



## CATALANOVA ČÍSLA VE ŠKOLSKÉ MATEMATICE

## CATALAN NUMBERS IN SCHOLL MATHEMATICS

Jaroslav Beránek

**Abstract:** The article is devoted to Catalan sequence and its elements, so called Catalan numbers. These numbers, although not mentioned in school mathematics (not even at universities), have a lot of interesting applications. The article shows some problems, the solution of which is formulated with the help of Catalan numbers. The shown topic can contribute to developing combinatorial thinking of students, which is one of the most important tasks of the contemporary mathematics.

**Key words:** Catalan sequence, Catalan numbers, school mathematics.

### 1 Úvod

Mezi důležitou součástí výuky matematiky na všech stupních škol patří kombinatorika nebo obecněji výchova ke kombinačnímu myšlení. Už na základní škole je v rámci vzdělávacího programu „Matematika a její aplikace“ kladen důraz na rozvoj kombinačního myšlení a úlohy s kombinatorickou tematikou se často vyskytují v matematických soutěžích. Systematická výuka kombinatoriky nechybí na žádné střední škole, která má matematiku ve svém školním vzdělávacím programu. Často však dochází k situaci, kdy se studenti učí kombinatorické vzorce formálně z paměti. Je proto nutné, aby výuka kombinatoriky byla pojata obecněji; vzorce by měly být odvozovány, aby došlo k pochopení jejich podstaty a současně by se studenti měli seznámit i s těmi kombinatorickými problémy, jejichž řešení nelze určit pouhým dosazením do základních vzorců (např. počet rozkladů konečných množin, latinské čtverce, rozdělování předmětů do přihrádek atd.). Jedním z vhodných témat jsou z tohoto hlediska tzv. Catalanova čísla (nebo též Catalanova posloupnost). Jak dále uvedeme, pomocí Catalanových čísel lze vyřešit některé velmi zajímavé kombinatorické problémy. Poznamenejme, že uvedené problémy jsou převzaty z [1], [3], [4], [7], [11], [12], [14].

## 2 Catalanova čísla a jejich užití

### 2.1 Počet korektních uzávorkování

Položme si následující problém. *Nechť  $n$  je nezáporné celé číslo. Kolik je všech možných korektních uzávorkování s  $n$  páry závorek?* Párem rozumíme levou a pravou závorku; korektní uzávorkování je potom takové, které odpovídá všem syntaktickým pravidlům pro zápisy matematických výrazů; např. uzávorkování  $(( ) ( )) ( )$  je korektní, kdežto uzávorkování  $(( ( ) ( )) ( )$  korektní není. Poznamenejme, že uvažujeme i triviální případ pro  $n = 0$ .

Počet uzávorkování označíme  $c_n$ . Prozkoumáme-li induktivním postupem několik případů pro malá  $n$ , zjistíme, že  $c_0 = 1$ ,  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 2$ ,  $c_3 = 5$ ,  $c_4 = 14$ . Při větším počtu závorek je již experimentální určování  $c_n$  velmi nepřehledné. Odvodíme proto rekurentní vzorec. Při jeho odvozování může napomoci obrázek, který ukazuje všechny možnosti pro 3 páry závorek:

$$()()(), ()(()), ((())), ((())(), (()()) \quad (1)$$

Na prvním místě uzávorkování musí vždy být levá závorka. Té odpovídá v korektním uspořádání pravá závorka na pozici 2, 4, 6, ...,  $2n$  (při  $n$  párech závorek je  $2n$  možných pozic pro umístění závorky). Uzávorkování mezi těmito dvěma závorkami musí být opět korektní a uzávorkování za pravou závorkou rovněž. Tím dostáváme rekurentní vztah:

$$c_0 = 1, c_1 = 1, c_{n+1} = \sum_{i=0}^n c_i \cdot c_{n-i} \quad \text{pro } n > 0$$

Ilustrujeme tento vztah pro  $n = 3$ ; platí  $c_3 = c_0 \cdot c_2 + c_1 \cdot c_1 + c_2 \cdot c_0$ , tj.  $c_3 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1$ . Následující obrázek uvedený vztah demonstruje (pevně zvolená dvojice závorek je označena hranatými závorkami):

$$[ ]()(), [ ](()) + [ () ]() + [ (()) ], [ ()() ]$$

Při odvození vzorce pro přímý výpočet  $c_n$  se využívá teorie vytvořujících funkcí. Podrobnosti nebudeme uvádět, lze je nalézt ve [2]. Uvedeme pouze výsledek ve třech možných ekvivalentních tvarech:

$$c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}, \quad c_n = \frac{(2n)!}{(n+1)! \cdot n!}, \quad c_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}. \quad (2)$$

