



## ANALYTICKÁ A SYNTETICKÁ GEOMETRIA VO VYUČOVANÍ MATEMATIKY

## ANALYTIC AND SYNTHETIC GEOMETRY IN TEACHING MATHEMATICS

Michaela Holešová

**Abstract:** In this article, we devote two basic approaches to the study of geometric objects and namely to synthetic and analytical methods. In teaching geometry we meet with these methods by synthetic geometry (plane geometry and solid geometry) and analytic geometry. Due to educational reform and the information age we are dealing with their advantages in the learning process in teaching mathematics, and their mutual relations, which in our opinion it is necessary to develop as much as possible.

**Key words:** plane geometry, solid geometry, analytic geometry, analytic and synthetic methods

Hneď na úvod by sme sa mohli opýtať: Ktorú z geometrií pri vyučovanom procese uprednostniť? Veríme, že odpoveď nájde čitateľ v tomto článku. Vznik analytickej a syntetickej geometrie dali v podstate dva základné prístupy štúdia geometrických objektov a to *syntetická metóda*, ktorú založil a naplno rozvinul Euklides asi 300 rokov p. n. l. vo svojom rozsiahlom diele *Základy a analytická metóda*, ktorej objav sa spája hlavne s menom René Descartes a jeho kniha *Geometria* vydaná v 17. st. n. l. dala základ analytickej geometrie.

**Syntetická geometria** je časťou geometrie, ktorá skúma geometrické útvary a ich vlastnosti v euklidovskej geometrii pomocou syntetických metód, vo vyučovaní ide o planimetriu a stereometriu.

*Syntetická metóda* je prístup skúmania geometrických objektov založený na ich základných geometrických vlastnostiach a ich vzájomných vzťahoch daných axiómami, pracuje sa so samotnými geometrickými objektmi.

**Analytická geometria** je časťou geometrie, ktorá skúma geometrické útvary a ich vlastnosti v euklidovskej geometrii pomocou analytických metód.

*Analytický metóda* používa aparát založený na algebre a aritmetike s využitím možnosti matematického vyjadrenia geometrických objektov, vzťahov a operácií algebrickými prostriedkami, nepracuje sa so samotnými geometrickými objektmi, ale s ich algebrickou reprezentáciou.

Priamo z definície vidíme, že tieto metódy sú značne odlišné. Každá má však svoje veľké výhody v edukačnom procese vo vyučovaní geometrie, a teda aj matematiky.

## Analytická a syntetická geometria vo vyučovaní matematiky

Pri oboch týchto metódach musíme mať na pamäti, že hlavným princípom stratégie učiteľovej práce vo vyučovaní matematiky je nielen naučiť, ale dôležitejšie ako odovzdávanie vedomostí je formovanie osobnosti žiaka, teda cieľom práce učiteľa sú kvalitatívne zmeny psychiky žiaka. Kritériá, ktorými je tento proces hodnotený sú: sebadôvera žiaka vo vlastné schopnosti myslenia, túžba žiaka po poznávaní, dosiahnutý stupeň rozvoja myslenia. Vyslovený princíp má dialektický charakter, akcentuje dynamickosť genézy myslenia a ukazuje rozhodujúci vplyv kvality citového vzťahu žiaka k matematike. Dobrý citový vzťah je daný vnútornou motiváciou, rozporom medzi jeho vedomosťami a túžbou vedieť viac. (Hejný, [1])

Preto si myslíme, že pre naplnenie tejto stratégie vo vyučovaní na základnej škole je vhodnejší syntetický prístup pre jeho možnosť názornosti, čo je pre študentov veľmi dôležité, pretože vedú pracovať s objektmi, ktoré si vedú predstaviť alebo zakresliť. Preto v nižších ročníkoch je dôležité venovať väčšiu pozornosť vyučovaniu syntetickej geometrie. K abstrakcii sa študenti dostávajú až vo vyšších ročníkoch, čo je podmienené aj ich samotným vývojom. Analytickú geometriu je teda vhodnejšie vyučovať vo vyššom veku a to na stredných a vysokých školách, kde už je určitý predpoklad k tomu, že študenti dokážu zovšeobecňovať a nemajú problém s abstrakciou.

To ale nevylučuje možnosť, aby sa študenti nižších ročníkov oboznámili aspoň zo základnými princípmi analytickej metódy napríklad dôslednou prácou s využívaním štvorcového papiera. Zastávame názor, že vo vyšších ročníkoch by sa nemali tieto metódy učiť úplne oddelene, pretože iba veľmi malá skupina študentov potom dokáže nájsť prepojenie a vzájomné súvislosti medzi nimi. Na stredných a hlavne na vysokých školách by malo ísť o prepojenie týchto prístupov.

