O KRIVKE NAJRÝCHLEJŠIEHO PÁDU

ON A CURVE OF FASTEST FALL

Darina Stachová, Milan Stacho

Abstract: Cycloid is a special planar curve defined, for instance, as a trace of a point on a rotating object travelling in a gravitational field. Quite often we encounter it in nature in various interesting situations; we also find its use in sports, but, most notably, in engineering practice, where it allows solving variety of technical problems.
In this contribution, we discuss interesting history of this curve, history of its exact mathematical characterisation as well as explain physical phenomena accompanied by the presence of cycloid by way of interesting real-life examples.

Key words: planar curve, cycloid, ortocycloid, brachystochrone problem.

Úvod

Staroveká čínska architektúra je ojedinelá. Na starovekých čínskych stavbách sú okrem charakteristickej ornamentálnej výzdoby (ako napr. hlavy draka) zaujímavé typické strechy, ktoré poznáme pod názvom pagodové (Obr. 1). Ich tvar vyplýva pravdepodobne z tradície a náboženstva, ale dá sa predpokladať, že väčšiu úlohu zohrali dostupné stavebné technológie, resp. nevyhnutnosť vhodnej ochrany obydlí pred vetrom a dažďom. Avšak (ako sa dozvieme v nasledujúcom texte) tvar pagodových striech je prirodzený, opísateľný istou špecifickou matematickou krivkou, ktorú bežne nachádzame či už pri rôznych prírodných úkazoch, alebo taktiež v umení a v technickej praxi.

1 Krivky

V prírode, umení aj v technike nachádzame rôzne typy kriviek. Čo vlastne rozumieme pod pojmom krivka? Počiatky pojmu krivka siahajú až do starovekého Grécka. V priebehu dejín sa názor na krivku menil a jej definícia sa spresňovala. Ak by sme chceli krivku intuitívne jednoducho vysvetliť, povedali by sme čiara. Napríklad Euklides vyjadril svoju intuitívnu predstavu o krivke takto: „*Čiara je dĺžka bez šírky*.“ Toto však nemožno považovať za rigoróznu matematickú definíciu. Euklidova predstava však vedie k intuitívnemu výkladu krivky ako stopy pohybujúceho sa hmotného bodu.

Pojem krivka dnes používajú rôzne disciplíny, matematika, fyzika, ako aj rôzne oblasti výtvarného umenia, a iné. V každej z nich krivku charakterizujú osobitým spôsobom. Umelec by o krivke hovoril ako o krivej čiare, čiže čiare, ktorá nie je rovná, napríklad ako priamka. Cieľom umelca je krivku iba nakresliť. Z pohľadu fyziky charakterizujeme krivku ako dráhu spojito sa pohybujúceho hmotného bodu v určitom časovom intervale. Ak pojem krivky charakterizujeme z hľadiska matematiky ako zobrazenie, tak je krivka spojitým obrazom úsečky. Pri použití tejto definície krivky sa ale ukázalo, že takáto definícia je príliš široká. Taliansky matematik Peano už v roku 1890 ukázal, že existuje spojité zobrazenie úsečky na štvorec. Teda dráha hmotného bodu môže vyplniť celý štvorec, a preto toto zobrazenie nie je jedno-jednoznačné, t. j. pohybujúci sa bod prejde niektorými bodmi štvorca viackrát. Presnejšiu definíciu krivky podal rakúsky matematik Menger v roku 1921, a nezávisle na ňom ruský matematik Urysohn. Ich definíciu možno uviesť asi takto: „*krivka je kontinuum, ktorého ľubovolné dva body sa dajú oddeliť množinou neobsahujúcou už žiadne kontinuum*” . Známe sú však aj iné definície krivky. Naším cieľom však nie je rozbor samotného pojmu krivka. Pre nás je postačujúce vnímať krivku ako množinu bodov, ktoré spĺňajú predpísanú sústavu rovníc. Chceme sa skôr zamerať na konkrétnu krivku, popísať ju rovnicami a vyhľadať jej výskyt v prostredí okolo nás.

Kinematickou geometriou je nazývaná geometria skúmajúca pohyb na čisto geometrickom základe, teda nezávisle od času, v ktorom bol vykonaný. Keďže pri takomto pohybe nie je dôležitá rýchlosť, hovoríme jej často premiestnenie. Rovinná kinematická geometria skúma premiestňovanie nepremenného rovinného útvaru v jeho rovine. Aj v tomto prípade sú krivky, po ktorých sa pohybujú jednotlivé body pohybujúceho sa útvaru, nazvané trajektóriami ‑ dráhami tohto bodu. Z množstva štandardných kinematických rovinných kriviek sa najčastejšie stretávame so špirálami, cykloidálnymi krivkami a s konchoidami.

