POZNÁMKY K OBSAHU A OBVODU KRUHU

REMARKS TO AREA AND CIRCUMFERENCE OF CIRCLE

Marek Varga

Abstract: In the article we deal with integral calculus. We find formulas for area and circumference of circle by several ways. We assume and hope that our students will know at least one of these aproaches.

Key words: circle, integral calculus, area, circumference, function, parametric equations, polar coordinates

Úvod

Jedným zo základných kurzov učiteľského štúdia matematiky na Katedre matematiky FPV UKF je v prvých piatich semestroch matematická analýza. V treťom semestri bakalárskeho štúdia sú prednášky a semináre matematickej analýzy venované integrálnemu počtu. Okrem definície Riemannovho a Newtonovho integrálu, základných integračných metód a ďalších vlastností určitého integrálu sú pevnou súčasťou tohto kurzu aj aplikácie určitého integrálu. V nasledujúcich riadkoch zostaneme predovšetkým pri geometrických aplikáciách – výpočet obsahu elementárnej oblasti, dĺžky krivky, objemu a povrchu rotačného telesa. Presnejšie, budeme sa sústrediť na výpočet obsahu a obvodu kruhu. Tvrdíme, že tieto vzorce – dostatočne známe už z hodín matematiky na základnej škole – by si mal učiteľ matematiky vedieť odvodiť. Navyše si myslíme, že ak študentovi – budúcemu učiteľovi matematiky ukážeme viacero spôsobov, ako nájsť požadované formuly, aspoň jedna metóda mu natrvalo utkvie v pamäti. Z uvedeného dôvodu sa na náš kruh pozrieme z viacerých uhlov pohľadu.

1 O obvode a obsahu kruhu

1.1 Krivka daná explicitne

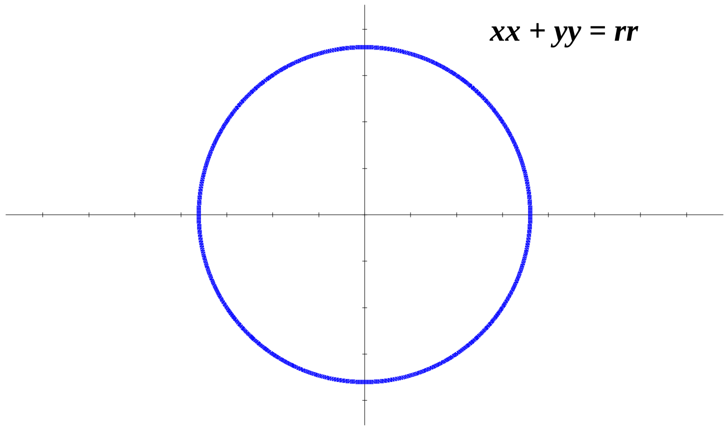
Z analytickej geometrie vieme, že kruhom $\mathcal{K}$ so stredom v bode $O[0;0]$ a polomerom r nazývame množinu práve tých bodov v rovine, pre ktoré platí

$$\mathcal{K} \equiv \left\{ [x;y] \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 \le r^2 \right\}.$$

Ak sa zameriame len na jeho časť ležiacu v prvom a druhom kvadrante (obr. 1), tak zrejme uvažovaný polkruh je ohraničený grafom funkcie $y=\sqrt{r^2-x^2}$, pričom $x\in\langle -r;r\rangle$. Ak navyše využijeme súmernosť tohto grafu podľa osi o_y, pre obsah[(1)] nášho kruhu zrejme platí

$$S_{\mathcal{K}}=\int_a^b y\,\mathrm{d}x=4\cdot\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x\left|\begin{matrix}x=r\sin t\\ dx=r\cos t\,\mathrm{d}t\end{matrix}\right|=4\int_0^{\pi/2}r^2\cos^2 t\,\mathrm{d}t=4r^2\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t=$$

$$=4r^2\left[\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\pi/2}=\pi r^2.$$



Obr. 1: Kružnica daná implicitne

Zostaňme rovnako skromní ako doteraz, a skúsme si poradiť s obvodom[(2)] kruhu opäť len pomocou jeho časti umiestnenej v prvom kvadrante. Dostávame:

$$o_{\mathcal{K}}=\int_a^b\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,\mathrm{d}x=4\cdot\int_0^r\sqrt{1+\left[\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)'\right]^2}\,\mathrm{d}x=4\int_0^r\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,\mathrm{d}x=4r\int_0^r\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\mathrm{d}x=$$

$$=4r\left[\arcsin\frac{x}{r}\right]_0^r=2\pi r.$$

Podarilo sa nám získať správne výsledky, na šťastie v oboch prípadoch, napriek tomu sa v ďalších riadkoch pokúsime získať naše vzorce inými cestami.

---

(1) Veta: Nech f je funkcia spojitá na intervale $\langle a;b\rangle$. Potom pre obsah S elementárnej oblasti $\mathcal{O}$ $=\left\{[x;y]\in R^2;\ x\in\langle a;b\rangle\ \wedge\ 0\le y\le f(x)\right\}$ platí $S=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

(2) Veta: Nech f, f' sú spojité funkcie na intervale $\langle a;b\rangle$. Potom pre dĺžku L krivky $y=f(x)$ na intervale $(a;b)$ platí $L=\int_a^b\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,\mathrm{d}x$.