Vztahy (2) určují tzv. **Catalanova čísla** (byla studována už Eulerem). V těchto vztazích výrazy  $\binom{2n}{n}$ , resp.  $\binom{2n}{n-1}$  označují binomické koeficienty známé z kombinatoriky. Poznamenejme, že první dva ze vztahů platí i pro  $n = 0$ , zatímco třetí nikoliv. Vztahy (2) tedy také určují počet možných korektních uzávorkování s  $n$  páry závorek. Pro Catalanova čísla platí některé zajímavé vztahy, např.  $c_{n+1} = \frac{2 \cdot (2n+1)}{n+2} \cdot c_n$  pro  $n \in \mathbb{N}$ ,  $c_0 = 1$ ). Pro úplnost ještě dodejme (viz [4]), že

Catalanova čísla  $c_n$  jsou lichá právě tehdy, když  $n = 2^k - 1$  pro každé přirozené číslo  $k$ . Pro všechna ostatní  $n$  jsou sudá. Pro velká  $n$  lze dále Catalanova čísla určit přibližně pomocí vztahu (viz [4])  $c_n \approx \frac{4^n}{\sqrt{\pi \cdot n^3}}$  (lze dokázat užitím Stirlingovy aproximace čísla  $n!$ ). Catalanova čísla totiž

velmi rychle rostou; uvedeme několik prvních hodnot (včetně hodnoty  $c_0$ ): 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, 9694845, 35357970, ... Lichá čísla jsou skutečně (nepočítáme-li triviální případ pro  $n = 0$  a 1) hodnoty  $c_3 = 5$ ,  $c_7 = 429$ ,  $c_{15} = 9694845$  atd.

Závěrem této úvodní části již zbývá pouze krátká zmínka o Catalanovi. Belgický matematik Eugène Charles Catalan se narodil 30. 5. 1814 v Bruges. V roce 1841 ukončil studium na École Polytechnique v Paříži. Jeho prvním působištěm byla Charlemagne College, kde přednášel deskriptivní geometrii. Od roku 1865 působil na Univerzitě v Liège, od roku 1885 byl členem Belgické akademie věd. Nějaký čas byl rovněž členem francouzské poslanecké sněmovny.

Zemřel 14. 2. 1894 v Liège. Zabýval se zejména teorií řetězových zlomků, deskriptivní geometrií, teorií čísel a kombinatorikou.

### 2.2 Počet Dyckových slov

Tzv. Dyckova slova (viz [4]) jsou slova délky  $2n$ , obsahující  $n$  znaků X a  $n$  znaků Y taková, že v žádném počátečním podslově tohoto slova není více znaků Y než znaků X. Přesněji řečeno, Dyckova slova jsou konečné posloupnosti  $\{a_i\}_{i=1}^{2n}$  obsahující  $2n$  členů, přičemž každý člen je buďto znak X nebo Y, podslovem délky  $k$  ( $1 \leq k < 2n$ ) pak rozumíme podposloupnost  $\{a_i\}_{i=1}^k$ . Např. XYXYXY je Dyckovo slovo řádu 6, XYXXYYXY je Dyckovo slovo řádu 8, kdežto YXYXXY Dyckovým slovem není. Problém nyní je určit pro dané přirozené číslo  $n$  počet Dyckových slov řádu  $2n$ . Řešení je velmi jednoduché. Využijeme část 2.1. Zde jsme určili počet všech korektních uzávorkování  $n$  párů závorek. Nahradíme-li levou závorku znakem X a pravou závorku znakem Y, vidíme, že počet Dyckových slov řádu  $2n$  je určen Catalanovým číslem  $c_n$ . Skutečně; pro  $n = 1$  existuje jediné Dyckovo slovo XY, pro  $n = 2$  existují 2 slova XXYY, XYXY a pro  $n = 3$  již je jich pět:

XYXYXY, XYXXYY, XXXYYY, XXYYXY, XXYXYY,

přičemž těchto pět slov přesně odpovídá přehledu (1) všech uzávorkování tří párů závorek. Jako další možná aplikace Dyckových slov bývá v literatuře uváděn následující příklad.