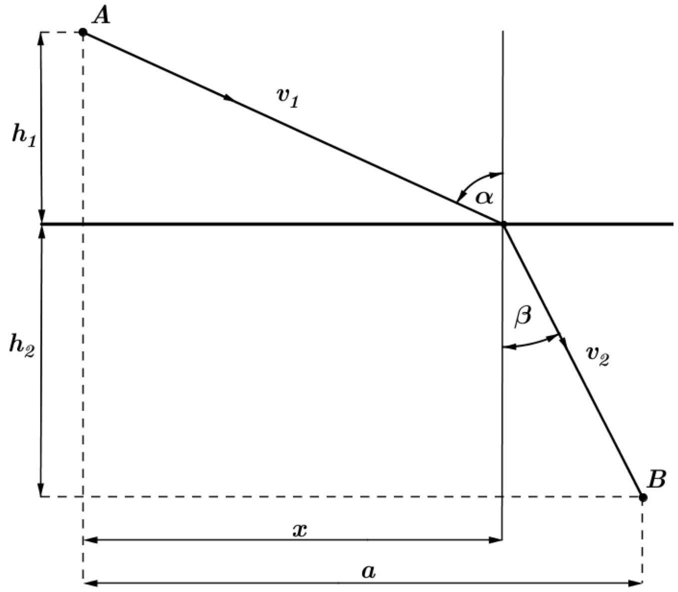
Obr. 1: Krivky okolo nás

2 Cykloida

Objav infinitezimálneho počtu v 17. storočí otvoril bádateľom nové obzory exaktných prírodných vied a umožnil matematické riešenie mnohých problémov, ktoré boli inými prostriedkami často neriešiteľné. Zvláštnou kapitolou boli tzv. *extremálne problémy*, t.j. *vyhľadávanie maxím* a *miním* rôznych funkcií. Bolo možné ich aplikovať v mnohých úlohách veľkej praktickej dôležitosti. Napríklad bolo možné vypočítať pomer polomeru a výšky konzervy tvaru valca, aby spotreba plechu pri výrobe bola pri danom objeme čo najmenšia ($\frac{r}{h} = \frac{1}{2}$); určiť, aké vysoké majú byť stožiare verejného osvetlenia, postavené na priamej ceste s rozostupom l, aby cesta bola maximálne osvetlená ($h = \frac{l}{2\sqrt{2}} \approx 0{,}3536\, l$); aké dlhé môže byť vozidlo, aby prešlo z ulice so šírkou a do kolmej ulice so šírkou b ($l = a\sqrt[3]{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}}}$); atď.

V tomto kontexte je známy aj nasledujúci problém z optiky. Lúč prechádza prostredím, v ktorom sa šíri rýchlosťou v_1, a dopadá do prostredia s rýchlosťou šírenia v_2. Akú dráhu z bodu A do bodu B (oba body sú dané) musíme zvoliť, aby čas potrebný na prebehnutie lúča bol najkratší? Toto vedie k nasledujúcemu vzťahu (viď. Obr. 2):

$$\frac{1}{v_1}\frac{x}{\sqrt{h_1^2+x^2}}=\frac{\sin\alpha}{v_1}=\frac{1}{v_2}\frac{a-x}{\sqrt{h_2^2+(a-x)^2}}=\frac{\sin\beta}{v_2}=konšt. \qquad (1)$$



Obr. 2: Lom svetla

Rovnica (1) opisuje lom lúča na rozhraní dvoch prostredí s rôznymi optickými hustotami. Je to známy *Snellov* zákon o lome svetla. Dá sa však taktiež získať ako matematický dôsledok *Fermatovho princípu* o prelete lúča v najkratšom čase, použitím elementárnych geometrických vlastností trojuholníkov a súvisiacich goniometrických funkcií.

Poznamenávame, že tento príklad patrí do kategórie tzv. *izoperimetrických úloh*, známych už zo staroveku [1], [7]. Podobne, ako vo vyššie uvedených príkladoch, týka sa vyhľadávania extrémov nejakej obyčajnej funkcie. Riešenie zložitejších úloh však vyžaduje všeobecnejší model. Tým je tzv. *variačný počet*, známy od konca 17. storočia. Pod pojmom variačný počet rozumieme matematickú disciplínu, ktorá sa zaoberá problematikou hľadania extrémnych hodnôt výrazov obsahujúcich integrál, tzv. *funkcionálov*.

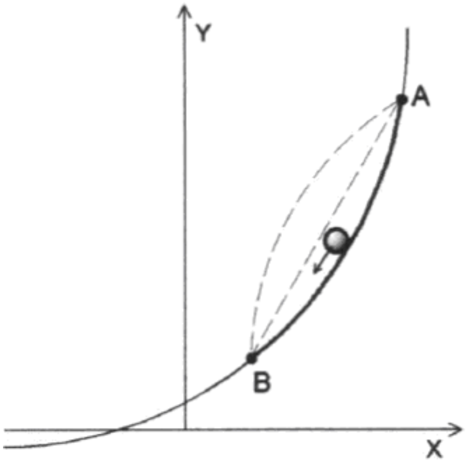
Najznámejšou úlohou variačného počtu je úloha o brachystochrone (Obr. 3), krivke najrýchlejšieho pádu (brachystos znamená po grécky najkratší a chronos znamená čas), ktorú predložil Johann Bernoulli (1677-1748) v roku 1696 v časopise „Acta Eruditorum" :

> *„Nájsť takú krivku v zvislej rovine (gravitačného poľa), spájajúcu body A a B, aby sa bod, valiaci sa po nej bez trenia, dostal z A do B za najkratší možný čas."*

