REZULTANT POLYNOMŮ

RESULTANT OF POLYNOMIALS

Jaroslav Hora

Abstract: The article contains a motivating problem that introduces a concept of a resultant and deals with its use in solving systems of algebraic equations.

Key words: Resultant of polynomials. J. J. Sylvester. The Sylvester Matrix. Solving Systems of Non-Linear Polynomial Equations.

Motivační příklad

Začněme ilustračním příkladem: *Pro která reálná čísla p mají rovnice* $x^2 - 5x - 6p = 0$ *a* $x^2 + 5x + p + 2 = 0$ *společný kořen?* (soutěž RMF o ceny, roč. 75, 1998, č. 6, str. 290).

Při řešení této úlohy se nabízí několik postupů. Středoškolský student by možná nejprve vypočítal kořeny $x_1 = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{25+24p}}{2}$, $x_2 = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{25+24p}}{2}$ první rovnice, resp. kořeny $x_3 = -\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{25-4(p+2)}}{2}$, $x_4 = -\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{25-4(p+2)}}{2}$ druhé rovnice. Pak by mohl zjistit, kdy nastane některý z případů I. – IV., kde I. $x_1 = x_3$, II. $x_1 = x_4$, III. $x_2 = x_3$, IV. $x_2 = x_4$. Postupně se nahlédne, že rovnice (v parametru p) I. a II. nemají řešení, III. platí pro $p = \frac{26}{49}$ a vztah IV. nastane pro $p = 4$. Můžeme tedy konstatovat, že rovnice $x^2 - 5x - 6p = 0$ a $x^2 + 5x + p + 2 = 0$ mají společný kořen pro hodnoty parametru $p = \frac{26}{49}$ a $p = 4$.

1 Sylvesterova matice a rezultant

Je však dobré se obeznámit s jedním užitečným pojmem. Jeho autorem je anglický matematik viktoriánské doby James Joseph Sylvester (1814 – 1897).

Definice: Nechť $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ a $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0$ jsou dva polynomy z T[x] , kde T je komutativní těleso. Sylvesterovou maticí polynomů $f(x)$, $g(x)$ nazýváme matici

$$\mathrm{Syl}(f, g) = \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & . & . & a_0 & . & . & . \\ . & a_n & a_{n-1} & . & . & a_0 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & a_n & a_{n-1} & . & . & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & . & . & b_0 & . & . & . \\ . & b_m & b_{m-1} & . & . & b_0 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & b_m & b_{m-1} & . & . & b_0 \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Jde o čtvercovou matici typu ($m + n$, $m + n$), mající v prvních m řádcích koeficienty a_i , $i = n, n -1, ..., 0$ polynomu f, vždy však „posunuté o jedno místo vpravo“ a obdobně v dalších n řádcích matice se vyskytují koeficienty b_j, $j = m, m - 1, ..., 0$. (V „neobsazených místech“ matice se píší nuly).

Jinak řečeno, prvních m řádků matice odpovídá polynomům $x^{m-1}. f(x)$, $x^{m-2}. f(x)$,...$x\ f(x)$, $f(x)$ a dalších n řádků matice polynomům $x^{n-1}.g(x)$, $x^{n-2}. g(x)$,..., $x. g(x)$, $g(x)$.

Definice: Rezultantem $\mathrm{res}_x(f(\mathrm{x}), g(\mathrm{x}))$ polynomů f, g se nazývá determinant Sylvesterovy matice.

Platí následující

Věta (Sylvesterovo kritérium):

Nechť $f(x)$, $g(x)$ jsou dva polynomy kladných stupňů. Polynomy $f(x)$, $g(x) \in \mathrm{T}[x]$ jsou dělitelné nekonstantním společným dělitelem v $\mathrm{T}[x]$ právě tehdy, když $\mathrm{res}_x (f(x), g(x)) = 0$.

