O JEDNOM UŽITOČNOM SPOJENECTVE MATEMATIKY A INFORMATIKY

ABOUT ONE THE USEFUL ALLIANCE OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

Lýdia Kontrová

Abstract: The paper emphasizes a growing need to develop such teacher`s skills which enable him/her to perceive and subsequently present a discussed issue in a broader context, and implement facts and knowledge from various scientific fields into science teaching. A teacher's didactic mastery lies in his/her ability to see and point out the possibilities of interdisciplinary connections in teaching-learning process. Specifically our attention will be focused on interrelation between the contents of the biology, computer science and mathematics curricula on the example of a population growth model.

Key words: interdisciplinary connections, dynamic mathematical models, population growth model, computer simulations, cellular automata, The Game of Life.

Úvod

V posledných rokoch registrujeme vo vzdelávaní snahu prepájať obsahy učiva jednotlivých vyučovacích predmetov a akcentovať využitie preberaných pojmov a faktov pri riešení konkrétnych problémov z každodenného života. Zdôrazňuje sa predovšetkým nutnosť transferu vedomostí, získaných pri vyučovaní jedného prírodovedného predmetu do oblasti iného predmetu.

Ako učitelia matematiky sme často konfrontovaní otázkami študentov, ktorých zaujíma ako a kde môžu práve preberaný matematický poznatok využiť v praxi. Ak chceme v takejto chvíli vhodne a inšpiratívne reagovať, musíme upriamiť pozornosť do sveta biológie, ekonómie, ekológie, chémie či fyziky a ponúknuť študentom uspokojivé vysvetlenie, uviesť relevantný aplikačný príklad. Matematika ponúka bohatú bázu, z ktorej čerpajú ostatné prírodovedné, technické a ekonomické vedy, no na druhej strane práve tieto predmety (vedné odbory) ponúkajú matematikom bohatý priestor pre aplikovanie skúmaných matematických poznatkov.

Formovanie kompetencií učiteľa prekračujúcich rámec určitého predmetu sa javí v súčasnosti ako kľúčová úloha v didaktickej príprave učiteľov prírodovedných predmetov práve v súvislosti so snahou zvýšiť efektivitu výchovnovzdelávacieho procesu.

V súčasnej dobe informačných technológií je samozrejmé, že temer každá vedná disciplína využíva pri svojom výskume informatiku a matematiku. Veľmi intenzívne pociťujeme, ako počítačové technológie prenikajú do ostatných vedných disciplín, aby eliminovali rutinné a stereotypné činnosti, vytvorili priestor pre kreatívne a komplexné vedecké skúmanie, posunuli hranice poznania, umožnili realizovať výskum vo všetkých oblastiach vedy a techniky.

V našom článku demonštrujeme aká inšpiratívna a podnetná môže byť vzájomná kooperácia a kolaborácia matematiky, biológie a informatiky na príklade matematického dynamického modelu a počítačovej simulácie rastu populácie organizmov.

1 Matematické modely rastu jednoduchých spoločenstiev organizmov

Matematický model je abstraktný model, ktorý využíva matematický aparát (číselný, množinový, vektorový, geometrický, atď.) na opísanie správania sa istej sústavy (systému). Matematické dynamické modely sa používajú pre vyjadrenie evolúcie opisovaného systému prebiehajúcej v čase na základe a priori definovaného pravidla. Stretávame sa s nimi najmä v prírodných vedách a inžinierskych disciplínach (fyzike, biológii a elektrotechnike), ale tiež aj v sociálnych vedách (ekonómia, sociológia a politické vedy).

Častým predmetom záujmu matematikov sú simulácie biologických procesov, vytváranie modelov rastu a vzájomných vzťahov populácií rôznych druhov organizmov. Neodmysliteľnú úlohu tu zohrávajú počítačové technológie, ktoré svojím nesmiernym potenciálom participujú pri realizácii výskumov v tejto oblasti.

Modely rastu a vzájomných vzťahov rôznych populácií sú dnes využívané nielen vo všeobecnej biológii, mikrobiológii, ekológii, a ekonomike ale slúžia tiež na:

- ✓ určovanie maximálnej úrody v poľnohospodárstve,
- ✓ pochopenie dynamiky biologických invázií,
- ✓ porozumenie dôsledkov pri ochrane životného prostredia,
- ✓ prognózovanie šírenia parazitov, vírusov a ochorení a ďalšie aplikácie.