1.2 Krivka daná parametricky

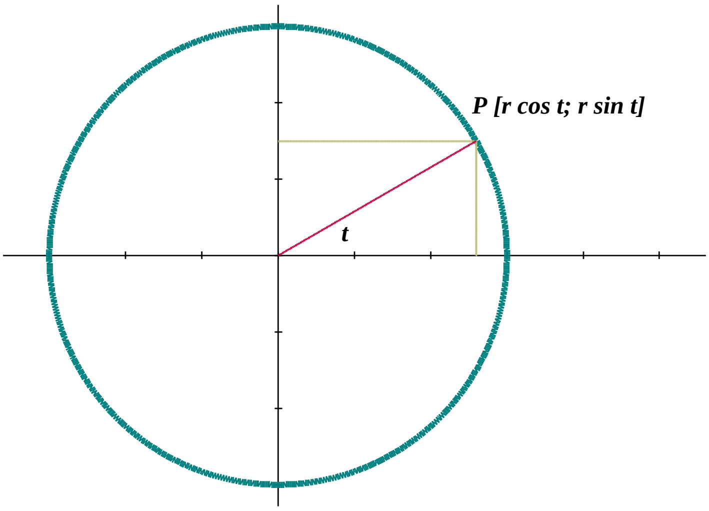
Opäť uvažujme kruh $\mathcal{K}$ so stredom v bode $O[0;0]$ a polomerom r. Parametrické vyjadrenie kružnice, ktorá ohraničuje tento kruh (obr. 2), má potom tvar

$$x=\varphi(t)=r\cos t\,,\quad y=\psi(t)=r\sin t\,;\ \text{kde}\ \ t\in\langle 0;\,2\pi\rangle\,.$$

Ak využijeme štvrťkruh z prvého kvadrantu, tj. $t\in\left\langle 0;\,\dfrac{\pi}{2}\right\rangle$, potom pre obsah(3) celého kruhu $\mathcal{K}$ zrejme platí

$$S_{\mathcal{K}}=\int_a^b \psi\,|\,\varphi'\,|\,\mathrm{d}t=4\cdot\int_0^{\pi/2} r\sin t\,|-r\sin t\,|\,\mathrm{d}t=4r^2\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\,\mathrm{d}t=4r^2\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t=$$

$$=4r^2\left[\frac{t}{2}-\frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\pi/2}=\pi r^2\,.$$



Obr. 2: Kružnica a jej parametrické rovnice

Pomocou ďalšieho vzorca z integrálneho počtu sa zase dostaneme k obvodu(4) nášho kruhu, totiž platí

---

(3) Veta: Nech krivka $\mathscr{k}$ je daná parametrickými rovnicami $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$; kde $t\in\langle u;v\rangle$, nezáporná funkcia ψ je spojitá, φ je spojito diferencovateľná na $\langle u;v\rangle$. Potom pre obsah S elementárnej oblasti ohraničenej krivkou $\mathscr{k}$ platí $S=\int_u^v \psi(t)\,|\,\varphi'(t)\,|\,\mathrm{d}t$.

$$o_{\mathcal{K}} = \int_a^b \sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2}\, \mathrm{d}t = 4 \cdot \int_0^{\pi/2} \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2}\, \mathrm{d}t = 4r \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t = 2\pi r\,.$$

Hoci sme overili naše predošlé výsledky, naďalej sme so sebou nespokojní a pokúsime sme nájsť naše vzorce ďalšími nezávislými spôsobmi.

1.3 Krivka daná v polárnych súradniciach

Umiestnime stred kružnice do začiatočného bodu polárnej osi, nech je jej polomer r. Potom rovnica tejto kružnice v polárnych súradniciach má tvar (obr. 3a)

$$\rho = r\,;\ \text{pričom}\ \ \varphi \in \langle 0; 2\pi \rangle\,.$$

Pre obsah(5) kruhu ohraničeného spomenutou kružnicou potom (ak tradične využijeme len štvrtinu tohto útvaru) dostávame:

$$S_{\mathcal{K}} = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2\, \mathrm{d}\varphi = 4 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} r^2\, \mathrm{d}\varphi = \pi r^2\,.$$

Pokračujme ešte výpočtom obvodu(6) nášho kruhu (opäť využijúc jeho súmernosť):