Je pravdou, že ak pri koncepcii výučby analytickej geometrie využívame geometrický prístup, teda analytická geometria je metóda skúmania a popisovania geometrických javov, reprezentant vektora je orientovaná úsečka, tak v tomto prípade dochádza k vzájomnému prepojeniu analytickej metódy so syntetickou. Preto zastávame názor, že táto koncepcia vyučovania analytickej geometrie je vhodnejšia než vyučovanie s využitím algebrického prístupu, kde analytická geometria je štúdium lineárnych štruktúr, z ktorých niektoré možno aj znázorniť.

Táto koncepcia je vhodnejšia aj preto, že už aj počas vyučovania iných častí matematiky dochádza ku využitiu geometrických modelov na znázornenie aritmetiky. Napríklad sčítanie, násobenie a delenie zlomkov interpretujeme na geometrických modeloch a to kruhu (torty), obdĺžnika (čokolády) a úsečky (tyče).

Avšak chýba hlbšia cesta prepojenia syntetickej metódy s analytickou. Nakoľko pri vyučovaní stereometrie, či planimetrie nevytvoríme analytickú metódu, maximálne sa aparát aritmetiky využíva v kalkulatívnej stereometrii, či planimetrii, kde sa obmedzuje na výpočet objemov a povrchov telies, či výpočet obsahov a obvodov rovinných útvarov a meranie vzdialeností a uhlov.

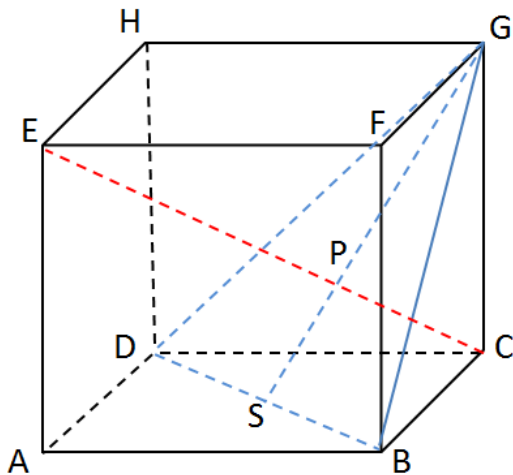
Vyvstáva otázka, kedy začať so vzájomným prepájaním týchto prístupov. Myslíme si, že by bolo postačujúce študentom po zvládnutí učiva zo syntetickej a analytickej geometrie ešte hlbšie ukázať ich vzájomné súvislosti. Iba poznamenávame, že vo vzdelávaní učiteľov by mali mať obe metódy vyvážené zastúpenie.

Vzhľadom na koncepciu učebného plánu učiteľských odborov by takéto riešenie bolo možné, nakoľko po zvládnutí analytickej geometrie sa venuje syntetickej geometrii. A práve tu by bolo vhodné študentom ukázať, že aj v rámci syntetickej geometrie sa dá použiť analytická metóda v geometrii, pretože práve táto cesta prepojenia jednotlivých prístupov sa takmer vôbec

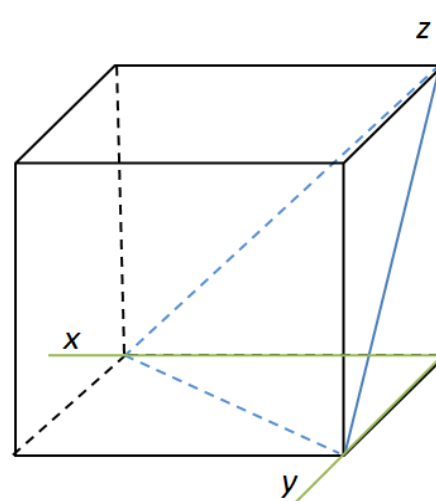
nevyučuje. Vzhľadom na našu učiteľskú prax si myslíme, že by stačilo toto ukázať formou príkladov. Tým by sa študenti vedeli na geometrický problém pozerat' komplexnejšie. Môžeme to ilustrovat' na nasledujúcom príklade, ktorý dokazuje, že je to realizovateľné.