Najpoužívanejšie a najrozšírenejšie sú **spojité modely rastu populácie**, ktoré využívajú aparát matematickej analýzy a jazyk diferenciálnych rovníc. V prípade jednoduchých rastových modelov vystačíme s diferenciálnymi rovnicami 1. rádu.

V najjednoduchších modeloch sa populácia charakterizuje svojou veľkosťou, ktorú je možné vyjadriť buď počtom jedincov daného druhu alebo ich celkovou biomasou. Z hľadiska teórie systémov populácia predstavuje modelovaný systém. Stavovou premennou tohto systému je hustota populácie, ktorá je spojitou funkciou času t, označujeme ju $x(t)$ a vyjadruje len približný počet jedincov v čase t.

Pri modeloch rastu živých organizmov predpokladáme, že špecifická miery rastu μ nie je konštantná, ale závisí od množstva dostupného substrátu. Pri malej veľkosti populácie vystačíme s tzv. **Malthusovým modelom** [3], ktorý nepredpokladá závislosť špecifickej miery rastu μ na veľkosti populácie, čo vyjadruje ***Malthusova rovnica***

$$x'(t) = r.\, x(t) \qquad (1)$$

kde $x'(t)$ predstavuje rýchlosť rozmnožovania v čase t a r je konštantou úmernosti, čo je relatívna rýchlosť rozmnožovania (špecifická rastová rýchlosť). Rýchlosť rozmnožovania je v tomto prípade priamo úmerná hustote populácie. Každé riešenie tejto rovnice má tvar

$$x(t) = x(0)e^{rt}. \qquad (2)$$

Pre $x(0) \neq 0$ a $r > 0$ hustota populácie s časom t exponenciálne rastie, pre $r = 0$ zostáva konštantná a pre $r < 0$ klesá exponenciálne k nule a populácia vymiera.

Problémom takýchto klasických (spojitých) dynamických modelov je, že pri ich konštruovaní sa prijímajú pomerne zjednodušené predpoklady. Populácia sa chápe globálne, „*makroskopicky*", ako celok, pričom sa nereflektujú viaceré faktory, ako napríklad rozmnožovanie a smrť jedincov, priestorové rozloženie, či lokálne zmeny populácie. Lokálne rozdiely v populácii sa jednoducho „spriemerujú". Určite pri mnohých úlohách je to správna intuícia, ľahko však nájdeme príklady, kde takýto prístup vedie k nesprávnym záverom. Napríklad podmienka spojitosti funkcie (1) je splnená len pre populácie dostatočne početné, v ktorých sa jednotlivé generácie prekrývajú (t.j. populácia obsahuje jedincov rôznych generácií). Toto však neplatí pre mnohé jednoduché organizmy s krátkou dĺžkou života.

Najjednoduchším alternatívnym riešením je *„mikroskopické"* modelovania rastu populácie, ktoré berie do úvahy ako priestorové rozloženie jedincov, tak podmienky zrodu, prežitia a smrti subjektov. Takéto modelovanie rastu populácie môžeme uskutočniť prostredníctvom tzv. **celulárnych automatov (CA)**. Matematický základ pre konštrukciu CA tvorí moderná algebra, teória algebrických štruktúr (grúp) a operácií realizovanými nad týmito štruktúrami. V tomto momente registrujeme zásadný vstup počítačových technológií do oblasti matematického modelovania biologických procesov a teda interdisciplinárne prepojenie matematiky, informatiky a biológie, (prípadne i ďalších vedných disciplín, v ktorých je možné aplikovať spomínaný model rastu populácie).

2 Celulárne automaty ako modely rastu populácie

Problematikou celulárnych automatov sa ako prví zaoberali J.V. Neumann a S. Ulam, ale k ich najväčšiemu rozmachu prispel až rozvoj počítačových technológií koncom 20. storočia. V tomto období rozhodujúci podiel pri popularizácii celulárnych automatov zohral Stephen Wolfram (1959 -) a jeho publikácia *A New Kind in Science* (2002), v ktorej skladá hold tejto fascinujúcej štruktúre, a považuje ju za akýsi „základný princíp" mnohých javov vo svete.

Celulárny automat (CA) (*angl. cellular automaton*) je dynamický systém a matematický model, ktorý stvárňuje evolúciu živého systému. Vo všeobecnosti ho môžeme charakterizovať pomocou troch základných parametrov:

- ✓ štruktúrou siete, prostredníctvom ktorej simulujeme zvolené javy,
- ✓ špecifikáciou subjektov, ktoré „žijú" na tejto sieti,
- ✓ množinou pravidiel, podľa ktorých sa riadi evolúcia subjektov siete.