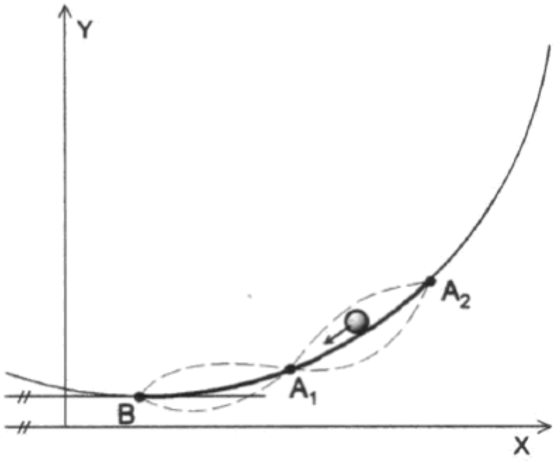
G. W. Leibniz (1646-1716) úlohu ohodnotil vlastným posudkom, v ktorom napísal, že ide *„o veľmi krásnu a neslýchanú úlohu*." Bernoulli o nej doslova píše:

„Zmyslom úlohy je, nájsť medzi nekonečne mnohými krivkami spájajúcimi oba body takú, pozdĺž ktorej – ak by bola nahradená príslušnou tenkou zakrivenou trubicou – by vložená a voľne vypustená gulička dospela do druhého bodu v najkratšom čase. Aby som však vylúčil akúkoľvek dvojznačnosť, pripomínam výslovne, že prijímam Galileiho hypotézu, o ktorej žiadny rozumný geometer nepochybuje, podľa ktorej – ak nedbáme odporu pohybu – sa rýchlosť padajúceho telesa mení s druhou odmocninou z prebehnutého výškového rozdielu." (J. Bernoulli)

Podobná úloha o izochrone – krivke konštantného času, ktorá má takú vlastnosť, že hmotný bod spúšťaný z jej ľubovolných bodov A_1, A_2, . . . dospeje do jej najnižšieho bodu B za rovnaký čas – vedie k tomu istému riešeniu (Obr. 4).

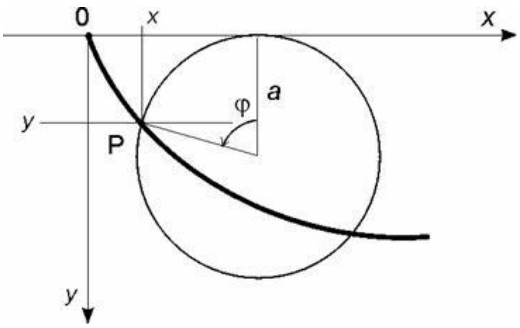


Obr. 3: Brachystochrona



Obr. 4: Izochrona

Predpokladajme, že gulička je vypustená z bodu 0 (Obr. 5) s nulovou počiatočnou rýchlosťou, takže v bode $P = (x_P\ , y_P\ )$ má rýchlosť $v = \sqrt{2gy}$. Element dráhy má veľkosť $ds = \sqrt{1+y'^2}dx$ ($y' = \frac{dy}{dx}$). Gulička ho prebehne za čas $dt = \frac{ds}{v}$, takže $dt = \frac{1}{\sqrt{2g}} \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}\, dx$ (2)



Obr. 5

Celkový čas, ktorý má byť minimálny, dostaneme integráciou:

$$T = \int_0^{t_P} dt = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_P} \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}\, dx \qquad (3)$$

Hodnota integrálu závisí od priebehu funkcie $y(x)$, je to teda funkcionál. Vyhľadanie extrému tohoto funkcionálu je charakteristickou úlohou variačného počtu. Vo všeobecnom prípade sa jedná o úlohu nájsť neznámu funkciu $y(x)$ tak, aby funkcionál $J = \int_{x-a}^{b} F(x, y, y')dx$ nadobúdal stacionárne hodnoty (t.j. maximum, minimum alebo ide o inflexný bod s nulovou smernicou dotyčnice v ňom).

Výzvu Johanna Bernoulliho prijali jeho starší brat Jakub Bernoulli (1654-1705), Leibnitz, L'Hospital (1661-1704), Newton (1642-1727) a Huygens (1629-1695). Tí všetci podali správne riešenie. Najjednoduchšie riešenie však podal sám Johannn Bernoulli. Vyšiel z Fermatovho princípu (1) a predpokladal, že extremálnu vlastnosť má nielen celá dráha, ale aj každá jej časť, teda aj element *ds*. Podľa rovnice (1) musí teda platiť, že

$$\frac{\sin\varphi}{v} = \frac{1}{v}\frac{dx}{ds} = \frac{1}{v}\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = konšt., \text{ a teda } \frac{1}{\sqrt{y\left(1+y'^2\right)}} = konšt. \qquad (4)$$

Krivka, ktorá vyhovuje tejto rovnici, je hľadaná brachystochrona. V 17. storočí, v čase Bernoulliho výzvy, však nebola k dispozícii žiadna teória diferenciálnych rovníc, ale z analytických opisov známych kriviek bolo možné skusmo takéto rovnice odvodiť.