**Príklad**

Je daná kocka  $ABCDEFGH$ . Určte vzdialenosť vrcholu kocky  $C$  od roviny  $\alpha = \overline{BDG}$ . Študenti si nakreslili obrázky vo voľnom rovnobežnom premietaní:

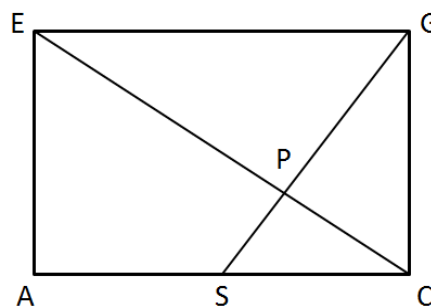


Obr. 1a)



Obr. 1b)

Jedna skupina študentov riešila celú úlohu klasicky, pomocou syntetickej metódy, kde úlohu previedli na planimetrickú úlohu (Obr. 1a), Obr. 2) a využitím Euklidovej vety o odvesne zistili vzdialenosť bodu  $C$  od roviny  $\alpha$ . Na rozdiel od tých, čo použili analytickú metódu, bol pre nich dosť náročný dôkaz toho, že bod  $P$  je hľadaná päta kolmice prechádzajúcej bodom  $C$  vzhľadom na rovinu  $\alpha$ , t.j.  $|PC| = |C, \alpha|$ .



Obr. 2

Druhá skupina študentov si zvolila karteziánsku súradnicovú sústavu ako je vidieť na obrázku 1b).

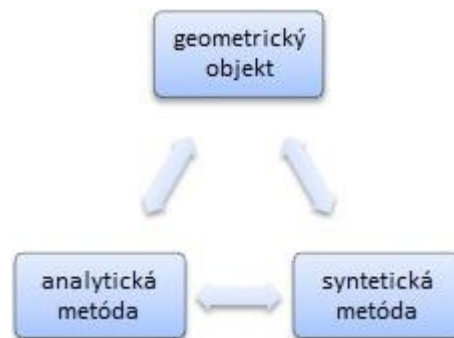
Určila si súradnice určujúcich prvkov, vypočítala súradnice smerových vektorov roviny  $\alpha$ , určila normálový vektor roviny  $\alpha$ . Nemali problém s vyjadrením všeobecnej rovnice tejto roviny a následne už použili viacero možných riešení zadanej úlohy. Napríklad priamo vypočítali vzdialenosť bodu  $C$  od roviny  $\alpha$  podľa známeho vzťahu, ale našli sa aj takí, ktorí určili bod  $P$

## Analytická a syntetická geometria vo vyučovaní matematiky

ako priesečník priamky  $CE$  (priamky kolmej na rovinu  $\alpha$  a prechádzajúcej bodom  $C$ ) s rovinou  $\alpha$ . Vzdialenosť bodu  $C$  od roviny  $\alpha$  potom určili pomocou veľkosti vektora  $\vec{PC}$ .

Študenti túto úlohu riešili uvedenými spôsobmi po tom, ako im bolo prezentované, ako je možné analytickú metódu využiť priamo v syntetickej geometrii.

Rovnako je pri vyučovaní analytickej geometrie dôležité, aby študenti počas celého procesu riešenia úlohy mali k algebraickým objektom a operáciám priradené geometrické objekty a operácie. Cieľom každého učiteľa matematiky by malo teda byť, aby študenti vedeli pracovať s geometrickými objektmi aj pomocou algebraického aparátu a naopak, ako môžeme znázorniť na nasledujúcej schéme:



Momentálne je však taká situácia, že analytická metóda sa z vyučovania na stredných školách pomaly, ale zaiste vytráca, čo je veľká škoda, pretože má taktiež mnohé výhody.

Aj keď nie je názorná ako syntetická metóda a nemôžeme ňou budovať geometrickú a priestorovú predstavivosť ako práve syntetickou metódou, analytická metóda má široké využitie pri riešení úloh hlavne s podporou počítačov (v počítačovej grafike). Má schopnosť obsiahnuť jedným algebraickým algoritmom celú triedu syntetických riešení, zároveň je to prostriedok na získavanie nových geometrických poznatkov a v neposlednom rade nám umožňuje skúmať vlastnosti geometrických objektov, ktoré nám syntetický prístup neumožňuje. Spresňuje a zovšeobecňuje výsledky získané syntetickou metódou.

Napríklad v článku [4] sme sa zaoberali nasledujúcou vetou:

*Každé dve kužeľosečky na ploche druhého stupňa ležia vždy na dvoch kužeľových plochách.*

Znenie tejto vety môžeme nájsť v literatúre [5], kde je aj veta dokázaná syntetickou metódou v komplexifikácii projektívneho priestoru nad poľom reálnych čísel.