Kamelot prodává noviny, které stojí 5 Kč. Zájem o koupi má  $2n$  osob, přičemž polovina z nich (tj.  $n$ ) má u sebe pouze jednu pětikorunu a druhá polovina pouze jednu desetikorunu. Kamelot na počátku prodeje nemá u sebe žádné drobné. Kolik je možností, jak se kupující mohou postavit do fronty, aby měl kamelot vždy nazpět a prodej se tak nezastavil?

Řešení je opět dáno Catalanovými čísly. Stačí si uvědomit, že osoba s pětikorunou odpovídá znaku X (nebo levé závorce) a osoba s desetikorunou odpovídá znaku Y (tzn. pravé závorce). V každé počáteční části fronty nemůže stát více osob s desetikorunou než s pětikorunou, jedná se tedy opravdu o Dyckova slova.

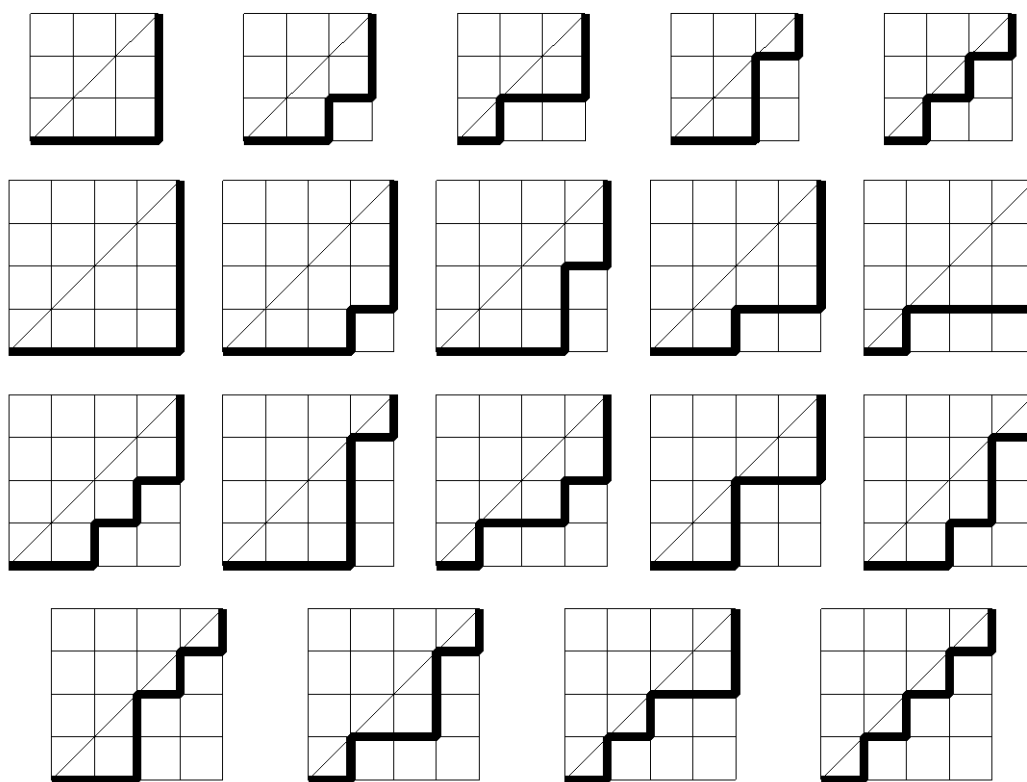
### 2.3 Procházky po čtvercové síti

Je dána čtvercová síť o rozměrech  $n \times n$ . Procházkou po čtvercové síti se rozumí taková cesta, která vede pouze po přímkách této sítě (změna směru je tedy možná pouze v mřížových bodech). Zvolme počátek souřadné soustavy do levého dolního rohu sítě a předpokládejme nyní, že pohyb v síti je realizován pouze pomocí dvou typů tahů:  $[x, y] \rightarrow [x + 1, y]$  (tj. o jeden úsek na "východ") a  $[x, y] \rightarrow [x, y + 1]$  (o jeden úsek na "sever"). Problémem je nyní určit počet takových cest z levého dolního rohu do pravého horního rohu, které nepřekročí diagonálu. Při řešení se analogicky jako u problému korektních uzávorkování odvodí rekurentní vztah

