obsahy všetkých obdĺžnikov (s obvodom 100m) s celočíselnými rozmermi – na výpočty sme použili tabuľku v Exceli.

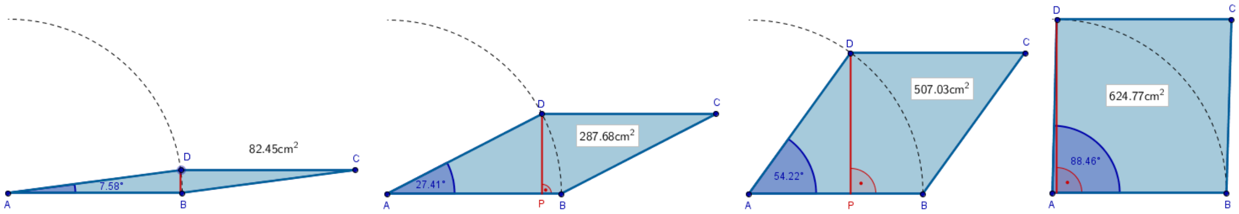
a	b = 50-a	S = a.b
1	49	49
2	48	96
3	47	141
...	...	...
23	27	621
24	26	624
25	25	625
26	24	624
27	23	621
...	...	...
47	3	141
48	2	96
49	1	49

Žiaci si okamžite všimli symetriu a maximálnu hodnotu obsahu, ktorá nastala v prípade štvorca. Čo ak ale existuje obdĺžnik, ktorého rozmery nie sú celé čísla a jeho obsah je väčší než obsah štvorca? Obsah obdĺžnika sme vyjadrili ako funkciu jednej jeho strany $S = 50a - a^2$ a pomocou programu Geogebra sme zostrojili graf tejto funkcie.



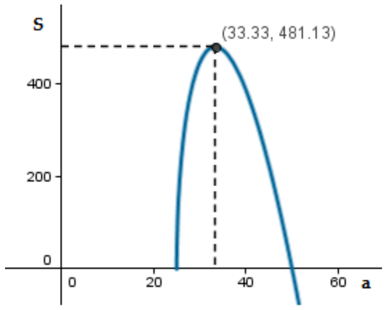
Napriek tomu, že žiaci tento typ funkcie ani jej vlastnosti ešte nepoznajú, sú schopní z grafu funkcie určiť obsah obdĺžnika ľubovoľných rozmerov. Zároveň vedia nájsť maximum tejto funkcie = maximálny obsah obdĺžnika s obvodom 100m a určiť jeho rozmery. Týmto spôsobom sme ukázali, že najväčší obsah zo všetkých obdĺžnikov má štvorec, ktorý je špeciálnym prípadom obdĺžnika.

Zo vzťahu pre výpočet obsahu kosoštvorca žiaci vedia, že jeho obsah závisí od dĺžky jeho strany a jeho výšky. Keďže dĺžka strany je jednoznačne daná jeho obvodom 100m, obsah môžeme ovplyvniť jedine prostredníctvom zmeny výšky kosoštvorca. Pomocou modelu z pier žiaci pozorovali ako sa mení obsah kosoštvorca ak menia veľkosť vnútorného uhla, ktorý zvierajú strany kosoštvorca. Model z pier môžeme nahradiť jednoduchým model pripraveným v programe Geogebra, kde zmenou polohy vrcholu D môžeme meniť veľkosť vnútorného uhla kosoštvorca, pričom môžeme priamo pozorovať aj zmenu výšky kosoštvorca. Výhodou tohto modelu sú číselné údaje udávajúce veľkosť vnútorného uhla aj hodnotu obsahu kosoštvorca pri ľubovoľnej polohe vrcholu D.