My sme použitím analytických metód ukázali, že každé dve kužeľosečky na ploche druhého stupňa neležia vždy na dvoch kužeľových plochách. Analytický prístup nám umožnil spresniť syntetický výsledok z knihy [5]. My sme v [4] zistili, že ak ide o dve navzájom dotýkajúce sa regulárne kužeľosečky, tak tieto ležia práve na jednej „jednoduchej“ kužeľovej ploche, ktorá patrí do zväzku plôch druhého stupňa určeného takýmito kužeľosečkami.

Ako vidíme práve analytický prístup nám umožňuje skúmať aj také vlastnosti geometrických objektov, ktoré pri syntetickom prístupe nezistíme. Rovnako v tomto informačnom veku, práve analytický prístup umožňuje vytváranie rôznych dynamických programov na zakreslenie

a modelovanie geometrických objektov a situácií, čo následne využívame pri budovaní predstavivosti študentov, čo je hlavným cieľom pri vyučovaní geometrie syntetickým prístupom. Avšak oba tieto základné prístupy k štúdiu geometrických objektov, t.j. syntetická a analytická reprezentácia geometrických útvarov a ich vlastností sú súčasne nevyhnutné pri geometrickom modelovaní a vizualizácii s podporou počítačov.

Momentálne s reformou školstva vzniká otázka, ktoré časti učiva úplne vypustiť, kde jednotlivé celky v celkovej štruktúre predmetu umiestniť, a teda ako rozdeliť učivo do jednotlivých ročníkov. Tým, že nie je striktno určená učebná osnova, ale školy majú možnosť rozhodovať o časti učiva, ktoré sa bude vyučovať na ich škole, vznikajú veľké rozdiely medzi študentmi jednotlivých škôl. Celková koncepcia nášho školstva v súčasnosti je zameraná na väčšiu prepojitelnosť s praxou a hlavne na aplikáciu získaných poznatkov do praxe. S tým by sa mala zmeniť aj celková stratégia vo vyučovaní a nielen matematiky, teda jedným z cieľov v edukačnom procese by mala byť snaha naučiť študentov komplexne pozerat' na daný problém a s využitím všetkých poznatkov ho aj vyriešiť. To by sa mohlo podariť práve väčším prepojením spomínaných metód v rámci vyučovania geometrie.

## Záver

Na záver chceme iba dodať, že aj napriek vyššie uvedeným skutočnostiam zastávame názor, že vo vyučovaní geometrie je potrebné rozvíjať oba prístupy súčasne. Aj keď v nižších ročníkoch prevláda syntetický prístup, hlavným cieľom by malo byť, aby študenti vo vyšších ročníkoch vedeli geometrickú úlohu riešiť komplexne, využitím celého aparátu, t.j. aby tieto prístupy nemali oddelené, ale hlboko prepojené. Asi prianiím každého učiteľa geometrie, a teda aj učiteľa matematiky je, aby študenti zvládali geometrickú situáciu zakresliť a rovnako ju aj analyticky popísať a aby vedeli určiť, ktorým prístupom úlohu najjednoduchšie vyriešia.

## Literatúra

- [1] Hejný, M. a kol.: *Teória vyučovania 2*, SPN Bratislava 1990.
- [2] Holešová, M.: *Stereometria a geometrická predstavivosť*. Cieľom vyučovania matematiky je šťastný človek. Zborník recenzovaných prác, EDIS Žilina 2011
- [3] Holešová, M.: *Prečo mávajú študenti problémy s analytickou geometriou?* Zborník príspevkov Žilinskej didaktickej konferencie s medzinárodnou účasťou DIDZA, 2004
- [4] Turčanová, M.: *O singulárnych kvadrikách v niektorých zväzkoch kvadrik*. Zborník z 21. konferencie o geometrii a počítačové grafice, Lednice na Moravě 2001.
- [5] F.Kadeřávek, J.Klíma, J.Kounovský. *Deskriptivní geometrie II*. JČMF. Praha 1932.
- [6] Holešová, M.: *Analytic and Synthetic Methods in Geometry*. SVU and its role in the era of globalisation: transatlantic collaboration, innovation and preservation: 26th SVU World congress of the Czechoslovak society of arts and sciences : July 1-6, 2012 in Žilina, Slovakia 2012

Analytická a syntetická geometria vo vyučovaní matematiky

**RNDr. Michaela Holešová, PhD.**  
**FHV ŽU v Žiline, Univerzitná 8215/1,010 26 Žilina,**  
**[michaela.holesova@fhv.uniza.sk](mailto:michaela.holesova@fhv.uniza.sk)**

Tento článok vznikol za podpory grantového projektu s názvom:  
*„Informačný vek modifikuje metódy a formy vyučovania matematiky“*  
(MŠVVaŠ SR KEGA 046ŽU-4/2011)