Nyní vidíme, že se otevřela ještě jedna cesta, jak vyřešit shora uvedený příklad. Vypočtěme rezultant polynomů $f(x) = x^2 - 5x - 6p$ a $g(x) = x^2 + 5x + p + 2$:

$$\mathrm{R}(p) = \begin{vmatrix} 1 & -5 & -6p & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -6p \\ 1 & 5 & p+2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & p+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & -6p \\ 5 & p+2 & 0 \\ 1 & 5 & p+2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -5 & -6p & 0 \\ 1 & -5 & -6p \\ 1 & 5 & p+2 \end{vmatrix} =$$

$= (p+2)^2 - 150p + 6\ p\ (p + 2) + 25(p + 2) + 25(\mathrm{p} + 2) + 36\ p^2 - 150\ p + 6\ p\ (\mathrm{p} + 2) =$
$= 49\ p^2 - 222\ \mathrm{p} + 104$.

Rovnice $49\ p^2 - 222\ \mathrm{p} + 104 = 0$ má dva kořeny, a to $p_1 = 4$, $p_2 = \frac{26}{49}$. Pro $p_1 = 4$ má první rovnice $x^2 - 5x - 24 = 0$ kořeny $x_1 = -3$ a $x_2 = 8$, druhá rovnice $x^2 + 5x + 6 = 0$ kořeny $x_3 = -3$ a $x_4 = -2$, tedy kořen -3 je společný. Pro $p_2 = \frac{26}{49}$ má první rovnice $x^2 - 5x - \frac{124}{49} = 0$ kořeny $x_1 = -\frac{4}{7}$ a $x_2 = \frac{39}{7}$, druhá rovnice $x^2 + 5x + \frac{124}{49} = 0$ kořeny $x_3 = -\frac{4}{7}$ a $x_4 = -\frac{31}{7}$. Nyní jsme ověřili, že kořen $-\frac{4}{7}$ je společný.

2 Řešení soustav nelineárních algebraických rovnic

Rezultantu se v anglicky psané matematické literatuře říká eliminant. Důvody budou zřejmé z dalšího.

Budiž dána soustava polynomiálních rovnic

$$f(x, y) = a_n(y)\, x^n + a_{n-1}(y)\, x^{n-1} + \ldots + a_0(y) = 0$$
$$g(x, y) = b_m(y)\, x^m + b_{m-1}(y)\, x^{m-1} + \ldots + b_0(y) = 0. \qquad (2)$$

Předpokládejme, že $[x_0, y_0]$ je řešením soustavy (2). Potom rovnice o jedné neznámé x

$$\bar{f}\,(x) = a_n(y_0)\, x^n + a_{n-1}(y_0)\, x^{n-1} + \ldots + a_0(y_0) = 0$$
$$\bar{g}\,(x) = b_m(y_0)\, x^m + b_{m-1}(y_0)\, x^{m-1} + \ldots + b_0(y_0) = 0$$

mají společný kořen x_0. Musí proto být $\mathrm{res}_x(\bar{f}, \bar{g}) = 0$. Řešení soustavy (2) proto zahájíme výpočtem rezultantu $\mathrm{res}_x(f(x, y), g(x, y))$, načež obdržíme polynom $R(y)$ takový, že $R(y_0) = 0$. (V této fázi řešení soustavy (2) se proměnná x jakoby „ztratila“, byla eliminována). Pro každý kořen y_0 je pak zapotřebí zjistit, zda mají polynomy $\bar{f}\,(x)$ a $\bar{g}\,(x)$ společný kořen.

Příklad: Nalezněte všechna řešení soustavy

$$x^2 y^2 - y^4 + 3\,y = 6$$
$$x\,y + y^2 - 2\,y = 4.$$

Řešení: Je $R(y) = \mathrm{res}_x(f, g) = \begin{vmatrix} y^2 & 0 & -y^4+3y-6 \\ y & y^2-2y-4 & 0 \\ 0 & y & y^2-2y-4 \end{vmatrix} = y^2.\left(y^2-2y-4\right)^2 +$