Napríklad v tom čase bolo známe Huygensove riešenie problému o izochrone (tautochrone) - krivke, po ktorej dorazí gulička vypustená z ľubovoľného miesta do najnižšieho bodu za rovnaký čas. Týmto spôsobom, na základe Huygensovho analytického vyjadrenia, Johann Bernoulli rozpoznal, že za rovnicou (4) sa skrýva tá istá krivka.

Obr. 6: Model na ilustráciu brachystochrony z 18. storočia z dreva a slonoviny

Dnes poznáme túto krivku pod názvom cykloida, resp. ortocykloida. Jej definícia je názorná: „cykloida je periodická krivka, ktorú ako svoju stopu zanecháva bod pevne spojený s kružnicou kotúľajúcou sa po nehybnej rovnej podložke". Predpokladá sa pri tom, že kotúľanie sa kružnice a tým aj pohyb v smere podložky sú rovnomerné. (Pre praktickú predstavu uvažujme pohyb bodu pneumatiky rovnomerne pohybujúceho sa vozidla po rovnom povrchu.)

Na základe polohy sledovaného bodu vzhľadom ku kružnici rozlišujeme tri základné typy cykloíd (viď. Obr. 7-9). Známa je taktiež aj epicykloida (hypocykloida) opisujúca pohyb bodu kotúľajúcej sa kružnice po inej, pevnej kružnici, pri ich vonkajšom (vnútornom) dotyku.

Nájsť rovnicu (orto)cykloidy nie je zložité. Priamo z definície dostávame nasledujúce parametrické vyjadrenie $x = x(\varphi)$, $y = y(\varphi)$, kde a je polomer kružnice (viď. Obr. 5):

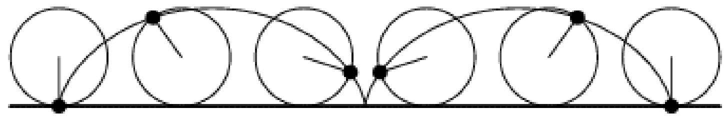
$$\begin{aligned} x &= a\,\varphi - a\,\sin\varphi \\ y &= a - a\,\cos\varphi = 2a\,\sin^2\frac{\varphi}{2} \end{aligned} \tag{5}$$

Na základe tohoto vyjadrenia môžeme overiť, že riešením (4), tak ako poukázal Johann Bernoulli, je naozaj cykloida; hľadaná krivka brachystochrona presne zodpovedá aperiodickej časti obrátenej cykloidy, pre vhodne zvolenú hodnotu polomeru kružnice a (vyplývajúcu z počiatočnej polohy bodov A, B). K tomu účelu si z (5) vypočítame deriváciu:

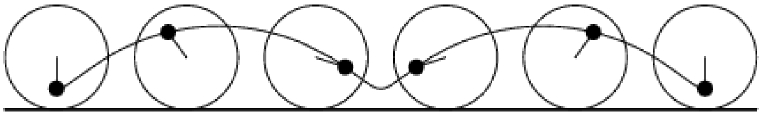
$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}} = \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2} \tag{6}$$

Následne z rovnice (6) vylúčime uhol φ pomocou druhej z rovníc (5) a dostaneme (4).

O cykloidu sa zaujímali už v starovekom Grécku, ale prvé písomné zmienky pochádzajú až zo 14. a 15. storočia od filozofov a matematikov Mikuláša Kusánského a Charlesa de Bouvelles.

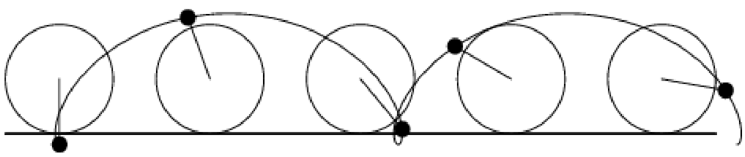


Obr. 7: Obyčajná cykloida



Obr. 8: Skrátená cykloida

Naozaj fascinovaný bol cykloidou Galileo Galilei, ktorý o nej napísal prvý spis v roku 1599, kde ju tiež pomenoval. Vlastnosti cykloidy podrobne preskúmal Blaise Pascal, ktorý už ťažko chorý uverejnil v roku 1658 pod pseudonymom svoj traktát o cykloide. V 17. storočí vzbudila záujem celého radu matematikov a fyzikov (Newton, Pascal, Wren, Mersenne) pre svoje pozoruhodné vlastnosti. Záujem o cykloidu a vzájomná rivalita týchto vedcov prispela značnou mierou aj k rozvoju diferenciálneho a integrálneho počtu. Newton našiel ťažisko oblúku cykloidy, architekt Christopher Wren spočítal dĺžku jej jedného oblúku (l = 8a, čiže nezávisí na π) a Blaise Pascal obsah plochy pod jej jedným oblúkom (S = $3\pi a^2$).