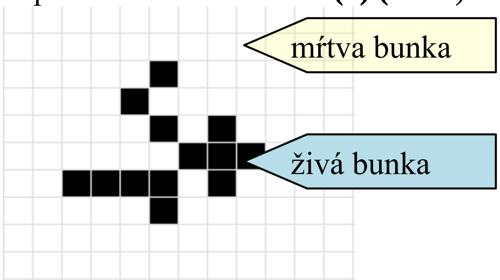
Celulárny automat:

- ✓ pracuje v diskrétnom čase a priestore,
- ✓ je tvorený bunkami (cell),
- ✓ bunky môžu buď usporiadané do tvaru:

- priamky – hovoríme o lineárnych jednorozmerných (označenie 1D CA),
- pravidelnej mriežky (najčastejšie) – hovoríme o dvojrozmerných 2D CA,
- trojrozmernej štruktúry (označenie 3D CA).

✓ každá bunka môže nadobúdať najčastejšie dva stavy (binárny CA);

- jeden stav označuje plné pole ⇔ **živá bunka (1),**
- druhý stav označuje prázdne pole ⇔ **mŕtva bunka (0)** (obr.1).



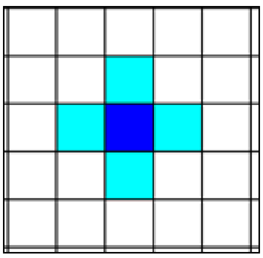
Obr.1: Interpretácia celulárneho automatu

✓ hodnoty stavov buniek sú určené prechodovou funkciou. Argumentom tejto funkcie sú aktuálne hodnoty stavu bunky a stavov buniek z jej okolia, teda bunka mení svoj stav podľa zadefinovaného pravidla,

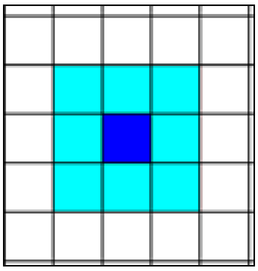
✓ každá bunka má informáciu o sebe samej, ako aj o svojom okolí (lokálne informácie) a na základe toho koná a rozhoduje sa, čo urobí v ďalšom kroku (cykle, generácii),

✓ bunka má tiež okolie, ktoré vplýva na jej rozhodovanie o zmene jej stavu:

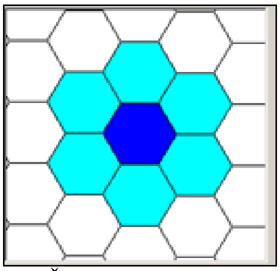
- pre 1D CA je okolie definované ako počet susedných buniek po oboch stranách bunky,
- pre 2D CA existujú tzv.:
  - Neumannovské okolie (4 susedia), obr.2,
  - Moorovské okolie (8 susedov), obr.3,
  - Šesťuholníkové okolie (6 susedov), obr.4.[1]



Obr.2: Neumannovské okolie



Obr.3: Moorovské okolie



Obr.4: Šesťuholníkové okolie

3 The Game of Life (Hra na život) – najznámejší celulárny automat

Ďalšou významnou osobnosťou spojenou s celulárnymi automatmi je anglický matematik John Horton Conway (1937-). V roku 1970 Martin Gardner, redaktor časopisu Scientific American, zaoberajúceho sa teóriou matematických hier, popularizoval fenomenálnu Conwayovu myšlienku a publikoval návrh hry s názvom *The Game of Life.* V zapätí s rozvojom IKT sa hra stala azda najznámejším celulárnym automatom na svete. Fascinácia touto hrou má korene v jednoduchosti pravidiel, ktorými sa riadi, ktoré však následne indikujú nepredvídateľne zložité, rôznorodé a zaujímavé riešenia. The Game of Life je na jednej strane jednoduchým, no súčasne úžasne flexibilným modelom zrodu, evolúcie a vymierania kolónií živých organizmov.

Conway dlho experimentoval, testoval rôzne pravidlá rozvoja kolónií baktérií. Nakoniec určil princípy, ktoré zaručujú veľmi zaujímavý a súčasne nepredvídateľný rozvoj kolónií organizmov. Posolstvo tejto hry je predovšetkým v nasledujúcom:

„ *Aj jednoduché pravidlá môžu viesť k zložitým a komplexným riešeniam*."