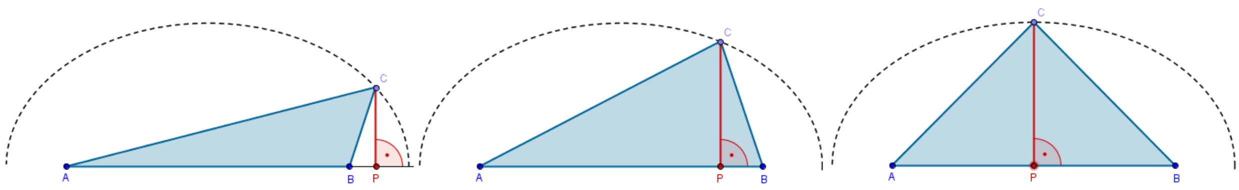
Z pravouhlého trojuholníka ΔAPD vyplýva, že dĺžka odvesny PD bude vždy menšia ako dĺžka prepony AD, preto obsah kosoštvorca bude za daných podmienok (obvod 100m) vždy menší ako obsah štvorca. Ďalší spôsob, ktorým môžeme dospieť k rovnakému záveru je vyjadrenie výšky $v = a\sin\alpha$ a následne obsahu kosoštvorca ako funkcie jeho strany $S = a^2 \sin\alpha$, kde $\alpha \in (0,90°)$. Žiaci vedia, že v prípade pravouhlého trojuholníka platí $0 < \sin\alpha < 1$, takže obsah kosoštvorca bude vždy menší 625m^2, čo je obsah ohrady v tvare štvorca. Analogicky sme dokázali, že obsah kosodĺžnika s obvodom 100m bude vždy menší ako obsah obdĺžnika s rovnakým obvodom.

Pri určovaní obsahov rovnoramenných trojuholníkov boli žiaci bezradní. V tomto prípade museli brať do úvahy dĺžku ramien i základne trojuholníka, ktorých súčet mal byť 100m, tieto rozmery museli spĺňať trojuholníkovú nerovnosť, museli vypočítať výšku trojuholníka a až potom jeho obsah. Kombinácia všetkých týchto podmienok a úkonov väčšinu žiakov od riešenia tejto časti úlohy úplne odradila. Napriek tomu sú schopní pomocou dĺžky ramena *a* vyjadriť dĺžku základne $z = 100 - 2a$ aj dĺžku výšky $v = 10\sqrt{a-25}$. Následne môžeme obsah rovnoramenného trojuholníka vyjadriť ako funkciu jeho ramena $S = (500 - 10a)\sqrt{a-25}$ a zostrojiť graf tejto funkcie. Hľadaním maxima zistíme, že najväčší obsah bude mať trojuholník práve vtedy, ak rameno bude mať dĺžku 33,3m. To znamená, že všetky rovnoramenné trojuholníky budú mať menší obsah než rovnostranný trojuholník.



Zo všetkých uvažovaných útvarov bolo určenie maximálneho obsahu pri obvode 100m najzložitejšie v prípade rôznostranného trojuholníka. Ani riešenia predchádzajúcich útvarov žiakom nepomohli k návrhu riešenia tejto situácie. Zamysleli sme sa nad tým, čo sa bude s trojuholníkom diať, ak si pevne zvolíme dĺžku strany AB a v závislosti od nej budeme meniť dĺžky zvyšných dvoch strán trojuholníka. Keďže obvod trojuholníka sa nemení, súčet týchto strán bude konštantný $|AC| + |CB| = 100m - |AB|$. Z tohto dôvodu musí vrchol C ležať na elipse s ohniskami A a B. Pre lepšiu predstavu sme opäť použili model pripravený v programe Geogebra.

Pri ľubovoľnej dĺžke strany AB (strany musia spĺňať trojuholníkovú nerovnosť) bude mať trojuholník maximálny obsah práve vtedy, ak $|AC| = |CB|$. Pre každý rôznostranný trojuholník teda platí, že pri zvolenej dĺžke strany AB bude jeho obsah menší, než obsah rovnoramenného trojuholníka so základňou dĺžky AB. Zo všetkých trojuholníkov s obvodom 100m bude mať teda najväčší obsah práve rovnostranný trojuholník.



Po vyšetrení situácie pre všetky uvažované útvary sme pre väčšiu prehľadnosť zostavili tabuľku. Okrem porovnania vypočítaných hodnôt obsahov daných útvarov môžeme vďaka tabuľke porovnať aj vzťahy na výpočty týchto obsahov. Z prehľadu priamo vidíme, že v prípade prvých troch útvarov (kruh, štvorec, rovnostranný trojuholník) obsahy závisia len od ich obvodu, ktorý je zadaný. V ostatných prípadoch sú obsahy funkciami závislými od veľkosti strán alebo vnútorných uhlov daných útvarov. Až na základe týchto informácií môžeme prehlásiť, že ak by sme uvažovali kruh; štvorec; obdĺžnik; kosoštvorec; kosodĺžnik; rovnostranný, rovnoramenný a rôznostranný trojuholník, tak pri obvode 100m by mal najväčší obsah kruh.

