Informačný vek modifikuje metódy a formy vyučovania matematiky

MOTIVAČNÉ ASPEKTY MATEMATICKÉHO MODELOVANIA

MOTIVATIONAL ASPECTS OF MATHEMATICAL MODELING

Norbert Kecskés

Abstract: Mathematical modeling belongs to basic theoretical cognitive methods. It is based on supplementation of real objects and phenomena by a model object or phenomenon. The created model, depending on the level of resolution, represents the studied object so that the information obtained from its examination is considered to be equivalent with that which would have been obtained from the study of the original object. In the paper we mention some differential equations which we used to create simple models in order to motivate students.

Key words: modeling, differential equations, education

Úvod

Matematický model nejakého javu alebo systému je v podstate taký istý, ako akýkoľvek iný typ modelu. Pri jeho konštrukcii je potrebné uvedomiť si, že úlohou nie je vytvoriť exaktnú kópiu skutočného objektu (čo exaktne ani nebýva možné), ale podať reprezentáciu určitého aspektu správania sa, resp. vlastnosti tohto objektu. Konštrukcia matematického modelu pozostáva väčšinou z týchto krokov:
1. identifikácia a špecifikácia jednotlivých veličín a premenných, ktoré zodpovedajú za správanie sa systému,
2. určenie vzájomných vzťahov medzi týmito veličinami a premennými na základe všeobecne platných, resp. empirických zákonov a následná matematická formulácia problému,
3. matematické riešenie problému a následná interpretácia výsledkov.
Je samozrejmé, že model je korektný vtedy, keď výsledky získané jeho štúdiom a interpretáciou sú konzistentné s pozorovaním, experimentom, resp. so všeobecne známymi faktami o správaní sa študovaného systému. Poznamenajme ešte, že pri konštrukcii matematického modelu sme častokrát nútení zaviesť rôzne predpoklady za účelom zjednodušenia matematického riešenia daného problému.

Materiál a metódy

Výučba diferenciálnych rovníc je súčasťou učebných osnov predmetu Matematika 2 na Technickej fakulte SPU v Nitre. Študenti sa v rámci tohto predmetu oboznamujú so základnými typmi diferenciálnych rovníc, ktoré sú riešiteľné v podstate algoritmicky. Ide o separovateľné, homogénne a lineárne rovnice, resp. také rovnice, ktoré sa na tieto typy dajú previesť pomocou jednoduchej úpravy alebo substitúcie. Cieľom je, aby študenti zvládli základné metódy a techniku riešenia týchto rovníc. V tejto súvislosti sme sa často stretávali s otázkami typu „načo je to dobré“, “kde sa to dá využiť“ a pod. Vzhľadom k týmto otázkam študentov, týkajúcich sa opodstatnenosti učiva o diferenciálnych rovniciach, sme sa rozhodli týmto problémom bližšie zaoberať.

Výsledky a diskusia

Na základe vyššie uvedených otázok zo strany študentov sme sa rozhodli učivo o diferenciálnych rovniciach doplniť o tvorbu jednoduchých matematických modelov, vzhľadom k tomu, že najčastejším nástrojom matematického modelovania sú práve diferenciálne rovnice, resp. systémy týchto rovníc. V prípade, že argumentom hľadanej funkcie je čas, diferenciálne rovnice popisujú modely dynamických systémov, teda systémov, ktoré sa vyvíjajú v čase. V matematických modeloch popisovaných diferenciálnymi rovnicami vystupujú okrem hľadanej funkcie a jej argumentu (argumentov) aj tzv. parametre. Práve obmenou týchto parametrov možno skúmať rôzne aspekty správania sa daného modelu.
Ďalej uvedieme niektoré diferenciálne rovnice, ktoré sú súčasťou učebných osnov, a ktoré sme použili pri konštrukcii jednoduchých matematických modelov:

1. $\dfrac{dP}{dt} = k \cdot P,\ P(t_0) = P_0$.