Pravidlá hry špecifikujú, za akých podmienok:

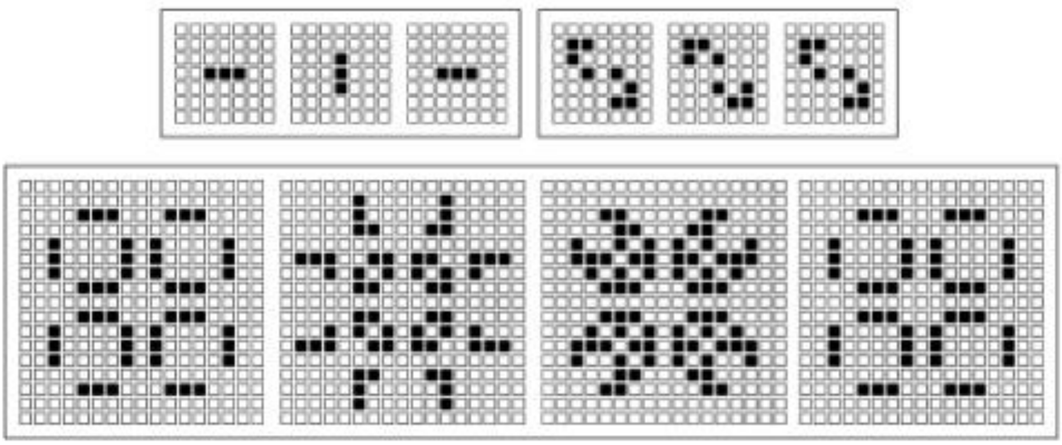
- ✓ baktérie prežívajú do ďalšej generácie,
- ✓ na mieste mŕtvej baktérie sa rodí nová baktéria,
- ✓ živá baktéria umiera.

To, ktorá z uvedených situácii nastane sa riadi počtom žijúcich susedov danej bunky (baktérie). Hra využíva Moorovské okolie bunky a tieto postuláty:

- pre živé bunky: ak má bunka okolo seba menej než 2 bunky, potom umiera na osamelosť,
- pre živú bunku: ak má bunka okolo seba viac ako 3 bunky, potom umiera z „presýtenia", „premnoženia",
- pre živú bunku: ak má okolo seba 2 alebo tri bunky, potom bunka prežije do nasledujúcej generácie,
- pre mŕtvu bunku: ak má bunka v svojom okolí práve 3 bunky, potom príde k zrodu bunky (trojpohlavné rozmnožovanie), inak zostáva mŕtva.

Prvá generácia (krok, cyklus) sa realizuje pre začiatočnú konfiguráciu buniek podľa vyššie uvedených pravidiel, pričom pravidlá sa aplikujú súčasne na každú bunku. Ďalším aplikovaním pravidiel vznikajú ďalšie generácie buniek. Začiatočné obrazce, tvorené ľubovoľne zvoleným počtom živých buniek, smerujú po niekoľkých generáciách k jednej z nasledujúcich situácií:

- štruktúra po X generáciách zanikne,
- vzniká stabilná štruktúra,
- vzniká cyklicky sa opakujúci obrazec (obr.5).