$c_{n+1} = \sum_{i=0}^n c_i \cdot c_{n-i}$ : cestu vždy „rozdělíme“ bodem, v němž se poprvé dotkne diagonály

(připouštíme i počáteční a koncový bod cesty) a uijeme princip součinu, podrobnosti lze nalézt v [6] a [10]. Na základě rekurentního vztahu pomocí teorie vytvořujících funkcí vypočteme, že

počet těchto cest je dán Catalanovými čísly  $c_n$ . Pro  $n = 3$  a  $n = 4$  je řešení ilustrováno následujícími obrázky (převzato z [3]):

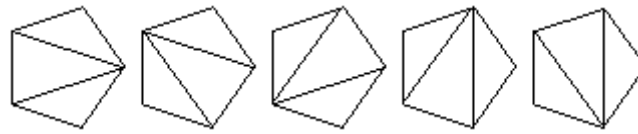


Pro  $n = 3$  je pět cest, pro  $n = 4$  je 14 možných cest.

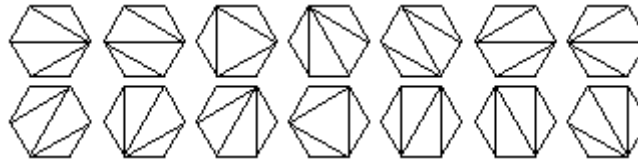
Podle předchozích problémů ve 2.1 jeden krok na východ odpovídá písmenu X (levé závorce či pětikoruně), jeden krok na sever odpovídá písmenu Y (pravé závorce, resp. desetikoruně). Poznamenejme, že i experimentální řešení a hledání takových cest pomocí tužky a čtverečkováného papíru má na základní (a možná i střední) škole značnou výchovnou hodnotu.

## 2.4 Dělení konvexního $n$ -úhelníku

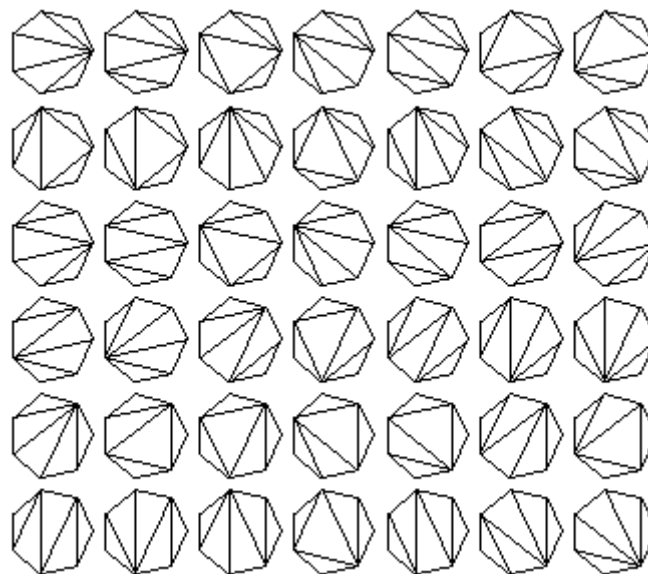
Matematik Leonard Euler se zabýval ve své době problémem, kolika způsoby lze rozdělit konvexní  $n$ -úhelník pomocí některých jeho úhlopříček na trojúhelníky. Tento problém vyřešil. Jeho řešení inspirovalo Catalana, který podal řešení elegantnější formou. Ukázal, že počet rozdělení konvexního  $n+2$ -úhelníka na trojúhelníky je dán pomocí čísel  $c_n$ . Právě při řešení tohoto problému zavedl Catalan tato čísla, která dnes nesou jeho jméno. Experimentální řešení s mladšími žáky vede k rozvoji geometrické představivosti, řešení výpočtem lze nalézt např. ve [3], [4], [7], [12]. V tomto případě již není tak zřejmá analogie s předchozími problémy a je poměrně náročné usoudit, co hraje roli analogickou písmenům X a Y v Dyckových slovech nebo levé a pravé závorky při hledání počtu uzávorkování. Následující obrázek ukazuje všechna rozdělení pětiúhelníka, šestiúhelníka a sedmiúhelníka (obrázky převzaty ze [3]):