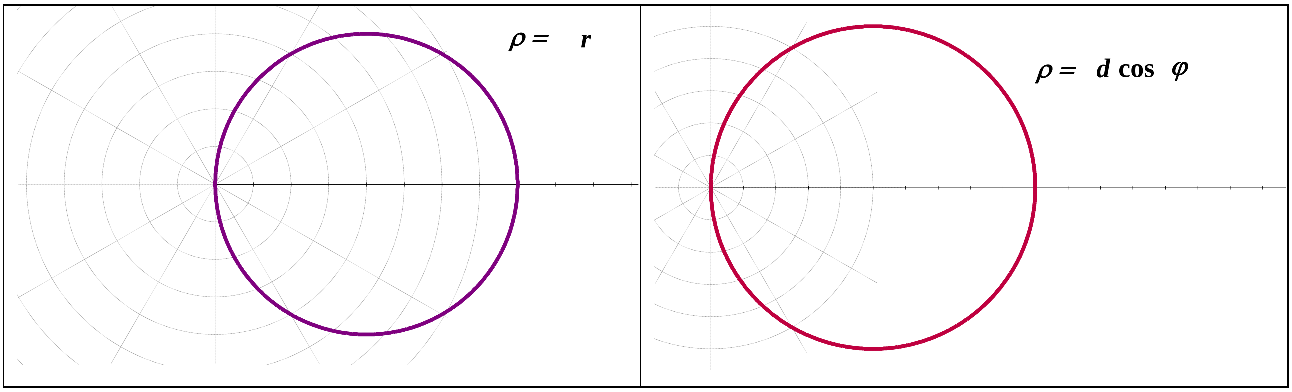
$$o_{\mathcal{K}} = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, \mathrm{d}\varphi = 4 \cdot \int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2}\, \mathrm{d}\varphi = 2\pi r\,.$$

---

(4) <u>Veta:</u> Nech krivka $\boldsymbol{k}$ je daná parametrickými rovnicami $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$; kde $t \in \langle u; v \rangle$, funkcie ψ, φ majú spojité derivácie na $\langle u; v \rangle$. Potom pre dĺžku krivky $\boldsymbol{k}$ platí $L = \int_u^v \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt$.

(5) **<u>Veta:</u>** Nech $\rho = \rho(\varphi)$ je spojitá nezáporná funkcia na intervale $\langle \alpha; \beta \rangle$. Potom pre obsah S segmentu $\mathcal{M}$ $= \{[\varphi; \rho] \in R^2;\ \varphi \in \langle \alpha; \beta \rangle \wedge 0 \le \rho \le r(\varphi)\}$ platí $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\mathrm{d}\varphi$.

(6) **<u>Veta:</u>** Nech funkcia $\rho = \rho(\varphi)$ má spojitú deriváciu na intervale $\langle \alpha; \beta \rangle$. Potom pre dĺžku krivky $\rho = \rho(\varphi)$ na intervale $\langle \alpha; \beta \rangle$ platí $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}\, d\varphi$.



Obr.3 a, b: Kružnica, polárne súradnice

Na rozdiel od predošlých prípadov sa tu zdržíme trošku dlhšie – rovnica kružnice v polárnych súradniciach totiž môže byť aj v tvare

$$\rho = d\cos\varphi;\ \text{pričom}\ \ \varphi \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle.$$

V tomto prípade sa len posunul jej stred na polárnej osi (obr. 3b), čo však samozrejme nemá žiadny vplyv na hodnotu obsahu či obvodu takto získaného kruhu. Ďalšou odlišnosťou je, že tentokrát hodnota d vlastne predstavuje priemer kruhu. Na rozdiel od predchádzajúcich výpočtov teraz využijeme celý polkruh, tj. budeme uvažovať $\varphi \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Počítajme:

$$S_{\mathcal{K}} = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 \,\mathrm{d}\varphi = 2\cdot\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/2} d^2\cos^2\varphi \,\mathrm{d}\varphi = d^2\int_{0}^{\pi/2} \cos^2\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \ldots = \frac{\pi}{4}d^2.$$

Doplňme opäť aj vzorec pre výpočet obvodu kruhu:

$$o_{\mathcal{K}} = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,\mathrm{d}\varphi = 2\cdot\int_{0}^{\pi/2} \sqrt{(d\cos\varphi)^2 + (-d\sin\varphi)^2}\,\mathrm{d}\varphi = 2d\int_{0}^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi = \pi d.$$

Aj naše posledné dva výsledky zodpovedajú vyššie uvedeným riešeniam, overenie je možné okamžite vďaka vzťahu medzi priemerom a polomerom kruhu $d = 2r$.

Záver

V článku sme sa venovali odvodenie známych vzorcov na výpočet obsahu a obvodu kruhu. Pokúšali sme sa o čo najväčšiu pestrosť v nádeji, že ak ukážeme študentom – budúcim učiteľom matematiky viacero spôsobov, ako spomenuté formule získať, určite sa im jedna z nich zapáči (vyberú si pochopiteľne pre nich „tú najľahšiu“), a natrvalo sa vryje do pamäti. Popritom sme využili obrázky vytvorené programom Winplot, ktoré nám pri výpočtoch do istej miery pomáhali. Tento program je schopný vykresľovať grafy funkcií, kriviek, či plôch, a navyše je voľne dostupný, takže ho môžeme bez obmedzení kedykoľvek využívať.

Literatúra

[1] Varga, M.: *Zbierka úloh z matematickej analýzy*; FPV UKF, Nitra, 2010, ISBN 978-80-8094-712-5, 200 s.

PaedDr. Marek Varga, PhD.
KM FPV UKF, Tr. A. Hlinku 1, 94974 Nitra
mvarga@ukf.sk