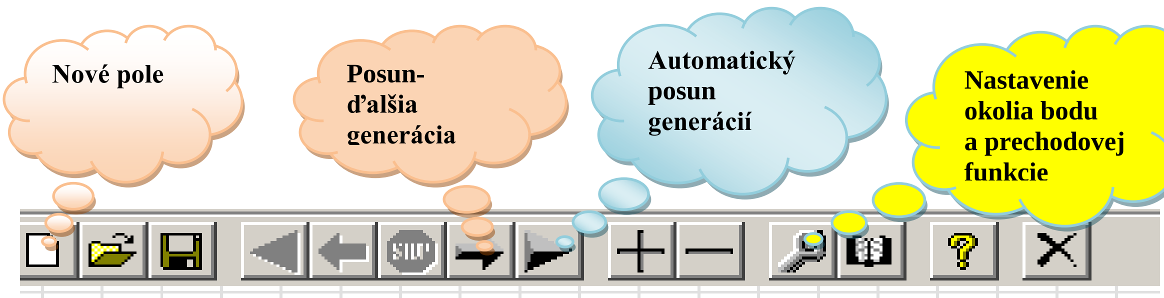


Obr.5: Periodické konfigurácie

3.1 Program Conway

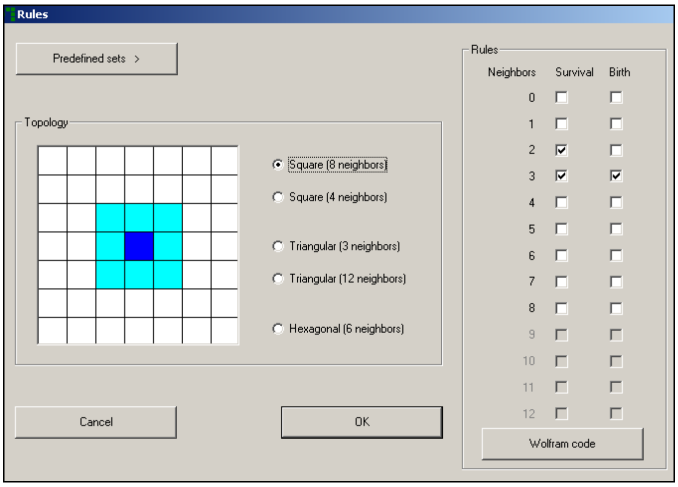
Hru na život môžeme modelovať na obyčajnom štvorčekovom papieri, no s rozvojom počítačových technológií vzniklo množstvo počítačových programov, ktoré hru simulujú a sú voľne dostupné na internete. K takým patrí aj program **Conway**, ktorý sme použili pri koncipovaní tohto článku, a pomocou ktorého môžeme pozorovať evolúciu nami zvolenej konfigurácie buniek na obrazovke počítača. Program tiež umožňuje určovať si vlastné podmienky (postuláty) pre rast populácie, vybrať vhodné okolie bunky (sieť).

Popíšeme v krátkosti manuál programu Conway. Po spustení sa otvorí *Hlavné okno* programu na ktorom registrujeme *Lištu nástrojov* (obr.6), ktorá nám umožňuje nastaviť postuláty pre ľubovoľný celulárny automat



Obr.6: Lišta nástrojov programu Conway

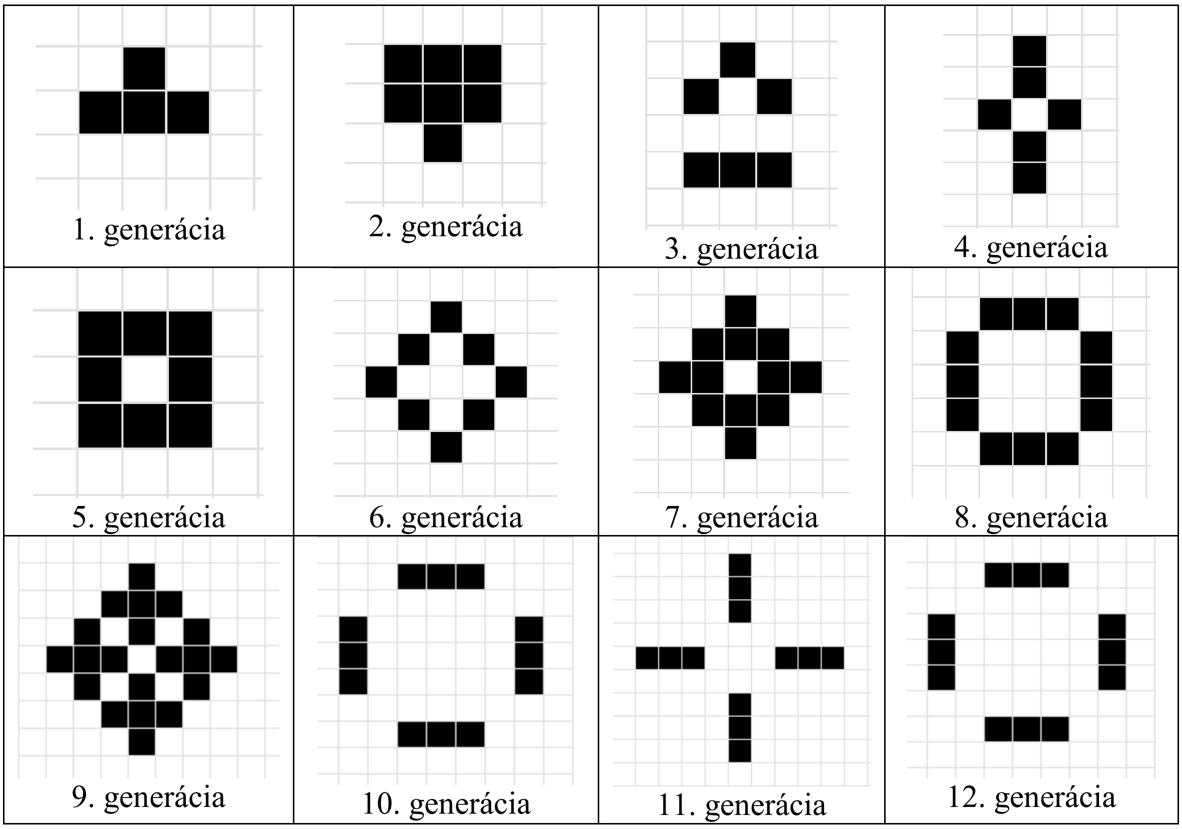
Napríklad nastavenie postulátov pre Game of Life realizujeme prostredníctvom nástroja *Edit Rules*  a dialógového okna (Obr.7) takto:



Obr.7: Dialógové okno *Rules*

Uvedieme tri konkrétne príklady. [2]

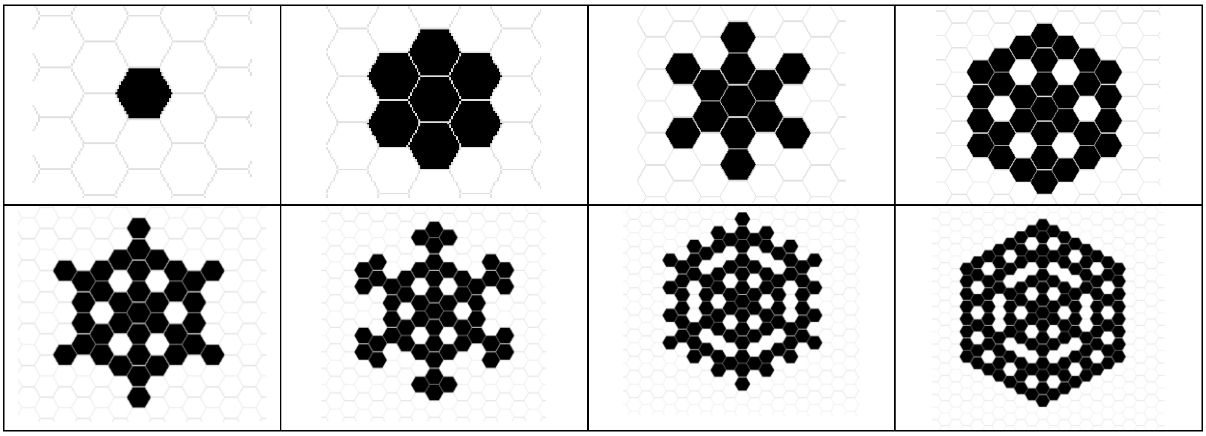
Príklad 1. Podmienky Hry na život aplikujeme na jednoduchú začiatočnú konfiguráciu na Moorovskom okolí buniek (obr.8). Následne simulujeme jej evolúciu a registrujeme vznik obrazcov, predstavujúcich ďalšie generácie. Ako vidieť po jedenástich generáciách vzniká v tomto prípade stabilná oscilujúca štruktúra.



Obr.8: Evolúcia jednoduchej populácie - *The Game of Life*

Príklad 2. *Snehová vločka.* Pozrieme sa teraz na celulárny automat, ktorý elementárnym spôsobom modeluje rast snehovej vločky. Vznik snehovej vločky je špeciálnym prípadom rastu kryštálov. Kryštál začína rásť od prvopočiatočnej bunky a generuje sa okolo nej podľa presne stanovených pravidiel. Pre vznik snehovej vločky môže by „zárodkom“ napríklad zrnko prachu vznášajúce sa v povetrí, či tiež jednoduchá baktéria.

Vzhľadom na vrodenú hexagonalitu kryštálov ľadu, ktorá je podmienená symetriou molekúl vody, rast snehovej vločky budeme modelovať na šesťuholíkovej sieti (sieť ako plást medu). Pravidlo evolúcie snehovej vločky bude jednoduché: ***Nový fragment kryštálu ľadu vznikne len v tej bunke, ktorá má práve jednu susednú bunku obsadenú kryštálikom ľadu.*** Na obrázku 9 vidíme celulárny automat a niekoľko začiatočných konfigurácií rastu kryštálu ľadu.