$+\,y^2\left(-y^4+3y-6\right) = -\,y^2\left(4y^3+4y^2-19y-10\right) = -\,y^2(y-2)\,(2y+1)\,(2y+5)$. Tím je provedena eliminační fáze řešení a zjišťujeme, že polynom $R(y)$ má kořeny $y_1 = y_2 = 0$, $y_3 = 2$, $y_4 = -\frac{1}{2}$, $y_5 = -\frac{5}{2}$. Očekáváme, že do množiny řešení P shora uvedené soustavy budou patřit uspořádané dvojice tvaru $[*,\ 0]$, resp. $[*,\ 2]$, resp. $\left[*,\ -\frac{1}{2}\right]$, resp. $\left[*,\ -\frac{5}{2}\right]$, kde hvězdička zastupuje zatím neurčenou x–ovou souřadnici řešení. Začněme druhou dvojicí: $y_0 = 2$, polynomy $\bar{f}\,(x) = f\,(x, y_0) = 4\,x^2 - 16$ a $\bar{g}\,(x) = g\,(x, y_0) = 2\,x - 4$ mají společný kořen $x_0 = 2$, tj. do oboru pravdivosti P bude patřit dvojice $[2,\ 2]$. Analogicky obdržíme dvojice $\left[-\frac{11}{2},\ -\frac{1}{2}\right]$ a $\left[\frac{29}{10},\ -\frac{5}{2}\right]$. Žádná dvojice tvaru $[*,\ 0]$ se ale v oboru pravdivosti P neobjeví – pro $y_0 = 0$ dostáváme konstantní polynomy $\bar{f}\,(x) = f(x, y_0) = -6$ a $\bar{g}\,(x) = g(x, y_0) = -4$. V tomto případě jsme tedy prověřovali „falešnou stopu“. Teorie říká, že se to stane právě tehdy, když $a_n(y_0) = b_m(y_0) = 0$. Celkem tedy $P = \left\{\ [2,\ 2], \left[-\frac{11}{2},\ -\frac{1}{2}\right], \left[\frac{29}{10},\ -\frac{5}{2}\right]\ \right\}$. Poznamenejme, že kromě Sylvesterovy dialytické metody má matematika poslední třetiny 20. století k dispozici snad ještě elegantnější metodu Gröbnerových bází.

Rezultant polynomů je pojem, který výrazně nabyl na významu v souvislosti s rozšířením různých programů počítačové algebry (Maple®, Mathematica® atd.). Je podstatnou složkou v mnoha algoritmech užívaných v těchto programech. Objevuje se kupř. při počítačové integraci ryze lomené racionální funkce (tzv. logaritmická část výsledku, Rothsteinova věta). Rezultant se mj. výhodně využije v tzv. Gosperově sumačním algoritmu a nachází ještě mnohá další využití v programech počítačové algebry.

Záver

Nakonec uveďme několik úloh, které by mohly sloužit jak k tréninku kupř. řešitelů MO v „ručním“ počítání, tak i k experimentování s počítačovými programy :

Úloha 1: $x^3 + y^3 = 19$

$(x.y + 8)\,(x + y) = 2.$

Úloha 2: $x^3 + 2\,y = 6\,x$

$y^3 + 2\,x = 6y.$

Úloha 3: $x^2 + \mathrm{y}^2 + x + \mathrm{y} = 8$

$x + y + x.y = 5.$

Úloha 4: $(x.y + 2)\,(x + y) = 12$

$x^3 + y^3 = 9.$

Úloha 5: $x^3 + x\,y^2 = 10$

$y^3 + x^2\,y = 5.$

Literatúra

COX, D., LITTLE, J., O´SHEA, D.: Ideals, Varieties, and Algorithms. Springer Verlag, 1997.

ERNESTOVÁ, M.: Soustavy algebraických rovnic. Učitel matematiky 10 (2001/2002), č. 4(44), 193-208.

VON ZUR GATHEN, J., BERNARD, J.: Modern Computer Algebra. Cambridge University Press, 2003.

DOC. JAROSLAV HORA, CSC.
KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNCKÉ VÝCHOVY FPE ZČU PLZEŇ
HORAJAR@KMT.ZCU.CZ
HTTP://WWW.PEF.ZCU.CZ/PEF/KMT/CZ/PO/HORAJAR