Pětiúhelník,  $c_3 = 5$



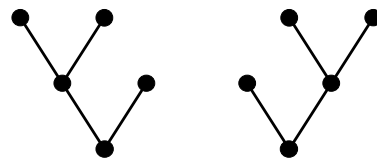
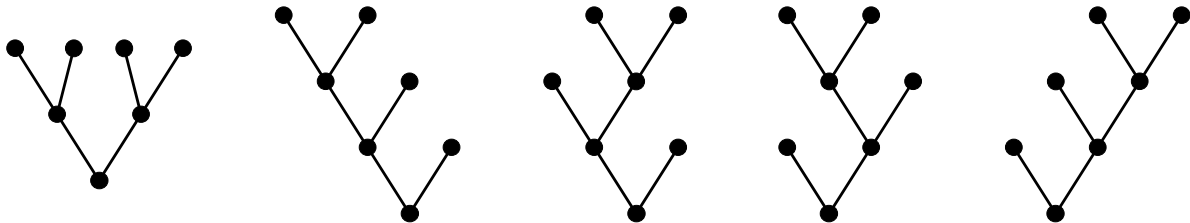
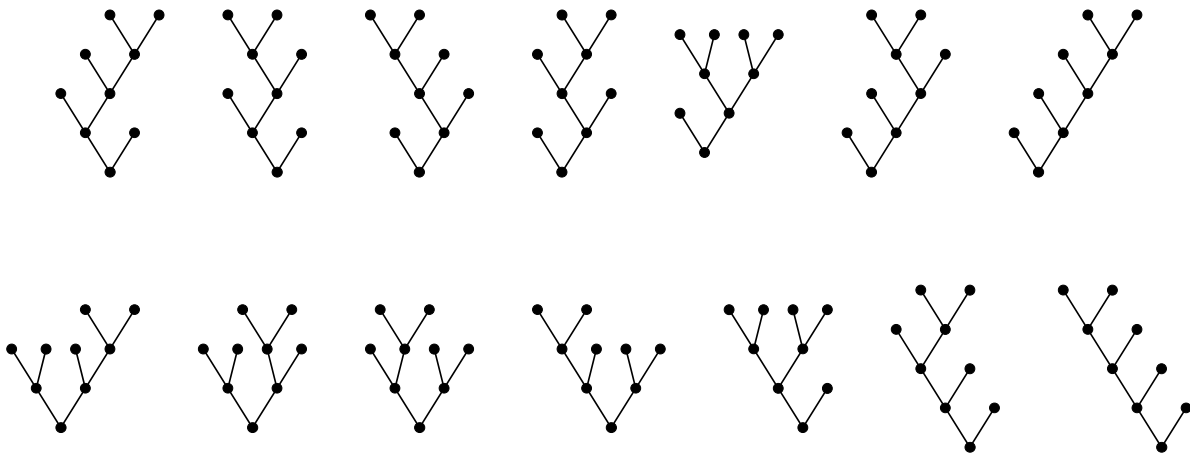
Šestiúhelník,  $c_4 = 14$



Sedmiúhelník,  $c_5 = 42$

## 2.5 Binární stromy

Dalším z problémů, jejichž řešení lze určit pomocí Catalanových čísel  $c_n$ , je určení počtu všech binárních kořenových stromů s  $n+1$  listy (uzly grafu stupně jedna). Poznamenejme, že pod pojmem strom budeme rozumět neorientovaný graf, který neobsahuje kružnici. V dalším se omezíme pouze na tzv. binární kořenové stromy (teorii lze nalézt ve kterékoliv učebnici teorie grafů, např. [9] – situace je intuitivně jasná z následujících obrázků). Tyto stromy obsahují pouze uzly stupně 1, 2 a 3 a jejich počet je vždy lichý; obsahuje-li binární kořenový strom  $2n+1$  uzlů, pak vždy  $n$  uzlů má stupeň větší než jedna a  $n+1$  uzlů má stupeň jedna. Tyto uzly stupně jedna se nazývají listy. Problémem tedy je určit počet všech binárních stromů s  $n+1$  listy, pěstovaných na  $n$  vrcholech vyšších stupňů. Řešení je dáno opět Catalanovými čísly  $c_n$ , podrobnosti lze nalézt v literatuře, např. [3], [4], [7], [12]. Následují ilustrační obrázky, ukazující počet stromů se třemi, čtyřmi a pěti listy (jsou převzaty ze [3]):

Strom se 3 listy,  $c_2 = 2$ Strom se 4 listy,  $c_3 = 5$ Strom s pěti listy,  $c_4 = 14$ 