	Rozmer	Výška	Obsah	
KRUH	$r = \frac{O}{2\pi}$	-------	$S = O^2 \frac{1}{2\pi}$	$S = 795{,}77\text{m}^2$
ŠTVOREC	$a = \frac{O}{4}$	a	$S = O^2 \frac{1}{16}$	$S = 625\text{m}^2$
ROVNOSTRANNÝ TROJUHOLNÍK	$a = \frac{O}{3}$	$v = \frac{a\sqrt{3}}{2}$	$S = O^2 \frac{\sqrt{3}}{36}$	$S = 481{,}13\text{m}^2$
OBDĹŽNIK	$b = \frac{O-2a}{2}$	a	$S = 50a - a^2$	$S = 625\text{m}^2$
KOSOŠTVORCE	$a = \frac{O}{4}$	$v = a\sin\alpha$	$S = O^2 \frac{1}{16}\sin\alpha$	$S < 625\text{m}^2$
KOSODĹŽNIKY	$b = \frac{O-2a}{2}$	$v_b = a\sin\alpha$	$S = (50a - a^2)\sin\alpha$	$S < 625\text{m}^2$
ROVNORAMENNÉ TROJUHOLNÍKY	$z = O - 2a$	$v_z = 10\sqrt{a-25}$	$S = (500-10a)\sqrt{a-25}$	$S < 481{,}13\text{m}^2$
RÔZNOSTRANNÉ TROJUHOLNÍKY	$a = O - b - c$	$v_a = \frac{\sqrt{\frac{c^2}{4} - \left[(100-b-c)^2 + c^2 - b^2\right]^2}}{2}$	$S = \frac{(100-b-c)\sqrt{\frac{c^2}{4} - \left[(100-b-c)^2 + c^2 - b^2\right]^2}}{4}$	$S < 481{,}13\text{m}^2$

4 Iné možnosti zaradenia aktivity do vyučovania matematiky

Aktivita o *Maťkovi a Kubkovi* je súčasťou súboru úloh, ktoré boli navrhnuté pre žiakov 1. ročníka gymnázií. V rámci nášho výskumu bola zaradená na koniec tématického celku *Planimetria,* s cieľom využiť poznatky o viacerých rovinných útvaroch a porovnať ich vlastnosti v rámci jednej úlohy. Ďalšou možnosťou je rozdelenie aktivity na menšie časti zodpovedajúce jednotlivým útvarom a riešenie týchto čiastkových zadaní počas celého tématického celku. Nakoniec možno riešenia pre jednotlivé útvary porovnať a vyvodiť závery. Tento spôsob zaradenia aktivity môže byť vhodný nielen z časového hľadiska (nejedná sa o aktivitu na celú hodinu) ale i vzhľadom na schopnosť udržať pozornosť a sústredenosť žiakov. Časový odstup medzi riešeniami jednotlivých častí úlohy môže viesť k tomu, že pri nasledujúcom útvare už budú žiaci schopní samostatne navrhnúť analogický postup riešenia alebo aspoň niektoré jeho kroky. Jednotlivé časti tejto úlohy však možno bez problémov zaradiť aj do vyučovania vyšších ročníkov stredných škôl – napr. kvadratická funkcia, extrémy funkcií, parabola, elipsa. Zadanie úlohy možno rozšíriť aj o ďalšie útvary.