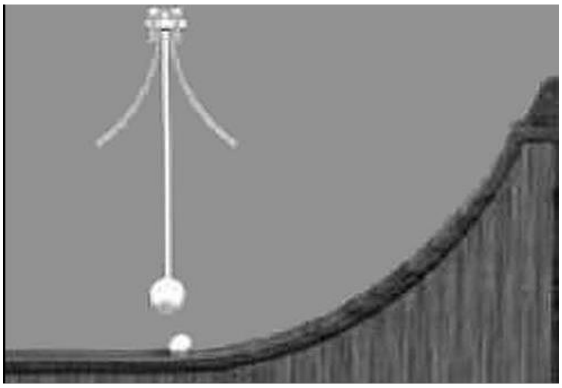
Obr. 9: Predĺžená cykloida

2 Cykloida v technike a prírode

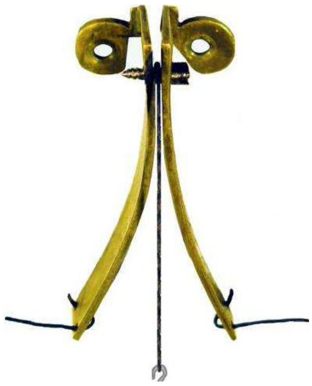
Cykloidu v prírode a technike v súčasnosti nachádzame (okrem už spomenutého prípadu) na nečakaných miestach a v rôznych zaujímavých súvislostiach. Cykloidy sa napr. s obľubou využívajú na cykloidálne ozubené kolesá v prevodovkách – cykloidálne ozubenie umožňuje prenos rotačného pohybu z jedného ozubeného kolesa na druhé koleso bez lokálnych zmien uhlovej rýchlosti. Podobne výrez na carvingových lyžiach má tvar cykloidy, čím sa minimalizuje trenie pri styku lyže so snehom. S cykloidou sa často stretávame aj v stavebnom inžinierstve. Konštrukcie mostných a tunelových telies (napr. nové tunely pražského metra, tunel Mrázovka – Obr. 10) mávajú priečny profil tvaru cykloidy. Tento tvar umožňuje rovnomerné rozloženie tlaku horniny na steny betónového telesa tunela.

Obr. 10: Tunel Mrázovka

Z minulosti je známy Huygensov príbeh cykloidálneho kyvadla. Huygens sa s cykloidou zrejme intenzívne zoznámil v roku 1658, keď sa zúčastnil súťaže v riešení 6 úloh o cykloide vyhlásenej Pascalom. (V súťaži nedopadol najhoršie, ale víťazom sa stal pod pseudonymom vystupujúci sám vyhlasovateľ). Huygens využil Pascalove poznatky o cykloide pri svojom štúdiu pohybu kyvadla. Navrhol cykloidálne (izochronné) kyvadlo (dnes známe ako Huygensovo na jeho počesť), ktoré na rozdiel od normálneho matematického kyvadla pri väčšej počiatočnej výchylke nepredlžuje svoju periódu. To umožnilo značne zvýšiť presnosť kyvadlových hodín. Kyvadlo prispôsobil tak, aby dĺžka kyvu (perióda kývania) nezávisela od jeho výchylky (amplitúdy kývania). K tomu práve bolo potrebné, aby hmotný bod neopisoval oblúk kružnice, ale cykloidu. Dosiahol to tým, že obmedzil pohyb vlákna v blízkosti upevnenia závesu kyvadla dvoma plieškami (Obr. 12).



Obr. 11: Cykloidálne kyvadlo



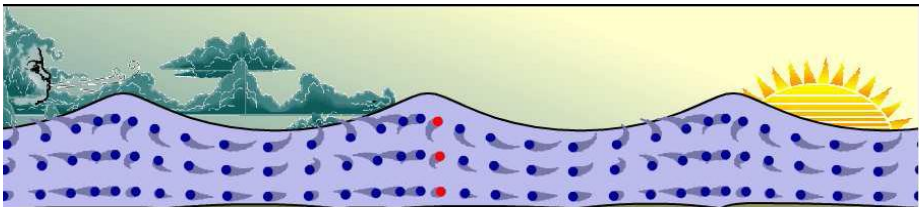
Obr. 12

Ďalšiu ukážku cykloidy (ako bolo naznačené v úvode) vidíme v čínskej architektúre. Staroveká čínska architektúra je jedinečná a známa po celom svete. Jej počiatky siahajú do obdobia spred troch tisíc rokov, avšak od tej doby sa staviteľstvo v Číne menilo len nepatrne. Hoci krajina dosahovala značného rozvoja (poľnohospodárstvo – pestovanie a vývoz čaju, ryže, hodvábu; spoločenská diferenciácia – organizačná štruktúra Číny, jednotný zákonník; objavy a vynálezy – kompas, papier, pušný prach, . . .) v porovnaní so zvyškom sveta, v jej architektúre hrali zásadný vplyv predovšetkým tradície, povery a najmä úradné nariadenia. Môžeme tak pozorovať len relatívne malú rozmanitosť čínskych stavieb a v podstate jediný architektonický sloh. Podľa rovnakých zásad boli stavané nielen jednoduché obydlia, ale aj honosné paláce a celé mestá.