## 2.6 Další problémy

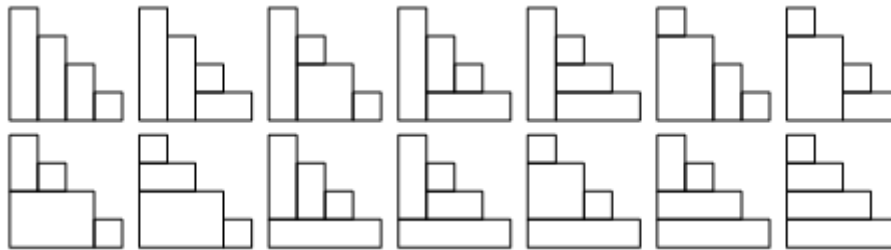
V této části již pouze vyjmenujeme některé další problémy, jejichž řešení je popsáno pomocí Catalanových čísel. První z nich (podání rukou) je poměrně jednoduchý, druhý, týkající se stavby schodiště, je již složitější. Poslední dva jsou uvedeny jen proto, aby byl výčet problémů řešených pomocí Catalanových čísel úplný. Jejich formulace a důkaz, že řešení je dáno Catalanovými čísly, jsou natolik složité a formálně komplikované, že je jejich zařazení do výuky na VŠ diskutabilní (vhodné pouze pro nejnadanější matematiky). Z toho důvodu oba poslední problémy popíšeme jen intuitivně, bez nároku na formální přesnost.

### 2.6.1 Problém podání rukou

Počet způsobů, jak si může  $2n$  osob nad stolem podat ruce tak, aby se žádné dvě ruce nekřížily, je určen Catalanovým číslem  $c_n$ . Řeší se obdobným způsobem jako problém rozdělení konvexního  $n$ -úhelníka.

### 2.6.2 Stavba schodiště

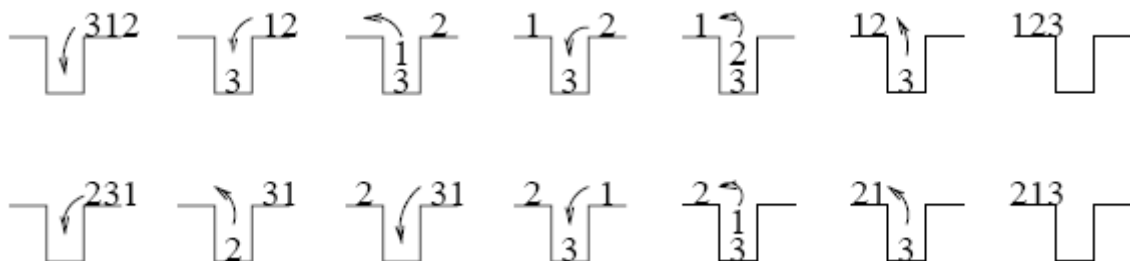
Představme si, že máme poradit stavební firmě, jak postavit schodiště s  $n$  schody z panelů různých rozměrů (příčemž veškerý prostor pod schodištěm musí být vyplněn). Schodiště není točité a všechny schodové stupně jsou stejně vysoké. Abstrahujeme-li od reálné podstaty problému a podíváme se na něj z matematického hlediska, zjistíme že počet možností stavby schodiště s  $n$  schody je dán Catalanovým číslem  $c_n$ . Situaci pro 4 schody zachycuje následující obrázek (převzat ze [4]) – jedná se o pohled z boku.



### 2.6.3 Počet permutací seřaditelných pomocí zásobníku

Z teorie programování je známý pojem zásobníku (typ paměti LIFO – Last In First Out). Definujme nyní „přerovnávání“ permutací pomocí tohoto zásobníku. Využijeme intuitivní definici (na formálně přesnou definici zde není dosti prostoru), při níž budeme sledovat následující obrázek (převzat ze [14]). Necht' je dána libovolná permutace množiny  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Tuto permutaci napíšeme na vstup zásobníku (pravá strana), výstup zásobníku (vlevo) je prázdný. Čísla ze vstupu potom přes zásobník přemístíme na výstup podle těchto pravidel:

- Je-li zásobník prázdný nebo je-li první prvek vstupu menší než nejvyšší prvek zásobníku, potom první prvek vstupu vložíme do zásobníku jako nový nejvyšší prvek.
- Je-li vstup prázdný nebo je-li první prvek vstupu větší než nejvyšší prvek zásobníku, potom nejvyšší prvek zásobníku přemístíme jako poslední prvek výstupu zásobníku.