Záver

Prechod zo základnej na strednú školu je pre väčšinu žiakov náročný. Žiaci si za rovnaký čas musia osvojiť oveľa viac poznatkov, učivo je náročnejšie, úlohy abstraktnejšie. Predpokladá sa, že žiaci sa postupne vyššiemu tempu a nárokom prispôsobia. Treba si však uvedomiť, že pre niektorých môžu byť tieto zmeny príliš veľké a komplikované. Planimetria základnej školy spočíva predovšetkým v konštrukciách základných rovinných útvaroch a výpočtoch ich obvodov a obsahov. Takmer vždy ide o riešenie problémov s konkrétne zadanými hodnotami. Na strednej škole by už žiaci mali riešiť komplikovanejšie úlohy, pričom výpočty aj konštrukcie sú už v mnohých prípadoch všeobecné. Myslenie žiakov sa nezmení spolu so zmenou školy a preto by sme im mali v tomto procese, ktorý je dlhodobý a veľmi individuálny, čo najviac pomôcť. Jedným zo spôsobov je zaraďovanie úloh, ktoré nie len rozširujú poznatky zo základnej školy, ale istým spôsobom prepájajú konkrétne i všeobecné riešenia danej úlohy. Príkladom takéhoto premostenia a rozšírenia učiva základnej školy do učiva strednej školy je popísaná aktivita o *Maťkovi a Kubkovi*. Keď žiaci riešili úlohu doma, s výnimkou 4 konkrétnych prípadov, uviedli len riešenia pravidelných útvarov. Ďalšie útvary nebrali vôbec do úvahy, v lepšom prípade nad nimi uvažovali, ale samotný výpočet zamietli kvôli náročnosti. Počas opätovného riešenia úlohy formou skupinovej aktivity na delenej hodine boli všetci žiaci schopní vymyslieť rozmery ďalších útvarov, pre mnohých z nich však bolo náročné si uvedomiť, ktoré podmienky musia byť pri danom útvare splnené a tiež určiť, koľko takýchto útvarov môže existovať. Pre žiakov nebol problém predstaviť si štvorec so stranou 25m ani kosoštvorec s rovnako dlhou stranou. Uvažovať však celú množinu kosoštvorcov so stranou 25m a zároveň porovnať obsahy všetkých týchto kosoštvorcov bolo takmer nemožné. Pomocou tabuliek, ktoré sme vytvorili v Exceli možno žiakov viesť k tomu, že ak chceme prejsť od konkrétnych prípadov k zovšeobecneniu, treba postupovať systematicky (zoradiť rozmery podľa veľkosti; vylúčiť kombinácie rozmerov, ktorým nezodpovedajú reálne útvary). Vďaka modelom vytvoreným v Geogebre zase žiaci môžu priamo sledovať závislosť obsahu jednotlivých útvarov od ich rozmerov. V oboch prípadoch je však veľmi dôležité, že žiaci vizuálne vnímajú konkrétne prípady danej situácie a na základe týchto zmien vedia situáciu zovšeobecniť, prípadne vedia navrhnúť analogické riešenie pre prípad iného útvaru. Za veľmi dôležité a nápomocné považujeme aj grafické znázornenie uvedených funkčných závislostí. Žiaci prostredníctvom úpravy výrazov môžu získať vyjadrenie závislosti obsahu daného útvaru od dĺžky jeho strany alebo veľkosti vnútorného uhla, no reálna predstava o tom, čo tento vzťah v skutočnosti vyjadruje, im môže úplne unikať. „Zhluk písmen“ sa dá zrazu vnímať ako krivka, pričom po krátkom čase sú žiaci schopní naučiť sa z grafu získať informácie, ktoré vedia interpretovať. Hoci je základná informácia všeobecná, vieme ju premeniť na niečo konkrétne a pre žiakov predstaviteľné. Na jednej strane môžeme žiakov motivovať tým, že kroky, ktoré za nich urobil program (zostrojenie grafu funkcie a nájdenie jej maxima) budú schopní vo vyšších ročníkoch urobiť aj sami. Na druhej strane možno žiakom vyšších ročníkov ukázať využitie poznatkov v konkrétnej situácii.

Je zrejmé, že uvedená aktivita o *Maťkovi a Kubkovi* a jej podobné sú časovo náročnejšie, vyžadujú isté technické vybavenie i väčšiu prípravu učiteľa. Môžu však pomôcť žiakom vytvoriť alebo posilniť väzby medzi jednotlivými poznatkami, viesť ich k zovšeobecňovaniu a v neposlednom rade nepriamo pripravovať priestor a väzby na poznatky nové. Ak tento proces môžeme prostredníctvom technológií žiakom uľahčiť alebo urýchliť, bolo by chybou ich (aspoň príležitostne) nevyužiť.

Literatúra

HOUDEMENT, Catherine – KUZNIAK, Alain. 2003. Elementary geometry split into different geometrical paradigms. [online] Proceedings from CERME 3, Italy 2003. Dostupné na internete: http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/CERME3/Groups/TG7/TG7_Houdement_cerme3.pdf

NÚCEM. 2012. TESTOVANIE 9-2012:Priebeh, Výsledky, Analýzy. [online] Dostupné na internete: http://www.nucem.sk/documents//26/testovanie_9_2012/Spr%C3%A1va_T9-2012_final.pdf

POLYA, George. 1981. MATHEMATICAL DISCOVERY: On understanding, learning and teaching problem solving. John Wiley & Sons, Inc. Canada. S. 144-145. ISBN 978-0471089759

Mgr. Monika Porkertová
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK
842 48 Bratislava
porkertova@fmph.uniba.sk