Obr. 13: Ukážka čínskej architektúry

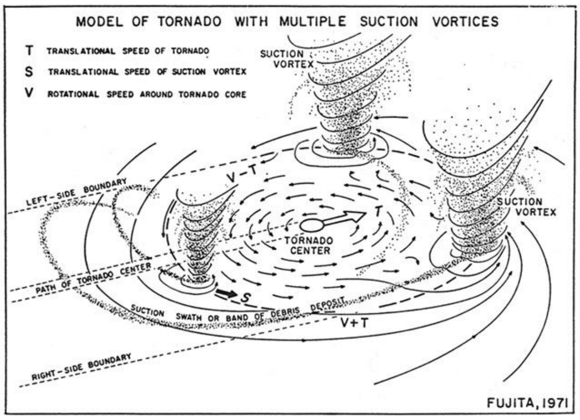
Strechu považovali za jednu z najdôležitejších častí domu. Spomedzi všetkých jej možných tvarov preferovali šikmú strechu, keďže v Číne veľmi často prší (na juhu cca 990 mm zrážok ročne), lebo oveľa lepšie odvádza vodu, ktorá sa tak na streche nehromadí. Čínski stavitelia a architekti, ktorí boli v tom období považovaní skôr za remeselníkov než za umelcov, vychádzajúc zo svojich najlepších skúseností navrhovali a stavali tradičné strechy s profilom v tvare cykloidy a túto krivku používali aj na tvar ich bočných hrebeňov. Tým sa minimalizoval čas styku vody so stavebným materiálom (viď. úloha o brachystochrone), dôsledkom čoho sa vylepšovali izolačné schopnosti strechy a predlžovala sa životnosť krytiny.

V prírode nie je zriedkavým úkaz kruhov na hladine vody. Ak kameň hodíme do vody, pozorujeme na hladine kruhy (sústredné kružnice). Hodený kameň vytvorí vo vode vlny. Dobre známe sú aj narastajúce kruhové vlny, ktoré možno pozorovať pri daždi na každej mláke. Zaujímavé pritom je, že v mieste, kde na hladinu dopadne kameň či kvapka, sa hladina vody čoskoro po dopade upokojí a vlnový rozruch sa prejavuje už len vo vzdialenejších oblastiach hladiny. Hladina sa teda v dôsledku vzájomného pôsobenia častíc chová ako pružná blana. Častice hladiny vody vykonávajú kmitavý pohyb. Pri vlnení nedochádza k pohybu prostredia ako celku, ale jednotlivé časti prostredia oscilujú okolo určitej rovnovážnej polohy. Rozlišujeme dva základné druhy vlnenia, a to vlnenie priečne a vlnenie pozdĺžne. V tuhých látkach môže vzniknúť vlnenie priečne aj pozdĺžne. Niektoré druhy vlnenia, napr. povrchové vlny na vode, nemožno pokladať iba za priečne, alebo iba za pozdĺžne. Častice vody vykonávajú elipticky, alebo aj všeobecne zložitejší pohyb a vlnenie na vode je kombináciou priečneho a pozdĺžneho vlnenia [8]. Zdalo by sa, že hladina vody ma tvar sínusoidy, ktorá je tradične spájaná s kmitavým pohybom. Avšak, ak vytvoríme profil takejto hladiny, spozorujeme, že ho tvoria cykloidy. Dôvodom je to, že sa jedná o pohyb súčasne ako vo vertikálnom tak aj v horizonálnom smere (od zdroja impulzu) ‑ viď. Obr. 14.



Obr. 14: Vlnenie na hladine vody

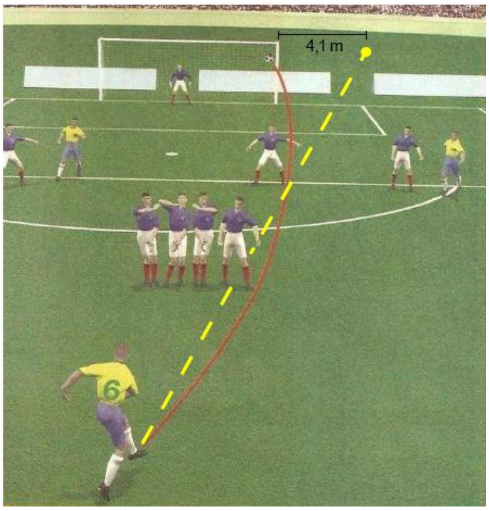
Okrem vody objavujeme výskyt cykloidy aj v súvislosti s ďalším živlom ‑ s tornádom. Tornádo je komplikovaný a ešte nie celkom vedecky objasnený prírodný jav, ktorý vzniká v rámci materského búrkového oblaku a pohybuje sa spolu s ním. Pohyb tornáda môže byť nevyspytateľný, napriek tomu má stopa skazy vždy tvar cykloidy (ako stopa rotujúcej lopty na rovnom povrchu). Na periférii väčších tornád sa vytvoria rozmerovo menšie, tzv. sekundárne savé víry, ktoré však svojím deštruktívnym účinkom vysoko prevyšujú „nosné" tornádo. Savé víry sa zemského povrchu dotýkajú len veľmi krátko a nimi zasiahnutá oblasť býva malá, silne ohraničená [10]. Práve ich prítomnosťou sa vysvetľujú miestne, značne premenlivé škody ‑ napríklad z domu je strhnutá strecha, zatiaľ čo o pár metrov vedľa stojaci skleník zostane nedotknutý. Slovo savý vyjadruje ich ďalšiu významnú vlastnosť ‑ výrazný savý efekt smerom nahor. Pritom čím je postup tornáda pomalší alebo obvodová rýchlosť rotácie vyššia, tým sa jednotlivé cykloidy ‑ trajektórie sekundárneho víru ‑ viac prekrývajú.