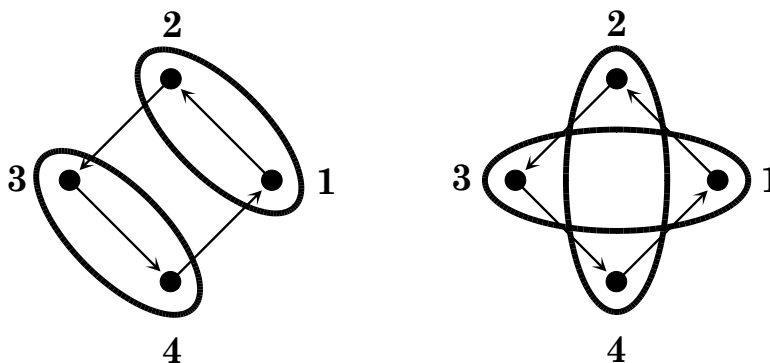
Po konečném počtu kroku se takto čísla  $1, 2, \dots, n$  přemístí ze vstupu na výstup. Původní pořadí těchto čísel na vstupu se ale nemusí zachovat. Jestliže „nová“ permutace na výstupu je tzv. základním pořadím  $(1, 2, \dots, n)$ , kdy jsou čísla seřazena podle velikosti vzestupně, nazveme původní permutaci na vstupu jako seřaditelnou zásobníkem (i v ČR se užívá anglický název stack-sortable). Na obrázku, který jsme sledovali v průběhu definice, je vidět, že pro  $n = 3$  je permutace (312) stack-sortable, zatímco permutace (231) nikoliv.

Problémem je nyní zjistit počet permutací  $n$ -prvkové množiny, které jsou stack-sortable. Lze dokázat, že tento počet permutací je určen Catalanovými čísly  $c_n$ ; např. pro  $n = 3$  je celkový

počet permutací 6, zatímco  $c_3 = 5$ . Pro  $n = 3$  tedy existuje jediná permutace, která není stack-sortable; touto permutací je už zmíněná permutace (231).

### 2.6.4 Počet nekřížitelných rozkladů

Posledním problémem je určení počtu “nekřížitelných” rozkladů (anglicky noncrossing) konečné, cyklicky uspořádané, množiny o  $n$  prvcích. Necht' na konečné množině o  $n$  prvcích je definována cyklická permutace; na uzlovém grafu této permutace necht' jsou prvky množiny znázorněny jako vrcholy pravidelného  $n$ -úhelníka. Mějme dán nějaký rozklad této množiny. Graficky nyní znázorníme (ohraničíme) všechny bloky rozkladu pomocí oválů. Mohou nastat dva případy: buďto se některé ovály protnou (přesněji řečeno překrývají) nebo nikoliv. V kladném případě se rozklad nazývá křížitelný (crossing), jinak je nekřížitelný (noncrossing). Na následujícím obrázku je znázorněn příklad množiny  $\{1, 2, 3, 4\}$ , uspořádané cyklicky permutací  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$  a dvou jejích rozkladů. Rozklad  $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$  je nekřížitelný, zatímco rozklad  $\{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$  je křížitelný.



Problém zní: Kolik existuje nekřížitelných rozkladů  $n$ -prvkové množiny, např.  $\{1, 2, \dots, n\}$ ? Na uspořádání prvků nezáleží, pro každou cyklickou permutaci je tento počet stejný. Lze opět ukázat (viz [11]), že tento počet je určen Catalanovým číslem  $c_n$ . Např. pro  $n = 4$  je počet všech rozkladů 15 (tzv. Bellovo číslo  $B_4$ ), zatímco  $c_4 = 14$ . Pro základní cyklickou permutaci  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$  množiny  $\{1, 2, 3, 4\}$  je tedy jediný křížitelný rozklad  $\{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$ .

## 3 Závěr

Ukázali jsme deset problémů, při jejichž řešení se objevují Catalanova čísla, a to jak problémů jednodušších, tak i poměrně složitých. Ukazuje se, že Catalanova čísla, ačkoliv nejsou základním obsahem učiva matematiky, se dotýkají řady oblastí matematiky (kombinatorika, teorie vytvářejících funkcí, teorie rozkladů,...). Proto lze konstatovat, že jejich zařazení do výuky (nebo jako námět k samostatné tvůrčí práci studentů) je vhodné, a to jak na střední škole, tak i na školách vysokých. Ve všech případech přináší řešení těchto problémů nové pohledy na kombinatoriku, což přispívá k jejímu hlubšímu pochopení u studentů. V literatuře (např. ve [3], [4], [9], [11], [12]) lze přitom nalézt další problémy, související s Catalanovými čísly (např.



výpočet Catalanových čísel z Pascalova trojúhelníka, speciální determinanty, jejichž prvky jsou Catalanova čísla apod.). To však již přesahuje rozsah tohoto příspěvku.