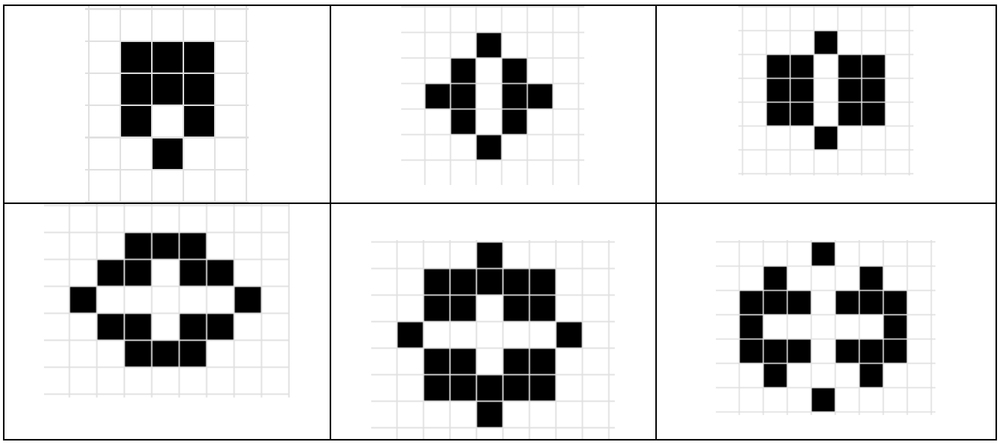
Obr. 9: Evolúcia snehovej vločky

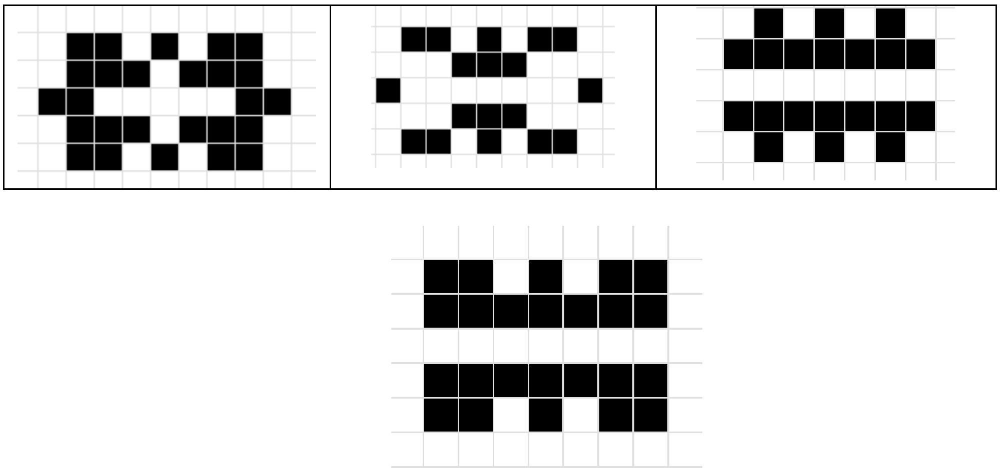
Príklad 3. *Realistický model osídľovania časti územia.* Uvažujme teraz o celulárnom automate, ako nástroji simulácie optimálneho osídľovanie územia organizmami. Vieme, že príliš veľká hustota osídlenia na istom území je negatívnym faktorom vzhľadom na množstvo potravinových zdrojov, ktoré sa takto rýchlo vyčerpajú a populácia hynie alebo si musí hľadať nový životný priestor. Na druhej strane, ak je kolónia organizmov málo početná a príliš osamotená (malý počet susedov) má to tiež negatívny vplyv na jej rozmach. Stanovili sme preto takéto postuláty pre simuláciu optimálneho rozvoja kolónie:

- bunka reprezentujúca organizmus „prežije" v prípade, že má dvoch, troch alebo štyroch susedov,
- nová bunka vznikne, (zmení sa zo stavu neživá na živá) iba v prípade, že má práve troch susedov.