Obr. 15: Model tornáda

Obr. 16: Pohľad na tornádo

Futbalových fanúšikov nadchýna let lopty. Okrem rýchlosti letu a sily nárazu ich očarúva schopnosť špičkových hráčov narábať s loptou tak, akoby pre ňu neplatili fyzikálne zákony. Vedia nastreliť loptu tak, že letí po zdanlivo nemysliteľných trajektóriach. Nepohybuje sa po priamke, ale si urobí vo vzduchu „zákrutu" . Aj tento na prvý pohľad nadprirodzený jav vie fyzika vysvetliť. Uvedený spôsob letu futbalovej, ale aj volejbalovej či inej lopty, nie je ani športovým laikom neznámy a existuje pre ňu aj pomenovanie falš-lopta. Odborne sa tento jav opisuje ako zakrivenie dráhy pohybu lopty a nazýva sa Magnusov efekt. Čo je jeho príčinou? Pomocou ktorých fyzikálnych zákonitostí ho vysvetlíme?



Obr. 17: Falš-lopta

Podľa prvého Newtonowho zákona, tzv. zákona zotrvačnosti, lopta, povedzme futbalová, ktorá bola uvedená do pohybu nejakou rýchlosťou, napr. vystrelená zo značky rohového kopu, by sa mala pohybovať rovnomerne priamočiaro, pokiaľ na ňu nepôsobia žiadne sily. Keďže ale na loptu pôsobí sila tiaže, dráha pohybu lopty sa bude zakrivovať zvisle nadol. Lopta letí dopredu a súčasne padá. Výsledkom je pohyb, ktorého dráha je krivka nazývaná parabola. Tak by to bolo, keby na ňu nepôsobili iné sily. V skutočnosti prebieha pohyb lopty v priestore vyplnenom vzduchom, ktorý kladie odpor jej pohybu. Táto sila brzdí pohyb lopty a spôsobuje zväčšenie zakrivenia. Krivka, ktorá znázorňuje dráhu pohybu, nebude teda v skutočnosti parabola, ale zakrivenejšia ‑ balistická krivka.

Spomínané zakrivenie je vidieť pri pohľade zboku. Ako je to pri pohľade zhora? Prebieha pohyb lopty po inej ako priamej dráhe? Áno. Takúto dráhu lopty vysvetľujú fyzici tzv. Magnusovým efektom. Magnusov efekt môžeme pozorovať u telies, ktoré pri svojom pohybe vzduchom rotujú okolo vlastnej osi kolmej na smer pohybu. Už slávny Isaac Newton si v roku 1672 všimol, že let tenisovej loptičky je ovplyvnený jej rotáciou. Tento efekt potom v 18. storočí študoval anglický matematik Benjamin Robins, ale k jeho podrobnému preskúmaniu prispel najmä nemecký chemik a fyzik Heinrich Gustav Magnus (1802-1870), po ktorom je efekt pomenovaný [4]. Bez hlbších fyzikálnych znalostí sa tento jav dá vysvetliť len zjednodušene. V podstate ide o to, že rotácia spôsobí nesymetrické rozloženie mednej vrstvy vzduchu na povrchu rotujúceho telesa, pretože jedna strana telesa má voči vzduchu inú rýchlosť než druhá strana [5]. Dôsledkom toho je nesymetrické odtrhávanie sa mednej vrstvy vzduchu na zadnej strane lopty, pričom vzniká bočná sila, odkláňajúca loptu z priameho smeru. Zaujímavé pritom je, že táto bočná sila začne narastať, až keď sa let lopty spomalí tak, že prúdenie okolo nej prestane byť turbulentné a stane sa laminárnym. Tým možno vysvetliť skutočnosť, že dráha lopty sa najviac zakrivuje na konci letu a má tvar cykloidy (vo futbalovej reči sa mu hovorí „banánový"). Na dosiahnutie takéhoto kopu treba dať lopte správnu rotáciu, pričom lopta musí byť zasiahnutá šikmo a trochu mimo centra.

A napokon spomenieme ešte jeden príklad výskytu cykloidy v prírode, príklad jej najčastejšieho výskytu – dážď. Predstavte si, že prší a kvapky dažďa dopadajú na steblá trávy alebo listy stromov. Listy a steblá zmenia svoju pôvodnú polohu a tvar – prehnú sa. Spôsobuje to kinetická energia dažďa. Prehnú sa do tvaru cykloidy.

Vysvetlenie je podobné ako pri tvaroch čínskych striech. Steblo, či list zmenia svoj tvar podľa toho, ako im to umožňuje ich flexibilita, aby sa čo najrýchlejšie zbavili, zbytočnej záťaže. A človek odkopíroval túto prirodzenú múdrosť prírody pri navrhovaní a výrobe dáždnikov.