### Literatura

1. BERÁNEK, JAROSLAV. *Catalanova čísla a jejich užití*. In: Sborník příspěvků ze XXVI. vědeckého kolokvia. Brno, Univerzita obrany 2008. ISBN 978-80-7231-511-6.
2. ČERNÝ, JAKUB. *Vytvořující funkce*. Pomocný studijní text. Praha: Univerzita Karlova. Dostupné z [http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/~kuba/programy\\_referaty/seznam.html](http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/~kuba/programy_referaty/seznam.html). Datum citace 12. 2. 2013.
3. DICKAU, ROBERT M. *Catalan numbers*. In: <http://mathforum.org/>, Drexel University, 1996-1997, Dostupné z <http://mathforum.org/advanced/robertd/catalan.html>. Citováno dne 14. 2. 2013.
4. DICKAU, ROBERT M. *Catalan numbers*. In: wikipedia, poslední verze 16. 2. 2008. Dostupné z [http://en.wikipedia.org/wiki/Catalan\\_number](http://en.wikipedia.org/wiki/Catalan_number), citováno dne 14. 2. 2013.
5. FUCHS, EDUARD. *Diskrétní matematika a Teorie množin pro učitele (CD-ROM)*. Brno : Masarykova univerzita, 2000. 890 s. Matematika na CD-ROM, sv. 2. ISBN 80-210-2463-1.
6. KOUCKÝ, MIROSLAV. *Diskrétní matematika II*. Liberec: Technická univerzita, 2004. 116 s. (učební text)
7. MELUŠOVÁ, JANKA. *Využití Catalanových čísel vo vyučování kombinatoriky*. In Sborník příspěvků z mezinárodní vědecké konference - Matematika v škole dnes a zajtra. 1. vyd. Ružomberok : Katolícká Univerzita, 2005. s. 43-47. ISBN 80-8084-066-0.
8. NEŠETŘIL, JAROSLAV. *Kombinatorika*. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1975. 160 s. r79U.
9. NEŠETŘIL, JAROSLAV. *Teorie grafů* 1. vyd. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1979. 316 s.
10. PRAŽSKÝ KORESPODENČNÍ SEMINÁŘ. Ročník 2007-2008, komentáře k 1. části, 16. 1. 2008. Dostupné z <http://mks.mff.cuni.cz/commentary/C/komentar3/komentar3.ps>, citováno 4. 2. 2013.
11. SIMION, RODICA. *Noncrossing partitions*. Discrete Mathematics, volume 217, numbers 1-3, pages 367-409, April 2000.
12. STANLEY, RICHARD, WEISSTEIN, ERIC W. *Catalan Number*. From [MathWorld](http://mathworld.wolfram.com/CatalanNumber.html), A Wolfram Web. Dostupné z <http://mathworld.wolfram.com/CatalanNumber.html>, citováno 17. 2. 2013.
13. VILENKIN, NAUM JAKOVLEVIČ. *Kombinatorika* 1. vyd. Praha : Státní nakladatelství technické literatury, 1977. 298 s. Polytechnická knihovna. II. řada, Příručky; sv. 74. r77.
14. ZARA, CATALIN. *Parking functions, stack-sortable permutations, and spaces of paths in the Johnson graph*. In: The electronic journal of combinatorics 9(2) (2003), #R11. New Haven: Yale University, Dept. of Math., 2003, 11 s. Dostupné z [http://www.combinatorics.org/Volume\\_9/PDF/v9i2r11.pdf](http://www.combinatorics.org/Volume_9/PDF/v9i2r11.pdf), citováno 9. 2. 2013.

Jaroslav Beránek

**Doc. RNDr. Jaroslav Beránek, CSc.**  
**Pedagogická fakulta, Masarykova univerzita**  
**Poříčí 7, 603 00 Brno, Česká republika**  
[beranek@ped.muni.cz](mailto:beranek@ped.muni.cz)