Táto rovnica hovorí, že zmena veličiny P je v každom časovom okamihu úmerná hodnote tejto veličiny. Riešením dostávame funkciu, ktorá popisuje exponenciálny rast, resp. pokles danej veličiny. Pomocou tejto rovnice je možné študovať napríklad populačné modely, ako to prvý krát urobil anglický ekonóm Thomas Malthus pri predpovedaní demografického vývoja populácie v USA. Model dáva konzistentné výsledky so skutočnosťou v relatívne krátkych časových intervaloch. Pri dlhodobejších prognózach je potrebné v danej rovnici zohľadniť faktory, ktoré ovplyvňujú časový vývoj populácie, ako sú napr. natalita, mortalita, emigrácia, imigrácia a pod. Riešením takto modifikovanej rovnice by sme dostali rôzne ďalšie populačné modely, ako sú napr. logistický model, Gompertzov model, demografický model a iné. Poznamenajme, že táto istá rovnica sa dá použiť aj pri popise modelu bakteriálneho rastu, rádioaktívneho rozpadu, chemickej reakcie I. rádu, príp. spojitého úrokovania.

2. $\dfrac{dT}{dt} = k \cdot (T - T_m),\ T(t_0) = T_0$.

Rovnica charakterizuje Newtonov empirický zákon ochladzovania, resp. ohrievania telesa v prostredí s konštantnou teplotou T_m. Z jej riešenia je napr. možné určovať čas, za ktorý dané teleso ochladne (zohreje sa) na požadovanú teplotu.

3. $\dfrac{dx}{dt} = k \cdot x \cdot y,\ x(t_0) = 1$.

Túto rovnicu je možné použiť pri modelovaní šírenia sa infekčnej choroby, ak predpokladáme, že rýchlosť $\frac{dx}{dt}$ šírenia sa tejto choroby je úmerná nielen počtu nakazených jedincov $x(t)$, ale aj počtu jedincov $y(t)$, ktorí ešte s chorobou neprišli do styku. Zrejme platí $x + y = n + 1$, kde n je celkový počet jedincov v danej komunite.

4. $y'' + a_1 y' + a_2 y = F(t),\ y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y_1.$

V tomto prípade ide o diferenciálnu rovnicu druhého rádu s konštantnými koeficientmi, pomocou ktorej je možné modelovať rôzne fyzikálne deje, ako napríklad pohyb hmotného bodu v prostredí s odporom, ďalej rezonanciu, priebeh prúdu v RLC obvodoch a mnohé ďalšie. Veľmi zaujímavým pre študentov sa ukázalo modelovanie bungee jumpingu pomocou tejto rovnice, resp. experimentálne overenie platnosti Newtonovho zákona ochladzovania.

Záver

Môžeme konštatovať, že zavedením modelovania do základného kurzu o diferenciálnych rovniciach, sa záujem študentov o túto oblasť matematiky zvýšil. Takto sme prirodzeným spôsobom poukázali na praktické využitie a prepojenosť matematiky so situáciami z bežného života. Najviac študentov zaujali možnosti obmeny parametrov vystupujúcich v daných modeloch a ich dôsledky a vplyv na správanie sa študovaného systému, ako aj možnosti predpovedať správanie sa daného systému v určitom čase v budúcnosti, resp. v minulosti.
Z tohto dôvodu sa domnievame, že tvorba jednoduchých matematických modelov a ich štúdium sa javí ako vhodný doplnok učiva o diferenciálnych rovniciach.

Literatúra

BLANCHARD, P – DEVANEY, R. – HALL, G.: 1997. *Differential Equations.* Brooks/Cole Company : Pacific Grove, 1997. ISBN 0-534-34550-6.
ZILL, D. – CULLEN, M.: 1993. *Differential Equations with Boundary-Value Problems.* Brooks/Cole Company : Pacific Grove, 1993. ISBN 053495580-0.

Mgr. Norbert Kecskés
KM FEM SPU Nitra
Tr. A. Hlinku 2, 949 76 Nitra
kecskes@is.uniag.sk