Obr.18

Obr. 19

Záver

Cykloida je špeciálna rovinná krivka definovateľná napríklad ako stopa bodu rotujúceho telesa v pohybe. Pre jej zaujímavé vlastnosti je jej výskyt v prírode pomerne častý. Užitočnosť týchto vlastností objavil a využil človek už pred niekoľkými tisícročiami.

V texte článku sme sa zoznámili s históriou jej objavovania, s históriou jej exaktného matematického opisu, s jej aplikáciami v technickej praxi, či už v súčasnosti alebo minulosti, ako aj so zaujímavými príkladmi fyzikálnych javov, ktorých podstata súvisí s tvarom cykloidy. Ukázali sme si, že cykloida opisuje zakrivenie trajektórie rotujúceho telesa v dôsledku trenia vzduchu, je krivkou najrýchlejšieho pohybu v gravitačnom poli, ako aj krivkou umožňujúcou presné meranie času, konštrukciu prevodových systémov automobilov, či už rovnomerné rozloženie záťaže pri stavbe tunelov.

Tým však zoznam oblastí jej výskytu a použitia nekončí. Cykloida taktiež nie je jedinou takouto prirodzenou krivkou – podobnými príkladmi sú klotoida, evolventa kružnice, reťazovka, versiera a rôzne špirály. Vysvetľujeme pomocou nich zaujímavé prírodné javy, ako aj ich praktické vlastnosti nám slúžia na riešenie technických problémov v inžinierskej praxi.

Napriek tomu povedomie verejnosti i špecialistov-inžinierov o vlastnostiach a užitočnosti týchto kriviek je nízke. Nenájdeme ich v osnovách matematických predmetov na väčšine škôl (ani o nich prakticky neexistuje literatúra prístupná širokej verejnosti), aj keď sa s nimi stretávame denne v bežnom živote (zakrivenie cesty, visiace drôty elektrického vedenia, tvar galaxií a hurikánov, dráha náletu dravca na korisť, tvar zubov ozubených kolies, trajektória pohybu v športových disciplínach) a mylne si ich zamieňame s inými krivkami (kružnica, parabola, hyperbola, sínusoida).

Vzhľadom na uvedenú situáciu, bolo naším cieľom v tomto článku vzbudenie záujmu o problematiku špeciálnych kriviek, či už z pohľadu teoretického, praktického alebo estetického. Dúfame, že sme čitateľa inšpirovali príkladmi z reálneho života, historickými poznámkami, ako aj ponúknutou rôznorodosťou.

Poďakovanie: Príspevok vznikol s podporou projektu KEGA SR číslo 046ŽU-4/2011.

Literatúra

[1] Courant R., *Kurs differenciaľnogo i integraľnogo iscislenija 2*, Nauka, Moskva 1979,

[2] Feynman R. P., Leighton R. B., Sands M., *Feynmanovy přednášky z fyziky 3/III*, Fragment, Praha 2007.

[3] Höschl C., *Historie variačního poctu*, http://mechanika.johnyho.net.

[4] „*Heinrich Gustav Magnus*." Wikipedia ‑ Slobodna encyklopedia, Wikimedia Foundation. http://en.wikipedia.org/wiki/Heinrich_Gustav_Magnus.

[5] Jílek M., *Magnusuv jev* (FyzWeb dilna ‑ Sražky a rotace), MFF UK, Praha.

http://fyzweb.cuni.cz/dilna/krouzek/k43.htm.

[6] Kontrová L., Lengyelfalusy T., *Niekoľko historických poznámok ku geometrickým konštrukciám*, In: 5. matematický workshop s mezinárodní účastí, Brno 2006,

http://math.fce.vutbr.cz/~pribyl/workshop_2006/prispevky/Kontrova.rtf

[7] Kowal S., *Matematika pro volné chvíle* (preklad poľského originálu), , Praha, SNTL, Polytechnická knižnice, řada I, sv. 114, 1985,

[8] Laurinc, V., Holá, O., Fedorko, P.: *Vlny a kmity* (e - Fyzika I), FEI STU, Bratislava.

http://kf-lin.elf.stuba.sk/~ballo/STU_online/index.html.

[9] Lepil, O.: *Fyzika pro gymnázia – Mechanické kmitání a vlnění*, Praha, Prometheus, 2001,

[10] Munzar, J., Pejm, K., Krška, K.: *Meteorologie skoro detektivní*, Praha, Horizont, 1990,

[11] Svoboda, E. a kol.: *Přehled středoškolské fyziky*, Praha, Prometheus, 2006,

[12] Štoll, I, Stoll, H. A.: *Svět očima fyziky*, Praha, Prometheus, 1996

RNDr. Darina Stachová, PhD.
Katedra matematiky FPV ŽU v Žiline
Univerzitná 1, 010 26 Žilina
email: darina.stachova@fhv.uniza.sk

RNDr Milan Stacho, PhD.
KKMaHI. fakulta PEDAS
Žilinská Univerzita v Žiline
Univerzitná 1, 01026 Žilina
email: Milan.Stacho@fpedas.uniza.sk