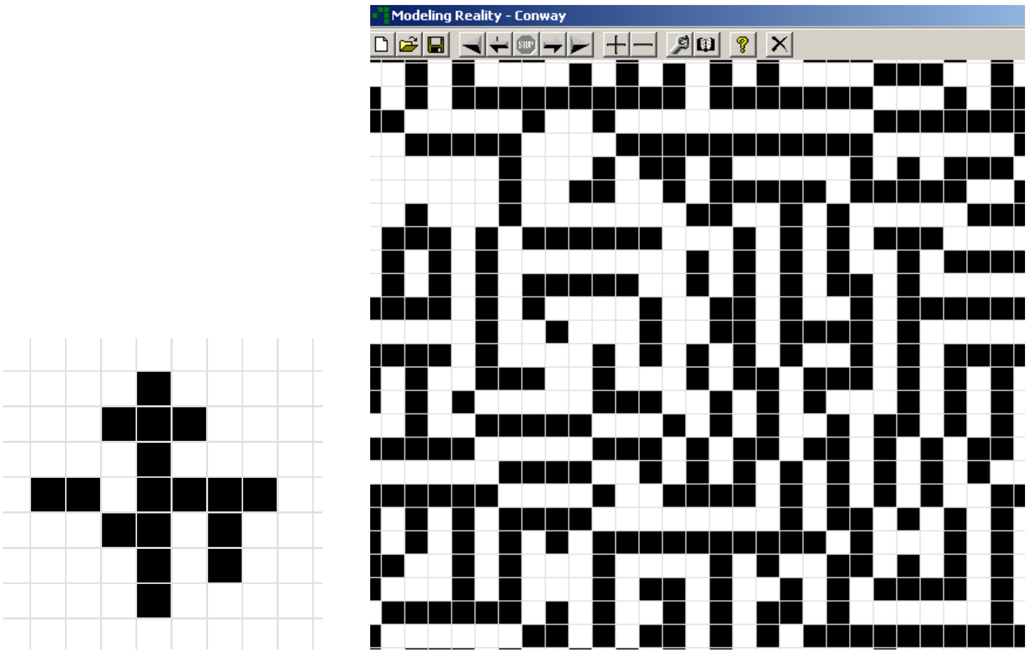
Programom Conway simulujeme tieto podmienky pre rôzne počiatočné konfigurácie organizmov čo do počtu a rozmiestnenia v rovine a zisťujeme že:

- Samotne existujúci jedinci, alebo samotné páry jedincov umierajú,
- Malé kolónie jedincov (párov) sa rýchlo stabilizujú v tvare geometrických konfigurácií, ktoré už ďalej nerastú (obr. 10).
- Početnejšie skupiny jedincov, (obr. 11) sa po mnohých generáciách stabilizujú v tvare náhodných labyrintov, ktoré pokrývajú celú vymedzenú časť roviny.





Obr.10: Simulácia rastu malej kolónie organizmov



Obr.11: Simulácia rastu početnejšej kolónie organizmov

Záver

Je mnoho dôvodov, prečo študovať celulárne automaty. Umožňujú nám konštruovať modely, ktoré simulujú evolúciu živej hmoty. Pomocou celulárnych automatov môžeme stvárňovať okrem biologických aj procesy z ďalší oblastí života [4]. Ide predovšetkým o také javy ako sú: pohyb sypkých materiálov (takých ako kopa piesku), priepustnosť kvapalín cez pórovitý materiál, šírenie lesných požiarov, tvorenie sa kolón na diaľnici, rozširovanie sociálnych sietí, vznik chemických zlúčenín, kryštalizácia, rast nádorov a mnohé ďalšie.

Literatúra

[1] BIALYNICKI, B. – BIRULA, I.: *Modelowanie rzeczywistosci*. PWN Warszawa. 2010.

[2] KALAS, J., POSPIŠIL, Z.: *Spojité modely v biologii*, Masarykova univerzita, Brno, 2001, 265s., ISBN 80-210-2626-X .

[3] PELÁNEK, R.: *Buněčné automaty.* Přednáška. Přístup z internetu: URL: http://www.fi.muni.cz/~xpelanek/IV109/slidy/ca.pdf.

[4] SMÍTALOVÁ, K., ŠUJAN, Š.: *Dynamické modely biologických spoločenstiev*, Veda, vydavateľstvo SAV, Bratislava, 1989, 160s. ISBN 80-224-0033-5.

[5] A LIFE. *Celulárne automaty:* Základné typy štruktúr. Přístup z internetu: URL: http://alife.tuke.sk/index.php?clanok=2264.

Článok vznikol s podporou projektu KEGA 046ŽU - 4/2011.

.

PaedDr. Lýdia Kontrová, PhD.
Katedra matematiky FHV, ŽU v Žiline
lydia.kontrova@fhv.uniza.sk